Kamatni račun

MIRTA BENŠIĆ* GORAN BENŠIĆ†

Sažetak. *U radu je prezentiran jednostavan metodološki pristup u obradi kamatnog računa temeljen samo na dvjema ključnim formulama te razumijevanju i primjeni principa jednostavnog i složenog ukamaćivanja. Pokazano je da izvedene formule za jednostavno i složeno ukamaćivanje određuju funkciju rasta kapitala po razlicitim modelima kapitalizacije što ukazuje na potrebu strogog poštovanja odabranog principa ukamaćivanja u svakom pojedinom problemu. Navedeni su neki primjeri iz hrvatskih udžbenika matematike u kojima se o tome ne vodi računa te se u jednom zadatku koriste oba principa. Ovakvi i slični zadaci mogu biti uzrok zbrci koju u glavi imaju učenici kada pokušavaju naučiti kamatni račun.*

Ključne riječi: *Jednostavno ukamaćivanje, složeno ukamaćivanje, model kapitalizacije*

Interest Calculus

Abstract. *The paper presents a simple methodological approach in the treatment of interest rate calculus based only on the two key formulas and understanding of the principles of simple and compound interest. It has been shown that the formulas for simple and compound interest determine the capital growth functions obtained by different capitalization models, indicating the need for compliance with the principles of compound chosen in each problem. Some examples from Croatian mathematical textbooks have been presented in which both principles are mixed in the same problem. Such exercises can confuse students when they learn the interest calculus.*

Key words: *Simple Interest, Compound Interest, Capitalization Model*

*Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-3100 Osijek, e-mail: `mirta@mathos.hr`

†Strojarska tehnička škola Osijek, Istarska 3, HR-31000 Osijek, e-mail: `grb1678@gmail.com`

1. Uvod

Dugogodišnja nastavna praksa svjedoči da usvajanje gradiva vezanog uz kamatni račun mnogim učenicima nije lako. Posljedica te činjenice je nedovoljno znanje iz tog područja koje imaju npr. službenici banaka sa završenom srednjom školom. Zbog toga ne čudi da je osamdesetih godina prošlog stoljeća došlo do zanimljive pojave u tadašnjim jugoslavenskim bankama da se sukcesivnim kvartalnim oročenim ulaganjem mogao ostvariti veći kapital nego jednokratnim godišnjim ulaganjem istog kapitala uz istu nominalnu godišnju kamatnu stopu iako banka potiče dugoročni oročeni ulog. Mnogi nastavnici koji su predavali kamatni račun u tom periodu u Hrvatskoj postali su svjesni da je potrebna promjena u metodološkom pristupu obradi kamatnog računa te su se u Hrvatskoj pojavili tekstovi koji pojašnjavaju suvremene pristupe financijskoj matematici (npr. [5], [6], [4], [1] i mnogi drugi).

U današnjim programima i udžbenicima za srednje ekonomske škole posvećuje se dosta pažnje kamatnom računu pa se detaljno obrađuje dekurzivno i anticipativno ukamaćivanje po principu jednostavne i složene kapitalizacije. Pri tome su principi kapitalizacije (jednostavan i složeni kamatni račun) najčešće odvojeni u posebna poglavlja (vidjeti npr. [3], [9], [8]). Za razliku od udžbenika srednjih ekonomskih škola, u udžbenicima za četverogodišnje strukovne/tehničke škole kao i u udžbenicima za gimnazije, kamatni račun se uglavnom pojavljuje u poglavlju koje obrađuje nizove ili u poglavlju o primjenama eksponencijalnih i logaritamskih funkcija. Pri tome se pojmovi jednostavnog i složenog dekurzivnog ukamaćivanja obrađuju kao primjeri za aritmetičke i geometrijske nizove, a tzv. kontinuirana kapitalizacija kao primjer primjene eksponencijalne funkcije (vidi npr. [2], [7]). Međutim, u oba pristupa kamatnom računu uočavamo metodološke probleme koji mogu uzrokovati probleme učenicima prilikom svladavanja gradiva iz kamatnog računa.

Ovaj članak nastao je u želji da se prezentira jednostavan metodološki pristup u obradi temelja kamatnog računa s naglaskom na dekurzivno ukamaćivanje. Najveći problem uobičajenih pristupa obradi kamatnog računa čine:

- veliki broj formula koje treba zapamtiti te
- miješanje principa jednostavnog i složenog ukamaćivanje.

