

DEFINIRANJE BIVARIJANTNIH VEZA IZMEĐU PARAME-
TARA VELIKOG VODNOG VALADefinition of Bivariate Relationships between Parameters of
High Water Wave

KSENIJA SREBRENOVIĆ

Republički hidrometeorološki zavod SR Hrvatske, Zagreb

Primljeno 1. rujna 1987, u konačnom obliku 20. listopada 1987.

Sažetak: Za hidrološku stanicu Crni Lug – Vela Voda (područje Gorskog Kotara) odredi su veliki vodni valovi s obzirom na maksimalnu godišnju protoku i maksimalni volumen iznad neke reperi protoka. Analizom frekvencija određene su veličine parametara vodnog vala – maksimalni volumen i vrijeme formiranja maksimuma, te njihove međusobne stohastičke veze definirane sa 95%-tnim stupnjem osiguranja.

Ključne riječi: Analiza frekvencije, stohastička zavisnost, hidrogram vodnog vala, maksimalni volumen, maksimalna protoka, regresijska analiza, vrijeme formiranja maksimuma vodnog vala.

Abstract: High water waves are defined in respect to maximum annual discharge and maximum volume above some reference discharge. Some values of water wave parameters are determined by frequency analysis – maximum volume and the time needed for maximum formation, as well as their mutual stochastic relations defined by 95 percent of safety degree.

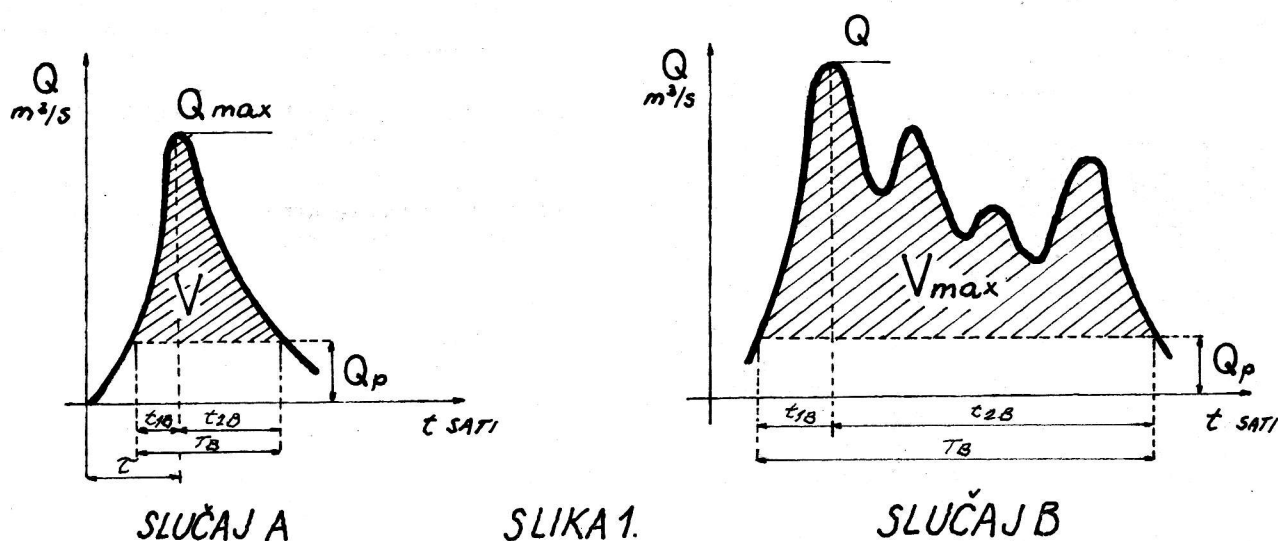
Key words: Frequency analysis, Stochastic dependence, hydrogram of water wave, maximum discharge, regression analysis, time necessary for maximum formation of water wave.

1. UVOD

Za analitičko definiranje hidrograma velikog vodnog vala potrebno je poznavati barem tri njegova osnovna parametra. To su: maksimalna protoka Q_{max} , vrijeme koncentracije τ i sadržaj vodnog vala V . Iz historijskih podataka vodnih valova jedino se maksimalna protoka može jednostavno

definirati, dok za ostala dva parametra to predstavlja praktično neostvarljivu intenciju zbog naglašenog kontinuiteta tečenja, koji zahtjeva složen proces separacije vodnog vala na dio koji otpada na sam fenomen jakog povodnja i na dio koji je vezan uz dotok podzemne vode.