Prema mišljenju autora ovog teksta, izbacivanjem detaljne obrade anticipativnog ukamaćivanja iz programa ekonomskih škola učenicima bi se omogućilo temeljitije svladavanje dekurzivnog ukamaćivanja bez bojazni da će biti uskraćeni za znanje potrebno u budućoj praksi. To bi bio prvi korak u smanjivanju broja formula koje treba pratiti prilikom rješavanja zadataka i prema oslobađanju vremena prijeko potrebnog za temeljito usvajanje teorije kamatnog računa potrebne u praksi.

Drugi korak koji bi trebao pomoći učenicima prilikom svladavanja temelja dekurzivnog kamatnog računa je pristup prezentiran u ovom članku. On se temelji na razumijevanju i primjeni osnovnih principa ukamaćivanja. Pri izvodu formula potrebnih za računanje konačne vrijednosti kapitala i kamate ovaj pristup prati istu logiku u oba principa ukamaćivanja te za svaki princip ukamaćivanja ističe samo jednu ključnu formulu koju je nužno pamtiti pri rješavanju zadataka.

Rad je strukturiran na sljedeći način. U prvom poglavlju opisani su i ilustrirani osnovni pojmovi koji se koriste u financijskoj praksi što će omogućiti svakom nastavniku matematike lako razumijevanje teksta bez obzira na to kakvu dosadašnju percepciju o pojmovima u kamatnom računu ima. U drugom poglavlju opisano je jednostavno ukamaćivanje i izvedena jedinstvena formula koja se u tu svrhu može koristiti. Složeno ukamaćivanje i jedinstvena formula za taj princip izvedeni su i ilustrirani u četvrtom poglavlju. U petom poglavlju pokazano je da izvedene formule za jednostavno i složeno ukamaćivanje određuju funkciju rasta kapitala po različitim modelima kapitalizacije. Ta činjenica ukazuje na potrebu strogog pridržavanja odabranom principu ukamaćivanja u svakom pojedinom problemu. U posljednjem poglavlju navedeni su samo neki primjeri iz hrvatskih udžbenika matematike u kojima se ne vodi računa o principima ukamaćivanja te se u jednom zadatku koriste oba principa. Ovakvi i slični zadaci mogu biti uzrok zbrci koju u glavi imaju učenici kada pokušavaju naučiti kamatni račun.

2. Osnovni pojmovi

Pod pojmom **kapitala** podrazumijevamo neko dobro, nekretninu, gotovinu novca, hipoteku, iznos zajma ili kredita... Ako vlasnik određeno vrijeme povjeri kapital na korištenje, onda ostvaruje dobit (kažemo da se kapital **kapitalizira**). Naknadu za korištenje kapitala nazivamo **kamata**. Kada je riječ o novcu, onda se kamata kao i dug plaća novcem. Pri tome iznos kamate logično mora ovisiti o vremenu i početnom iznosu kapitala. **Kamatni račun** služi nam da opišemo promjenu kapitala tijekom vremena uz zadane uvjete.

Period u kojem se vrši kapitalizacija zovemo **obračunsko razdoblje (t)**. Kapital koji ulazi u kapitalizaciju nazvat ćemo **početni kapital** (C_0), a kapital ostvaren kapitalizacijom na kraju obračunskog razdoblja **konačni kapital** (C_t). Iznos kamate na kraju obračunskog razdoblja će biti jednak razlici konačnog i početnog kapitala.

$$K_t = C_t - C_0$$

Prilikom ugovaranja uvjeta za davanje sredstava na korištenje mora se propisati:

a) **temeljni vremenski interval** za kapitalizaciju (τ)

b) **kamatna stopa** za temeljni vremenski interval $(\mathbf{p})$

Propisana kamatna stopa za temeljni vremenski interval naziva se **nominalna kamatna stopa**.

Primjer 1. *Odredimo osnovne veličine potrebne za izračun konačnog kapitala, ako početni iznos od* $10\,000,00\,kn$ *kapitaliziramo deset godina uz godišnju kamatnu stopu* $p{=}4$.
U konkretnim problemima svakako je vrlo bitno odrediti osnovne veličine. U ovom

primjeru početni kapital je $C_0 = 10\,000,00\,kn$*, obračunsko razdoblje* $t = 10\,god$*, a temeljni vremenski interval* $\tau = 1\,god$*. Nominalna (godišnja) kamatna stopa je* $p = 4$*.*