Stoga da bi zadatak simplificirali na temelju historijskih valova definirat ćemo slijedeće veličine (sl. 1).



SLIKA 1.

Sl. 1. Slučaj A
Fig. 1. Case A

SLUČAJ B

Slučaj B
Case B

HRVATSKO METEOROLŠKO DRUŠTVO
ZAGREB — GRČ 3

U slučaju A: nizove maksimalnih godišnjih protoka $Q_{\max}$ – baznog vremena T_B izoliranog hidrograma kod izabrane reperne protoke Q_p m³/sec, koje se sastoji od vremena podizanja t_{1B} i vremena opadanja t_{2B} vodnog vala,

$$T_B = t_{1B} + t_{2B}$$

– volumena V hidrograma iznad protoke praga Q_p

U slučaju B: nizove maksimalnih godišnjih volumena $V_{\max}$ – baznog vremena T_B hidrograma iznad protoke Q_p (obično se radi o složenim valovima – valovima koji imaju više vrhova)

– ukupnog volumena $V_{\max}$ iznad izabrane protoke Q_p
– maksimalnih protoka Q , koje mogu, ali ne moraju odgovarati godišnjem maksimumu $Q_{\max}$.

Za repere protoke usvojili smo slijedeće veličine: 0,5, 1,0, 1,5 i 2,0 m³/sec, a u tabeli 1 pregledno u kronološkom slijedu, navodimo samo za $Q_p = 2,0$ m³/sec sve analizirane parametre. Pri tome se kod niza maksimalnih (slučaj A) godišnjih protoka korespondentni parametri T_B i V odnose na izolirane hidrograme, koji su kod složenih vodnih valova separirani krivuljom recesije oblika

$$Q = Q_0 \cdot 0,961^t$$

gdje je:

Q – protoka u opadajućem dijelu vodnog vala, koja se formira t -sati nakon protoke Q_0 ,

Q_0 – inicijalna protoka u trenutku $t = 0$,

t – vrijeme od inicijalne protoke Q_0 u satima.

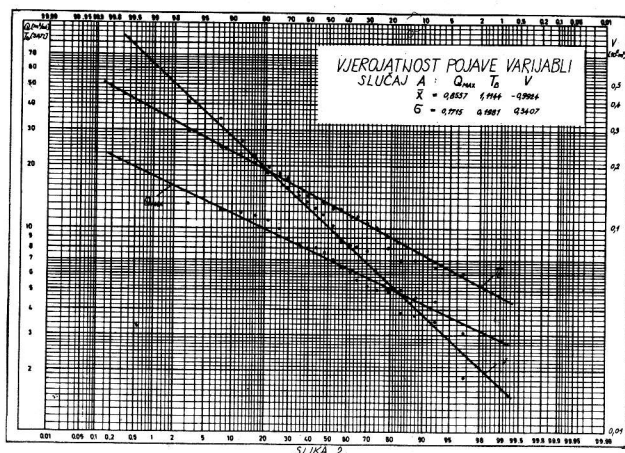
2. ANALIZA FREKVENCIJE OSNOVNIH PARAMETARA

Izbor teoretske funkcije razdiobe analiziranih varijabli u uvodu definirat će se na temelju 5 funkcija koje se obično koriste za proračun hidroloških pojava. To su: Gaussova log-normalna ili Galtonova funkcija, Pearson tip III, log-Pearson tip III, te Gumbelova funkcija ekstremnih vrijednosti. Budući da se radi o relativno kratkom uzorku ($N = 22$) to je rezultat testiranja kvalitete prilagođavanja teoretske funkcije empiričkoj distribuciji testom Smirnov-Kolmogorova prilično nepouzdan. Pri tome se Galtonova distribucija pokazala kao najprihvatljivija teoretska funkcija vjerojatnosti kod gotovo svih analiziranih varijabli. Također grafički prikaz vjerojatnosti pojave varijabli:

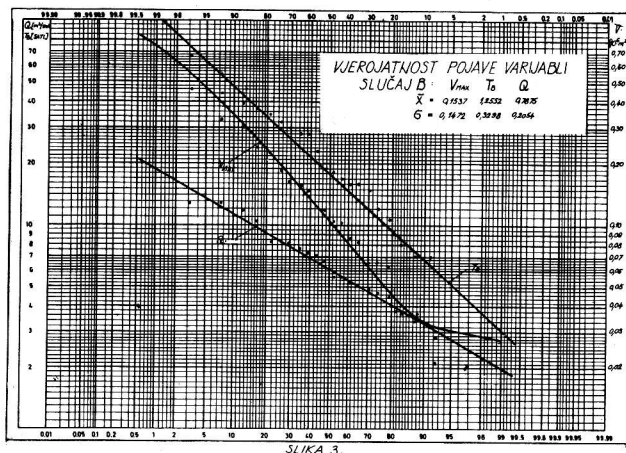
– slučaj A: $Q_{\max}$, T_B , V

– slučaj B: $V_{\max}$, Q , T_B

Slika 2 i 3 za repenu protoku $Q_p = 2,0$ m³/sec pokazuje



Sl. 2. Vjerojatnost pojave varijabli Slučaj A
Fig. 2. Probability of occurrence of variables in case A



Sl. 3. Vjerojatnost pojave varijabli Slučaj B
Fig. 3. Probability of occurrence of variables in case B

dobru prilagodbu Galtonove distribucije. Izuzetak je varijabla $V_{\max}$ za koju je kao što je vidljivo bolje prilagodljiva Pearsonova distribucija.

NIZOV MAKSIMALNIH GODIŠNJIH PROTOKA $Q_{\max}$ I MAKSIMALNIH GODIŠNJIH VOLUMENA $V_{\max}$ I NJIMA KORESPONDENTNIH PARAMETARA IZNAJ PROTOKE Q_p
TABELA 1.

TABELA 7.

GODINA	Q_p						Q_p					
	Q_{max} m/s	V_{max} m/s	t_{1B}	t_{2B}	$x = \frac{t_{2B}}{t_{1B}}$	T_B	Q_{max} m/s	V_{max} m/s	t_{1B}	t_{2B}	$x = \frac{t_{2B}}{t_{1B}}$	T_B
1963	12,3	0,1814	3,0	9,5	3,17	12,5	0,1574	2,0	12,0	3,0	15,0	
1964	8,29	0,1253	2,5	20,5	8,20	23,0	0,1429	4,5	17,5	11,7	19,0	
1965	12,7	0,2441	2,5	13,0	5,27	22,5	0,3428	22,5	23,5	1,15	44,0	
1966	11,9	0,1076	13,0	16,5	1,27	29,5	0,6780	31,0	15,0	0,4684	46,0	
1967	3,04	0,0085	3,0	3,0	1,00	6,0	0,0091	4,0	1,0	1,0	5,0	
1968	7,72	0,1213	5,5	9,5	1,73	15,0	0,1213	5,5	9,5	1,73	15,0	
1969	6,64	0,0480	2,5	8,0	3,20	10,5	0,0661	5,5	10,5	1,91	16,0	
1970	4,41	0,0378	3,5	3,5	1,00	7,0	0,0210	3,5	3,5	1,00	7,0	
1971	5,11	0,0381	2,5	4,5	1,80	7,0	0,0381	2,5	4,5	1,80	7,0	
1972	5,60	0,1171	6,5	12,0	1,85	18,5	0,1052	6,5	12,0	1,85	18,5	
1973	7,16	0,0067	2,5	9,0	3,60	11,5	0,0067	1,5	9,0	6,00	10,5	
1974	11,7	0,0059	3,5	16,0	4,57	19,5	0,0202	11,0	16,5	1,50	37,5	
1975	10,1	0,0854	2,0	6,0	3,00	8,0	0,0434	2,0	6,0	3,00	8,00	
1976	11,2	0,0232	1,0	3,0	3,00	4,0	0,0241	1,0	2,5	2,50	3,50	
1977	6,50	0,0789	5,0	6,5	1,30	11,5	0,0661	4,5	10,5	2,33	23,0	
1978	6,28	0,0627	4,5	9,0	2,00	13,5	0,1015	11,5	10,5	1,04	22,0	
1979	3,23	0,0086	3,5	10,5	3,00	12,0	0,0106	3,0	12,0	4,00	30,0	
1980	8,14	0,0627	2,0	16,0	8,00	18,0	0,0330	10,5	12,5	1,17	23,0	
1981	6,43	0,0384	2,5	16,0	6,40	18,5	0,0341	3,5	12,5	3,57	17,0	
1982	8,04	0,1431	4,0	8,5	2,12	12,5	0,4499	16,0	13,0	0,807	29,0	
1983	8,24	0,1026	4,5	16,0	3,55	19,5	0,1456	10,0	20,0	2,00	30,0	
1984	5,11	0,0351	2,0	6,5	3,25	8,5	0,0400	6,5	7,5	1,15	14,0	