Primjer 2. *Odredimo osnovne veličine potrebne za izračun konačnog kapitala, ako početni iznos od* $10\,000,00\,kn$ *kapitaliziramo godinu dana uz mjesečnu kamatnu stopu p=2.5.*
Početni kapital je $C_0 = 10\,000,00\,kn$*, temeljni vremenski interval* $\tau = 1\,mjesec$*, a obračunsko razdoblje* $t = 1\,god = 12\,mjeseci$*. Nominalna (mjesečna) kamatna stopa je* $p = 2.5$*.*
Temeljni vremenski interval definira vremensku jedinicu koju treba koristiti prilikom rješavanja problema vezanih uz kamatni račun. Tako, npr., ako je nominalna kamatna stopa godišnja, svaki vremenski period u zadacima treba izražavati u godinama. Pri tome je uobičajeno uzeti da je $1\,dan = \frac{1}{365}\,godine$ ukoliko nije jasno definirano da je godina prijestupna. Također, za potrebe svladavanja gradiva iz kamatnog računa praktično je koristiti aproksimaciju $1\,mjesec = \frac{1}{12}\,godine$ koja se također često koristi u bankarskoj praksi.

Pretpostavka je da vlasnik kapitala s vremenom ostvaruje dobit. Međutim, nije jasno po kojem modelu se vrijednost kapitala uvećava. Mi ćemo se ograničiti na dva principa kapitalizacije:

- princip jednostavne kapitalizacije i
- princip složene kapitalizacije.

3. Princip jednostavne kapitalizacije

Princip jednostavne kapitalizacije podrazumijeva da se kamata za neki vremenski period obračunava samo na početni iznos kapitala, a ne i na kapital koji je ostvaren temeljem prispjelih kamata u proteklom vremenu kapitalizacije.

3.1. Vrijednost kapitala nakon prvih nekoliko temeljnih perioda

Pretpostavimo da je temeljni vremenski peiod $\tau = 1\,godina$, C_0 početni iznos kapitala u trenutku $t = 0$ i p nominalna (godišnja) kamatna stopa.
Nakon prve godine vrijednost kapitala iznosi

$$C_1 = C_0 + \frac{p}{100}C_0$$

$$C_1 = C_0(1 + \frac{p}{100}). \tag{1}$$

Nakon druge godine vrijednost kapitala bit će

$$C_2 = C_1 + \frac{p}{100}C_0.$$

Uvrštavanjem izraza za C_1 dobivamo:

$$C_2 = C_0(1 + 2\frac{p}{100}).$$

Analogno, nakon treće godine vrijednost kapitala iznosi:

$$C_3 = C_0(1 + 3\frac{p}{100}).$$

Uočimo da je niz C_0, C_1, C_2, C_3,... aritmetički. Prvi član ovog niza je C_0, a razlika niza je $d = \frac{p}{100}C_0$. Uvrštavanjem ovih podataka u formulu za opći član aritmetičkog niza dobivamo

$$C_n = C_0(1 + n\frac{p}{100}), \tag{2}$$

gdje je n broj godina, a C_n vrijednost kapitala nakon n godina. Vidimo da je iznos kamata nakon n godina

$$K_n = nC_0\frac{p}{100}.$$

3.2. Vrijednost kapitala na kraju dijela temeljnog perioda

Pretpostavimo da je temeljni vremenski period $\tau = 1\,godina$ i p nominalna kamatna stopa. Podijelimo temeljni vremenski period na m jednakih vremenskih podintervala. Postavlja se pitanje koliki je kapital ostvaren nakon k podintervala duljine $\frac{1}{m}$.
Rješavanju ovog problema pristupit ćemo poštujući princip jednostavnog ukamaćivanja. Najprije odredimo kamatnu stopu p_m koja se odnosi na period $\frac{1}{m}$.
Vrijednost kapitala nakon prvog vremenskog podintervala će biti

$$C_{\frac{1}{m}} = C_0 + C_0\frac{p_m}{100},$$

gdje je p_m kamatna stopa vezana uz vremensko razdoblje duljine $\frac{1}{m}$ ($m-ti$ dio godine). Ovako definiranu kamatnu stopu zovimo **ispodgodišnja kamatna stopa jednostavnog računa** ili **relativna kamatna stopa**.
Poštujući princip jednstavnog ukamaćivanja, vrijednost kapitala nakon drugog vremenskog podintervala iznosi

$$C_{\frac{2}{m}} = C_{\frac{1}{m}} + C_0\frac{p_m}{100},$$

što, uvrštavanjem izraza za $C_{\frac{1}{m}}$ daje

$$C_{\frac{2}{m}} = C_0 + 2C_0\frac{p_m}{100},$$

$$C_{\frac{2}{m}} = C_0(1 + 2\frac{p_m}{100}).$$

Analogno,

$$C_{\frac{3}{m}} = C_0(1 + 3\frac{p_m}{100}),$$

itd.