Tabela 1. Nizovi maksimalnih godišnjih protoka $Q_{\max}$ i maksimalnih godišnjih volumena $V_{\max}$ i njima korespondentnih parametara iznad protoke Q_p .

Table 1. Series of maxima annual discharge $Q_{\max}$, maxima annual volumes $V_{\max}$ and their corresponding parameters above discharge Q_p .

3. DEFINIRANJE BIVARIJANTNIH VEZA IZMEĐU PARAMETARA VODNOG VALA

U tabeli 1 su obilježene godine u kojima se u oba niza radi o identičnim vodnim valovima. Potrebno je naglasiti da između parova ovih parametara:

– slučaj A: ($Q_{\max}$, V), ($Q_{\max}$, T_B), ili (V , T_B),

– slučaj B: ($V_{\max}$, Q), ($V_{\max}$, T_B), ili (Q , T_B),

sigurno ne postoji potpuna funkcionalna veza. Stoga je nužno definirati stohastičku povezanost ovih varijabli, tj. vjerojatnost njihove zajedničke istovremene pojave. No prije nego pređemo na proračun zajedničke funkcije gustoće koja se prezentira dvodimenzionalnim normalnim zakonom, potrebno je izabrati par mjerodavnih varijabli za ovaj proračun.

Za ocjenu veličine koeficijenta korelacije između pojedinih analiziranih varijabli (koji predstavlja mjeru njihove međusobne zavisnosti) poslužit ćemo se Spearmanovom formulom za proračun rang korelacije.

$$r = 1 - \frac{6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

gdje je:

D – razlika između ranga korespondentnih varijabli

N – broj parova varijabli

Proračun pokazuje, da je stohastička veza najveća za par varijabli ($Q_{\max}$, V) i ($V_{\max}$, Q), te da ona raste sa porastom protoka praga Q_p , što se logično moglo i očekivati. Stoga ćemo proračun zajedničke funkcije gustoće učiniti samo za ova dva para varijabli, koji su uostalom i najvažniji parametri velikog vodnog vala.

Pretpostavljamo da su osnovne teoretske postavke dvodimenzionalne raspodjele poznate. No potrebno je napomenuti, da se ova distribucija može primijeniti ako se:

a) marginalne distribucije varijabli pokoravaju normalnom zakonu raspodjele

b) testiranjem dokaže da se zajednička funkcija distribucije pokorava normalnoj razdiobi.

Za izabrane parove varijabli ($Q_{\max}$, V) i ($V_{\max}$, Q) uz prethodnu logaritamsku transformaciju zadovoljen je uvjet a), dok uvjet b) nema smisla statistički dokazivati budući se radi o vrlo kratkom uzorku. Rezultat regresijske analize i proračun elipse 90%-tnog rasipanja navedenih parova varijabli navodimo u tabeli 2. Može se konstatirati da je stohastička povezanost varijabli $Q_{\max}$ i V naročito velika ($r = 0,8667$), dok je ista kod niza maks. god. volumena korespondentnih kulminirajućih protoka Q nešto manja, što se moglo i očekivati.

Ako npr. varijabla $Q_{\max}$ poprimi diskretnu vrijednost koja odgovara povratnom periodu $P = 10$ god., taj pravac siječe našu elipsu u dvije točke A i B, koje predstavljaju donju i gornju granicu intervala zapremine V vodnog vala iznad praga $Q_p = 2,0 \text{ m}^3/\text{sec}$, definirane sa 95%-tnim nivoom sigurnosti (ispod točke A i iznad točke B zapremina vodnoga vala se može naći u svega 5% slučajeva). Ordinate ovih točaka se mogu očitati grafički ili proračunati analitički.