Vidimo da je niz C_0, $C_{\frac{1}{m}}$, $C_{\frac{2}{m}}$, $C_{\frac{3}{m}}$,... aritmetički. Prvi član ovog niza od $m+1$ članova je C_0, a razlika niza je $d = \frac{p_m}{100}C_0$.
Uvrštavanjem ovih podataka u formulu za opći član aritmetičkog niza dobivamo

$$C_{\frac{k}{m}} = C_0(1 + k\frac{p_m}{100}), \tag{3}$$

gdje je k broj podintervala duljine $\frac{1}{m}$. Dakle, da bismo izračunali vrijednost kapitala nakon k vremenskih intervala duljine $\frac{1}{m}$, moramo izračunati ispodgodišnju kamatnu stopu p_m.

Za $k = m$ imamo

$$C_{\frac{m}{m}} = C_0(1 + m\frac{p_m}{100}).$$

Već smo vidjeli da vrijednost kapitala nakon godinu dana iznosi

$$C_1 = C_0(1 + \frac{p}{100}).$$

Vrijednost kapitala u nekom trenutku ne smije ovisiti o tome koliko puta smo obračunavali kamate, pa mora vrijediti:

$$C_1 = C_{\frac{m}{m}}.$$

Odavde imamo

$$C_0(1 + \frac{p}{100}) = C_0(1 + m\frac{p_m}{100}),$$

odakle slijedi da je

$$p_m = \frac{p}{m}.$$

Uvrštavanjem u formulu (3) dobivamo

$$C_{\frac{k}{m}} = C_0(1 + \frac{k}{m}\frac{p}{100}), \quad k = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Primijetimo da se formule za obračunavanje vrijednosti kapitala za jedan temeljni period (1), za više temeljnih perioda (2) i za dio temeljnog perioda (4) mogu objediniti u jedinstvenu formulu za izračun konačnog kapitala C_t za bilo koje obračunsko razdoblje t.

$$\boxed{C_t = C_0(1 + t\frac{p}{100}), \qquad (5)}$$

gdje je C_0 početni kapital, p nominalna kamatna stopa i t **vrijeme kapitalizacije tj. obračunsko razdoblje.** Ovaj pristup omogućuje korištenje samo jedne formule (formula (5)) za izračun konačnog kapitala poštujući princip jednostavne kapitalizacije.

Primjer 3. *Početni kapital* $C_0 = 12\,350,00\,kn$ *uložen je u banku uz obračun jednostavnih dekurzivnih godišnjih kamata. Ako je godišnja kamatna stopa* $p = 15$*, kolika će biti vrijednost konačnog kapitala na kraju četvrte godine?*

Budući da je kamatna stopa godišnja, temeljni vremenski period će biti godina. To znači da vrijeme t moramo izraziti u godinama.
Imamo,

$$t = 4\,godine$$

$$C_4 = 12\,350(1 + 4 \cdot \frac{15}{100})$$

$$C_4 = 19\,760,00\,kn$$

Primjer 4. *Neka je* $15\,250,00\,kn$ *vrijednost početnog kapitala, a* $p = 12$ *godišnja kamatna stopa. Uz primjenu jednostavnog dekurzivnog ukamaćivanja treba izračunati vrijednost kapitala nakon* $19\,mjeseci$*?*

Kamatna stopa je godišnja pa je

$$t = \frac{19}{12}\,godina$$

$$C_{\frac{19}{12}} = 15\,250(1 + \frac{19}{12} \cdot \frac{12}{100})$$

$$C_{\frac{19}{12}} = 18\,147,50\,kn$$

Primjer 5. *Koliko iznose kamate na glavnicu od* $50\,000,00\,kn$ *posuđenu na razdoblje od* 30.01. *do* 16.06. *uz godišnju kamatnu stopu 6 i jednostavan dekurzivan obračun?* Kamatna stopa je godišnja pa je

$$t = \frac{137}{365}\,godina$$

$$C_{\frac{137}{365}} = 50\,000(1 + \frac{137}{365} \cdot \frac{6}{100})$$

$$C_{\frac{137}{365}} = 51\,126,03\,kn$$

$$K_{\frac{137}{365}} = C_{\frac{137}{365}} - C_0 = 1\,126,03\,kn$$

4. Princip složene kapitalizacije

Princip složene kapitalizacije podrazumijeva da se kamata za neki vremenski period obračunava na početnu vrijednost kapitala i na do tada prispjelu kamatu.