PARAMETRI I RELACIJE DVIDIMENZIONALNE NORMALNE DISTRIBUCIJE
VARIJABLI ($Q_{\max}$, V) I ($V_{\max}$, Q)

PARAMETAR	RELACIJE DVIDIMENZIONALNE DISTRIBUCIJE	RELACIJE DVIDIMENZIONALNE DISTRIBUCIJE	RELACIJE DVIDIMENZIONALNE DISTRIBUCIJE	RELACIJE DVIDIMENZIONALNE DISTRIBUCIJE
PROJEKCIJA	$x = \lg Q_{\max}$	$y = \lg V$	$x = \lg V_{\max}$	$y = \lg Q$
PROJEKCIJA	0,85377	-0,99209	-0,08786	0,78793
PROJEKCIJA	0,17150	0,30120	0,73498	0,80591
KOEF. KORI	0,20044	-0,36394	0,73498	0,28044
KOEF. ASIMET.	-0,21678	-0,21678	-0,69881	-0,69881
KOEF. KORI	0,0867		0,7542	
KOEF. ASIMET.		0,0867		0,7542
KOEF. KORI	$y = 0,78793x + 0,01850$	$y = 0,78793x + 0,01850$	$y = 0,78793x + 0,01850$	$y = 0,78793x + 0,01850$
KOEF. ASIMET.	$x = 0,95582y + 0,00793$	$x = 0,95582y + 0,00793$	$x = 0,95582y + 0,00793$	$x = 0,95582y + 0,00793$
KOEF. ASIMET.	$x = 0,95582y + 0,00793$	$x = 0,95582y + 0,00793$	$x = 0,95582y + 0,00793$	$x = 0,95582y + 0,00793$
KOEF. ASIMET.	$y = 0,78793x + 0,01850$	$y = 0,78793x + 0,01850$	$y = 0,78793x + 0,01850$	$y = 0,78793x + 0,01850$
KOEF. ASIMET.	$x = 0,95582y + 0,00793$	$x = 0,95582y + 0,00793$	$x = 0,95582y + 0,00793$	$x = 0,95582y + 0,00793$

Tabela 2. Parametri i relacije dvodimenzionalne normalne distribucije varijabli ($Q_{\max}$, V) i ($V_{\max}$, Q)

Table 2. Parameters and relations of two-dimensional normal distribution of variables ($Q_{\max}$, V) and ($V_{\max}$, Q)

Točke A i B su simetrično locirane u odnosu na prvi pravac regresije p_1 , odnosno točku C koja daje najvjerojatniju (očekivanu) veličinu zapremine vodnog vala kod 10 god. maksimalne protoka. U tabeli 3 i 4 dajemo prikaz rezultata proračuna, tj. veličine analiziranih varijabli (očekivane vri-

SLUČAJ A

POVRATNI PERIOD P GODINA	MAKSIMALNI PROTOK Q	MAKSIMALNI VOLUMEN V	MAKSIMALNI PROTOK Q	MAKSIMALNI VOLUMEN V
10	14,9	-0,614 *	-0,316 *	-0,813 *
		0,293	0,483	0,122
25	14,3	-0,475 *	-0,265 *	-0,686 *
		0,335	0,593	0,206
50	16,1	-0,385 *	-0,279 *	-0,492 *
		0,412	0,526	0,322

Tabela 3. Slučaj A
Table 3. Case A

SLUČAJ B

POVRATNI PERIOD P GODINA	MAKSIMALNI PROTOK Q	MAKSIMALNI VOLUMEN V	MAKSIMALNI PROTOK Q	MAKSIMALNI VOLUMEN V
10	9,348	9,886 *	1,219 *	9,758 *
		9,70	16,40	5,70
25	9,508	1,059 *	1,248 *	9,900 *
		14,40	16,50	7,90
50	9,633	1,106 *	1,190 *	1,022 *
		12,80	15,50	19,50

Tabela 4. Slučaj B
Table 4. Case B

jednosti za korespondentnu varijablu, gornji i donji limes definiran sa 95%-tnim stupnjem osiguranja u karakterističnim povratnim periodima: 10, 25 i 50 godina. Veličine označene * predstavljaju logaritme.