4.1. Vrijednost kapitala nakon prvih nekoliko temeljnih perioda

Pretpostavimo da je temeljni vremenski peiod $\tau = 1\,godina$, C_0 početni iznos kapitala u trenutku $t = 0$ i p nominalna (godišnja) kamatna stopa.
Nakon prve godine vrijednost kapitala iznosi

$$C_1 = C_0 + \frac{p}{100}C_0$$

$$C_1 = C_0(1 + \frac{p}{100}). \tag{6}$$

Izraz $1 + \frac{p}{100}$ označit ćemo r i nazvati **godišnji kamatni faktor**. Dakle,

$$r = 1 + \frac{p}{100}. \tag{7}$$

Nakon druge godine vrijednost kapitala bit će

$$C_2 = C_1 + \frac{p}{100}C_1,$$

$$C_2 = C_1(1 + \frac{p}{100}).$$

Uvrštavanjem izraza za C_1 dobivamo:

$$C_2 = C_0(1 + \frac{p}{100})^2 = C_0 r^2. \tag{8}$$

Analogno, nakon treće godine vrijednost kapitala iznosi:

$$C_3 = C_0(1 + \frac{p}{100})^3 = C_0 r^3.$$

Uočimo da je niz C_0, C_1, C_2, C_3,... geometrijski. Prvi član ovog niza C_0, a kvocijent niza je $q = 1 + \frac{p}{100}$. Uvrštavanjem ovih podataka u formulu za opći član geometrijskog niza dobivamo

$$C_n = C_0(1 + \frac{p}{100})^n. \tag{9}$$

Uvrštavanjem izraza za godišnji kamatni faktor u predhodni izraz dobivamo

$$C_n = C_0 r^n, \tag{10}$$

gdje je n broj godina, a C_n vrijednost kapitala nakon n godina.

4.2. Vrijednost kapitala na kraju dijela temeljnog perioda

Pretpostavimo da je temeljni vremenski period $\tau = 1\,godina$ i p nominalna kamatna stopa. Podijelimo temeljni vremenski period na m jednakih vremenskih podintervala. Postavlja se pitanje koliki je kapital ostvaren nakon k podintervala duljine $\frac{1}{m}$. Rješavanju ovog problema pristupit ćemo poštujući princip složenog ukamaćivanja. Najprije odredimo kamatnu stopu p_m koja se odnosi na period $\frac{1}{m}$. Kamatnu stopu

koja se odnosi na period $\frac{1}{m}$ ($m-ti$ dio godine), nazivamo **ispodgodišnja kamatna stopa složenog računa** ili **konformna kamatna stopa**.
Vrijednost kapitala nakon prvog vremenskog podintervala će biti

$$C_{\frac{1}{m}} = C_0 + C_0 \frac{p_m}{100}, \tag{11}$$

Izraz

$$r_m = 1 + \frac{p_m}{100}$$

nazvat ćemo **konformni kamatnjak**.
Formulu (11) sada možemo zapisati u obliku

$$C_{\frac{1}{m}} = C_0 r_m.$$

Poštujući princip složenog ukamaćivanja, vrijednost kapitala nakon drugog vremenskog podintervala iznosi

$$C_{\frac{2}{m}} = C_{\frac{1}{m}}(1 + \frac{p_m}{100}), \tag{12}$$

Uvrštavanjem izraza za $C_{\frac{1}{m}}$ u dobivenu formulu dobivamo

$$C_{\frac{2}{m}} = C_0(1 + \frac{p_m}{100})^2 = C_0 r_m^2.$$

Analogno,

$$C_{\frac{3}{m}} = C_0(1 + \frac{p_m}{100})^3 = C_0 r_m^3,$$

itd.
Vidimo da je niz C_0, $C_{\frac{1}{m}}$, $C_{\frac{2}{m}}$, $C_{\frac{3}{m}}$,... geometrijski. Prvi član ovog niza je C_0, a kvocijent niza je $q = 1 + \frac{p_m}{100}$.
Uvrštavanjem ovih podataka u formulu za opći član geometrijskog niza dobivamo

$$C_{\frac{k}{m}} = C_0(1 + \frac{p_m}{100})^k = C_0 r_m^k, \tag{13}$$

gdje je k broj podintervala duljine $\frac{1}{m}$. Dakle, da bismo izračunali vrijednost kapitala nakon k vremenskih intervala duljine $\frac{1}{m}$, moramo izračunati ispodgodišnju kamatnu stopu p_m.