4. PRORAČUN ANALITIČKOG OBLIKA HIDROGRAMA

U našem slučaju je najprikladniji slijedeći oblik vodnog vala: za val u porastu: t:

$$Q = Q_{\max} \sin^2 \frac{\pi t}{2\tau} \dots 4$$

za val u padu: t:

$$Q = Q_{\max} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-m} \dots 5$$

U ovim formulama su nepoznanice: τ vrijeme koncentracije i m parametar oblika vodnog vala. Za njihovo definiranje stoje nam na raspolaganju parametri: volumen vodnog vala V u bivarijantnoj funkciji sa maksimalnom protokom, bazno vrijeme hidrograma T_B u visini reporne protoka Q_p definirano log-normalnom raspodjelom uz supoziciju iste frekvencije pojave koju ima i varijabla V. Na priloženoj skici (sl. 4) su označene veličine koje se koriste u formulama za proračun parametara τ i m . Osnovnim analitičkim proračunom nalazimo slijedeće izraze za vrijeme koncentracije:

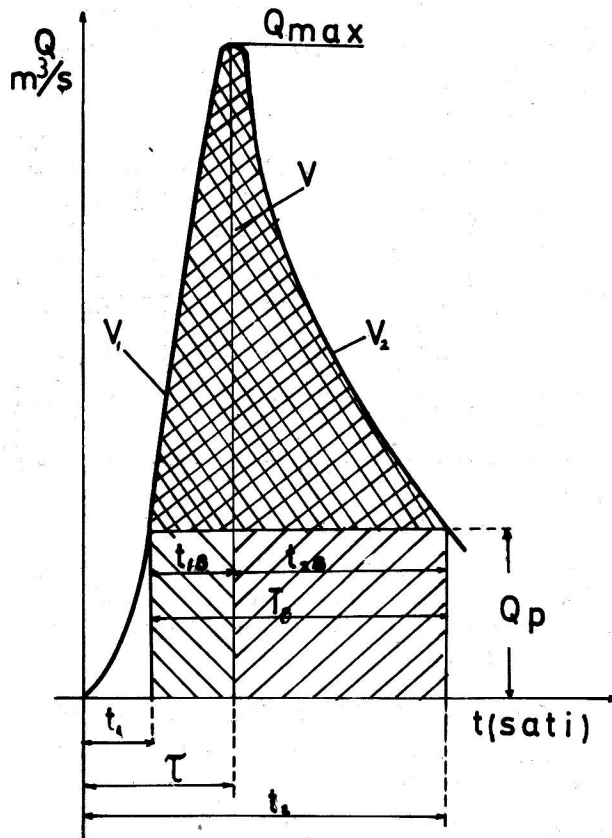
$$\tau = \frac{T_B}{(\varphi^{-1/m} - A)} \dots 6$$

$$\tau = \frac{10^3 V}{3,6 Q_{\max} \cdot B} \dots 7$$

$$\varphi = \frac{Q_p}{Q_{\max}} \dots 8$$

$$A = \frac{\arcsin \varphi^{0.5}}{90^\circ} \dots 9$$

$$B = 0,5[1 - A + 1/\pi \sin(180 A) + \\ + \frac{1}{m-1} \left(1 - \varphi^{m-1/m}\right) - \varphi(\varphi^{-1/m} - A) \dots 10$$



Sl. 4.
Fig. 4.

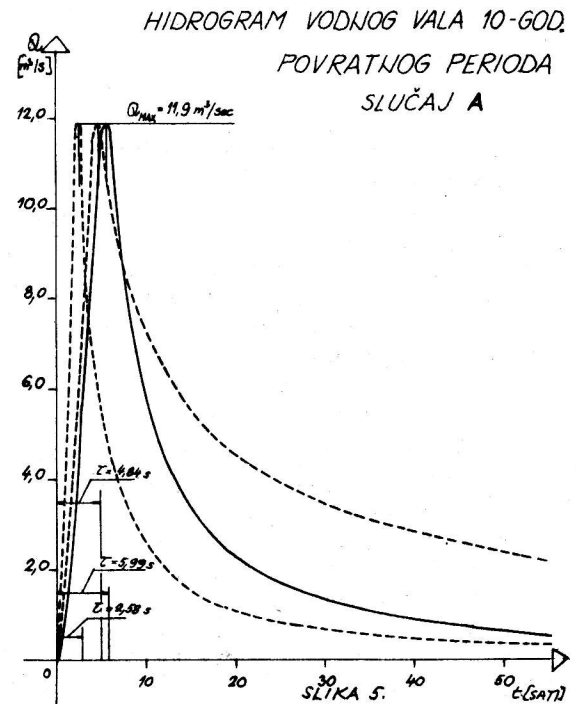
Izjednačenjem izraza 6 i 7 iterativnim postupkom nalazimo parametar m – oblika vodnog vala, a potom i τ . Grafički prikaz hidrograma 10-god. povratnog perioda za slučaj A i B prikazan je na slici 5. i 6. Proračun parametara m i τ dajemo tabelarno za tri frekvencije pojavljivanja.