Za $k = m$ imamo

$$C_{\frac{m}{m}} = C_0(1 + \frac{p_m}{100})^m = C_0 r_m^m.$$

Već smo vidjeli da vrijednost kapitala nakon godinu dana iznosi

$$C_1 = C_0(1 + \frac{p}{100}).$$

Vrijednost kapitala u nekom trenutku ne smije ovisiti o tome koliko puta smo obračunavali kamate, pa mora vrijediti:

$$C_1 = C_{\frac{m}{m}}.$$

Odavde imamo
$$C_0(1+\frac{p}{100}) = C_0(1+\frac{p_m}{100})^m,$$
odakle slijedi da je
$$p_m = 100(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1) \tag{14}$$
Objedinjujući formulu (13) i izraz za konformnu kamatnu stopu dobijemo formulu za konačnu vrijednost kapitala nakon k podintervala duljine $\frac{1}{m}$:
$$C_{\frac{k}{m}} = C_0 r^{\frac{k}{m}}. \tag{15}$$
Primijetimo da se formule za obračunavanje vrijednosti kapitala za jedan temeljni period (6), za više temeljnih perioda (9) i za dio temeljnog perioda (15) mogu objediniti u jedinstvenu formulu za izračun konačnog kapitala C_t za bilo koje obračunsko razdoblje t.

$$\boxed{C_t = C_0 r^t, \qquad (16)}$$

gdje je C_0 početni kapital, r kamatni faktor i t **vrijeme kapitalizacije tj. obračunsko razdoblje.** Ovaj pristup omogućuje korištenje samo jedne formule (formula (16)) za izračun konačnog kapitala poštujući princip složene kapitalizacije.

Primjer 6. *Početni kapital* $C_0 = 12\,350,00\,kn$ *uložen je u banku uz obračun složenih dekurzivnih godišnjih kamata. Ako je godišnja kamatna stopa* $p = 15$*, kolika će biti vrijednost konačnog kapitala na kraju četvrte godine?*
Budući da je $p = 15$ godišnja kamatna stopa, temeljni period je
$\tau = 1\,godina$, a obračunsko razdoblje je $t = 4\,godine$.

$$C_4 = 12\,350 \cdot 1.15^4$$
$$C_4 = 21\,600,23\,kn$$

Primjer 7. *Početni kapital* $C_0 = 25\,500,00\,kn$ *uložen je u banku uz obračun složenih dekurzivnih godišnjih kamata. Ako je godišnja kamatna stopa* $p = 6$*, kolika će biti vrijednost konačnog kapitala nakon 11 mjeseci?* Budući da je kamatna stopa godišnja, temeljni period će biti $\tau = 1\,godina$, pa vrijeme moramo izraziti u godinama tj. $t = \frac{11}{12}\,godina$.

$$C_{\frac{11}{12}} = 25\,500 \cdot 1.06^{\frac{11}{12}}$$
$$C_{\frac{11}{12}} = 26\,899,07\,kn$$

Primjer 8. *Kolika će biti vrijednost* $100\,000,00\,kn$ *nakon sto dana, ako je obračun složen, a godišnja kamatna stopa je 8.5?* Vrijeme mora biti prikazano u godinama jer je kamatna stopa godišnja, tj. $t = \frac{100}{365}\,godina$.

$$C_{\frac{100}{365}} = 100\,000 \cdot 1.085^{\frac{100}{365}}$$
$$C_{\frac{100}{365}} = 102\,260,23\,kn$$

5. Principi ukamaćivanja i kontinuirana kapitalizacija

Princip složenog ukamaćivanja i formula (16) odgovaraju modelu kontinuirane kapitalizacije po kojemu se vrijednost kapitala s vremenom povećava tako da je promjena kapitala proporcionalna trenutnoj vrijednosti kapitala. Naime, navedena pretpostavka može se zapisati u obliku diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{dC(t)}{dt} = k \cdot C(t),$$

gdje je k konstanta proporcionalnosti. Rješenje postavljene diferencijalne jednadžbe je eksponencijalna funkcija

$$C(t) = K \cdot e^{kt},$$

gdje je K konstanta koju možemo odrediti iz početnog uvjeta $C(0) = C_0$, što povlači da je $K = C_0$. Sada rješenje navedene diferencijalne jednadžbe poprima oblik:

$$C(t) = C_0 e^{kt}. \tag{17}$$

Smisao konstante e^k može se prepoznati ako iskoristimo pojmove temeljnog vremenskog perioda i nominalne kamatne stope p kao i do sada. Neka je $C(1)$ vrijednost kapitala na kraju jednog temeljnog vremenskog perioda. Po formuli (17) vrijedi

$$C(1) = C_0 e^k.$$

S druge strane,

$$C(1) = C_0(1 + \frac{p}{100}) = C_0 r.$$

Dakle, $e^k = r$ što znači da rješenje (17) možemo zapisati u obliku

$$C(t) = C_0 r^t,$$

što odgovara formuli (16).