SLUČAJ A

TABELA 5

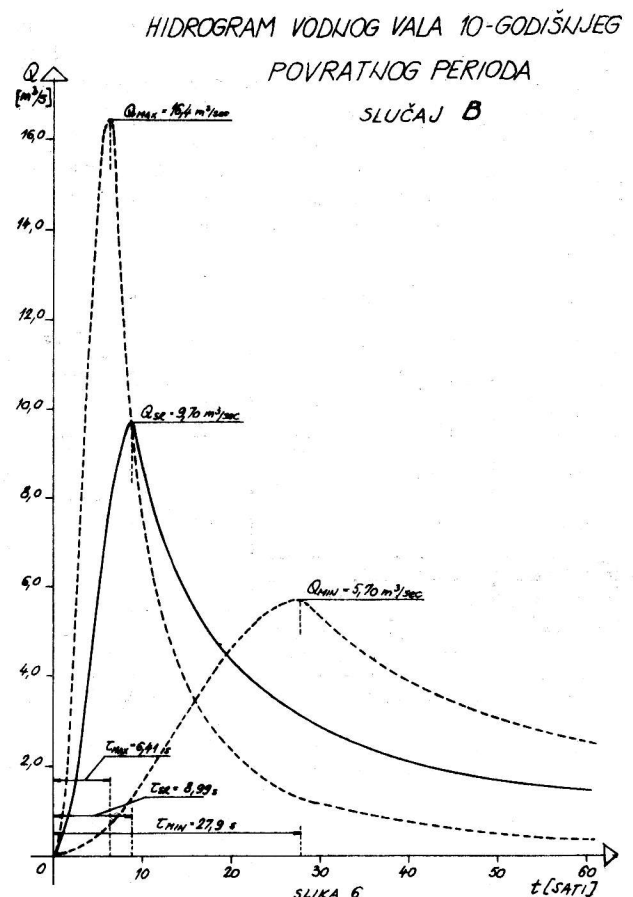
P	Q_{max}	Q_p	$Q_p = 2,0 \text{ m}^3/\text{sec}$		$Q_p = 9,5 \text{ m}^3/\text{sec}$		$Q_p = 2,0 \text{ m}^3/\text{sec}$		$Q_p = 9,5 \text{ m}^3/\text{sec}$		τ	m
			V	T_0	V	T_0	τ	m	τ	m		
600												
ZA NAJVEĆOJATNIJU ZAPREMINU – OČEKIVANA VRIJEDNOST												
10	11,3	1,9153	0,243	22,6	0,511	53,0	5,44	1,235	1,334	5,38	0,367	
25	14,3	1,5153	0,335	26,0	0,581	62,6	5,55	1,246	1,373	5,35	1,192	
50	16,1	1,412	0,412	29,3	0,602	79,7	5,56	1,269	1,348	5,32	1,273	
ZA MAKSIJALNU ZAPREMINU – GORNJI LIMES												
10	11,9	1,9112	0,183	22,0	0,528	149,5	4,19	0,538	5,48	0,355	6,04	0,679
25	14,3	1,5102	0,263	26,8	0,543	150,1	3,38	0,635	6,11	0,296	3,81	0,679
50	16,1	1,4089	0,326	27,5	0,556	155,7	2,88	0,604	3,14	0,310	3,04	0,689
ZA MINIMALNU ZAPREMINU – DONJI LIMES												
10	11,9	0,2230	0,122	14,5	0,263	44,7	5,59	0,797	2,74	1,181	2,58	1,457
25	14,3	0,2965	0,206	19,6	0,360	53,6	5,44	0,830	3,56	1,233	3,19	1,153
50	16,1	0,4637	0,322	25,4	0,506	65,4	3,26	1,007	4,60	1,297	3,65	1,005

Tabela 5. Slučaj A
Table 5. Case A



Sl. 5. Hidrogram vodnog vala 10 godišnjeg povratnog perioda
Slučaj A

Fig. 5. Hydrogram of water wave for 10-year return period.
Case A.