Nasuprot tome, princip jednostavnog ukamaćivanja odgovara modelu kapitalizacije po kojemu se vrijednost kapitala s vremenom povećava tako da je promjena vrijednosti kapitala u vremenu konstantna, tj. diferencijalna jednadžba koja opisuje ovaj model je

$$\frac{dC(t)}{dt} = \kappa,$$

gdje je κ konstanta proporcionalnosti. Rješenje ove diferencijalne jednadžbe je

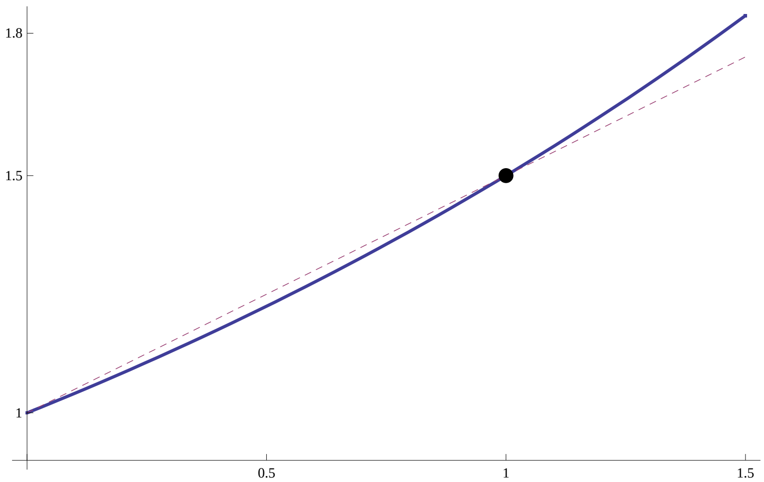
$$C(t) = const + \kappa t.$$

Korištenjem početnog uvjeta $C(0) = C_0$ vidimo da je

$$C(t) = C_0 + \kappa t,$$

pa je sada potrebno još odrediti smisao konstante κ. Ako ponovo upotrijebimo pojam temeljnog vremenskog perioda i nominalne kamatne stope p dobijemo da je

$$C(1) = C_0 + \kappa = C_0 + C_0 \frac{p}{100},$$



Slika 1: Promjena vrijednosti kapitala s vremenom po modelu jednostavnog ukamaćivanja (crtkana linija) i složenog ukamaćivanja (puna linija), uz nominalnu godišnju kamatnu stopu 50 i $C_0 = 1\,kn$.

što znači da je $\kappa = C_0 \frac{p}{100}$. Na ovaj način vidimo da ovakav model kapitalizacije odgovara jednostavnom ukamaćivanju te da vrijedi

$$C(t) = C_0(1 + t\frac{p}{100}),$$

kao što je i pokazano u izrazu (5).

Slikom 1 prikazan je porast vrijednosti kapitala po modelu jednostavnog ukamaćivanja (crtkana linija) i složenog ukamaćivanja (puna linija), uz nominalnu godišnju kamatnu stopu 50. Možemo uočiti da vrijednost kapitala sporije raste po modelu složenog ukamaćivanja do kraja prve godine. Nakon jedne godine, porast vrijednosti kapitala je bitno brži po modelu složenog ukamaćivanja nego po modelu jednostavnog ukamaćivanja.

6. Zbunjujući primjeri u udžbenicima

Navest ćemo samo nekoliko primjera iz udžbenika koji mogu zbuniti učenike prilikom svladavanja gradiva vezanih uz kamatni račun.

Primjer 9. *Udžbenik [7], primjer 40, strana 40.*
"Uložimo li u banku $G_0 = 10\,000\,kn$ uz godišnju kamatnu stopu od 12%, koliki ćemo iznos imati nakon jedne godine (t) ako se kamata upisuje:

a) godišnje,

b) mjesečno,

c) dnevno,

d) svaki sat.

a) $G = 10\,000(1 + 0.12)^t = 10\,000 \cdot 1.12 = 11\,200\,kn$,

b) $G = 10\,000(1 + \frac{0.12}{12})^{12} = 11\,268.25\,kn$,

c) $G = 10\,000(1 + \frac{0.12}{365})^{365} = 11\,274.75\,kn$,

d) Godina ima $365 \cdot 24\,h = 8760\,h$. *Dakle,*
$G = 10\,000(1 + \frac{0.12}{8760})^{8760} = 11\,274.95\,kn$."