Sl. 6. Hidrogram vodnog vala 10 godišnjeg povratnog perioda
Slučaj B

Fig. 6. The same as Fig. 5, but for the case B.

SLUČAJ B

TABELA 6

p	Q	Q _{max} = 40 m³/sec	V	T _B	Q _{max} = 45 m³/sec	V	T _B	Q _{max} = 40 m³/sec	V	T _B	Q _{max} = 45 m³/sec	V	T _B
10	9,7	0,9702	0,348	37,6	0,593	11,3	49,25	1,448	0,77	1,009	0,998	1,009	0,998
25	14,6	1,3116	0,508	46,7	0,794	16,0	11,28	1,92	1,079	0,98	0,987	0,987	0,987
50	19,6	1,5565	0,633	53,7	0,976	21,6	10,65	1,053	1,053	0,77	0,989	0,989	0,989
ZA MAKSIMALNU PROTOKU - GORNJI LIMES													
10	16,8	0,4005	0,348	25,1	0,593	87,0	4,61	1,213	0,58	1,181	0,4	0,744	0,744
25	16,5	0,2983	0,508	25,3	0,794	87,7	14,81	0,632	1,38	0,409	0,77	0,536	0,536
50	15,5	0,2642	0,633	30,0	0,976	84,8	18,79	3,367	1,257	0,251	0,509	0,729	0,729
ZA MINIMALNU PROTOKU - DONJI LIMES													
10	5,7	0,4539	0,348	55,8	0,593	157,0	37,87	1,663	16,33	1,066	27,9	1,066	1,066
25	7,9	0,5362	0,508	34,3	0,794	230,9	9,93	0,609	7,78	0,512	11,2	0,512	0,512
50	19,5	1,7377	0,633	148,9	0,976	243,7	2,60	0,409	6,16	0,327	4,38	0,327	0,327

Tabela 6. Slučaj B
Table 6. Case B

4. ZAKLJUČAK

Prezentirani teoretski hidrogrami vodnog vala prikazani na slici 5. imaju istu vjerojatnost pojave $p = 10\%$ ili $P = 10$ godina, ako se promatraju u slučaju:

A – maksimalne protoke Q_{max} odnosno u slučaju

B – sadržaja vodnog vala V_{max}

dok ostale parametre karakteriziraju ovi povratni periodi:

U slučaju a)	gornji limes	očekivana vrijednost	donji limes
Varijabla V:	23,6	4,3	1,64
Varijabla T _B :	2000	3,8	1,26

U slučaju B)	53	6,0	1,83
Varijabla Q	53	6,0	1,83
Varijabla T _B	2,4	6,0	21,0

Prednost iznesene analize je u velikom broju kombinacija karakterističnih parametara vodnog vala što ostavlja projektantu veliku mogućnost izbora najkritičnijeg slučaja.

LITERATURA

- Hald A., 1967: Statistical theory with engineering applications, Jons Wiley & sons, inc. New York.
Serdar. V., 1966: Udžbenik statistike, Školska knjiga, Zagreb, 1966.
Srebrenović D., 1971: Osnove matematske statistike primjenjene u hidrologiji, Seminar Jugoslavenskog komiteta za međunarodnu hidrološku deceniju, Zagreb, 1971.
Srebrenović K., 1984: Stohastička povezanost velikih voda Vuke i Dunava Rasprave, 19, Zagreb, 3-10.

SUMMARY

The presented theoretical hydrograms of water wave, shown on Fig. 5, have the same probability of occurrence $p = 10\%$ or $P = 10$ years, if they are considered in a case of A – maximum discharge Q_{max} , or B – content of water wave V_{max} , whereas the remaining parameters are characterized by the following return periods:

In case A)	the upper limit	expected value	limit
Varijable V:	23,6	4,3	1,64
Varijable T _B :	2000	3,8	1,26
In case B)			
Varijable Q	53	6,0	1,83
Varijable T _B	2,4	6,0	21,0

The advantage of this analysis is in the large number of combination characteristics for water wave parameters, which leaves the designer with considerable room for choice of the most critical cases.