U ovom primjeru nije jasno koji se princip ukamaćivanja koristi. Primijenjen je relativni kamatnjak koji odgovara jednostavnom ispodgodišnjem ukamaćivanju, a istovremeno se koristi princip složenog ukamaćivanja bez dodatnih obrazloženja.
U udžbenicima za srednje ekonomske škole također možemo naći slične izračune ali oni su popraćeni komentarom koji ukazuju na to da se tu radi o nepoštovanju principa složenog ukamaćivanja i uglavnom služe za ilustraciju potrebe za korištenjem konformne kamatne stope kod složenog ukamaćivanja, što ima svoje opravdanje u metodičkom smislu.

Sljedeći primjer, koji također ilustrira miješanje principa jednostavnog i složenog ukamaćivanja, prepisan je iz udžbenika [7] ali se sličan pristup kontinuiranom ukamaćivanju može naći u mnogo udžbenika na srednjoškolskom i visokoškolskom nivu.

Primjer 10. *Udžbenik [2], strana 124 do 125.*
"Ako se ukamaćivanje obavlja m puta godišnje, onda je iznos glavnice na kraju prvog razdoblja:

$$C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right),$$

na kraju drugog razdoblja:

$$C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^2,$$

a na kraju godine:

$$C_1 = C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m.$$

Produži li se razdoblje kroz više godina, na kraju n-te godine glavnica će iznositi:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm}.$$

....

Ako se ukamaćivanje obavlja svakog trenutka, tada će glavnica na kraju godine biti

$$C_1 = \lim_{m\to\infty} C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m = \ldots = C_0 e^{\frac{p}{100}},$$

a po isteku n godina:

$$C_n = \lim_{m\to\infty} C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm} = \ldots = C_0 e^{\frac{np}{100}}.$$

Očito, rok ne mora biti cijeli broj godina. U svakom trenutku t (koji se mjeri u godinama, ali ne mora biti cijeli broj) vrijednost glavnice bit će:

$$C_t = C_0 e^{\frac{pt}{100}}.\text{”}$$

Ovaj pristup u konačnici daje točnu formulu kontinuirane kapitalizacije po složenom principu ukamaćivanja ali dovodi učenike u sljedeću zabunu:

Koju formulu onda koristiti ako računamo vrijednost kapitala nakon npr. jednog dana:

$$C_{1/365} = C_0 \left(1 + \frac{p}{36500}\right)$$

ili

$$C_{1/365} = C_0 e^{\frac{p}{36500}}?$$

Rezultat definitivno nije isti!?

Literatura

[1] M. CRNJAC, D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika*, Ekonomski fakultet Osijek, 1994. (`http://www.mathos.hr/~jukicd/Matematika_CJS.pdf`)

[2] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika 4, 1. dio, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred tehničkih škola*, Element, Zagreb, 2008.

[3] L. NERALIĆ, B. RELIĆ, *Matematika za III. razred ekonomskih škola, udžbenik i zbirka zadataka*, Neodidacta d.o.o., Zagreb, 1996.

[4] D. FRANCIŠKOVIĆ, *Generalizacija kontinuiranog ukamaćivanja i strategije otplate duga*, Ekonomska analiza, **24**(1990), 179–198

[5] R. SCITOVSKI, M. ŠILAC, D. FRANCIŠKOVIĆ, *Suvremeni pristup financijskoj matematici*, Privreda, **33**(1989).

[6] R. SCITOVSKI, B. DUKIĆ, D. JUKIĆ, D. FRANCIŠKOVIĆ, M. ŠILAC-BENŠIĆ, *Strategije otplate zajma*, Financijska praksa, **1**(1994), 15–26.

[7] LJ. KELAVA-RAČIĆ, Z. ŠIKIĆ, *Matematika 2, II. dio, udžbenik za 2. razred četverogodišnje strukovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2005.

[8] B. ŠEGO, *Matematika za III. razred ekonomskih škola, udžbenik i zbirka zadataka*, Neodidacta d.o.o., Zagreb, 1997.

[9] K. ŠORIĆ, *Matemtika 3, 1. dio, Udžbenik sa zbirkom zadataka za 3. razred srednjih ekonomskih škola*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.