Tri klasična problema

Dragana Jankov*, Ivan Papić†

Sažetak. *U ovom su radu opisana tri klasična problema: kvadratura kruga, duplikacija kocke i trisekcija kuta, koji potječu još iz vremena antičke Grčke. Stari su Grci zahtijevali konstrukcije isključivo ravnalom i šestarom, što je dovelo do nemogućnosti rješenja navedenih problema, a u radu su opisane i neke od metoda rješavanja pomoću raznih drugih pomagala.*

Ključne riječi: *tri klasična problema, kvadratura kruga, duplikacija kocke, trisekcija kuta*

The three classical problems

Sažetak. *In this paper, three classical mathematical problems are described: squaring the circle, doubling the cube and trisection of an angle, which date from the time of Ancient Greece. The ancient Greeks demanded constructions only with ruler and compass, which led to the impossibility of a solution of these problems, and we have described some of the solving methods which include also some other tools.*

Key words: three classical problems, squaring the circle, doubling the cube, trisection of an angle

1. Povijest problema

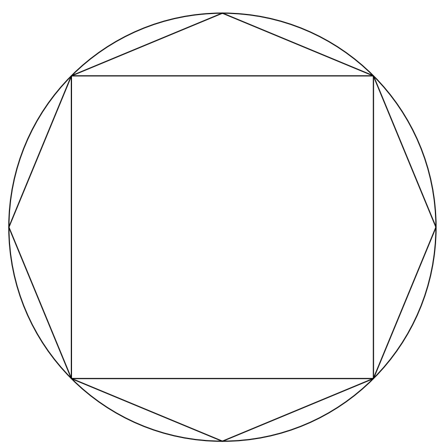
Geometrijske konstrukcije predstavljale su značajan dio matematike starih Grka. Oni su konstrukcije vršili isključivo ravnalom i šestarom, pri čemu su ravnalo koristili za spajanje dviju točaka, a šestar za crtanje kružnica, kojima su unaprijed poznati središte i radijus. Akademija koja je postavila takva pravila, bila je Platonova akademija, koja je djelovala od 387. godine prije nove ere, do 529. godine nove ere. Navedeni pristup geometrijskim konstrukcijama doveo je do niza matematičkih problema, među kojima su najpoznatija tri: kvadratura kruga, duplikacija kocke i trisekcija kuta. Važno je napomenuti da su pokušaji rješavanja tih problema doveli do velikog razvoja tadašnje matematike.

*asistent na Odjelu za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek `djankov@mathos.hr`

†student na Odjelu za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek `ipapic@mathos.hr`

2. Kvadratura kruga

Kvadratura kruga predstavlja problem konstruiranja kvadrata čija je površina jednaka površini danog kruga. Ovim se problemom prvi bavio Anaksagora iz Klazomene, dok se on prvi put, u pisanom obliku, spominje u djelu *Ptice*, grčkog matematičara Aristofana, 414. godine prije nove ere. Nakon njih problem je promatrao Antifont [2], u 5. stoljeću prije nove ere. On je tražio površinu kruga na način da je najprije u krug upisao kvadrat, te je zatim iznad svake stranice konstruirao jednakokračne trokute i na takav način dobio upisani osmerokut (vidi Sliku 1). Ponavljajući isti postupak dobio je mnogokute s vrlo velikim brojem stranica. Antifont je uočio da se takvim pristupom sve više približava stvarnoj površini kruga, no kako poklonici Platonove akademije nisu prihvaćali pojam beskonačnosti, kakav mi danas poznajemo, Antifontov postupak nije mogao dovesti do konačnog rješenja. Opisana metoda naziva se *metodom iscrpljenja* ili *ekshaustije*.

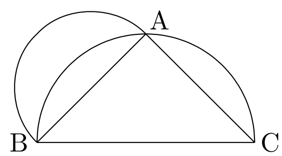


Slika 1: Antifontovo ,,rješenje" kvadrature kruga

Antifontove ideje koristio je i Brison, nešto kasnije u 5. stoljeću prije nove ere, te je donio zaključke na osnovu postupka u kome je upisao kvadrat u krug, te je zatim opisao i drugi kvadrat oko kruga i promatrao kvadrat između njih (za kojega se ne zna kako je tekla konstrukcija) za koga je zaključio da je po površini jednak zadanom krugu. Njegov je zaključak bio pogrešan. Problem kvadrature kruga zainteresirao je i Hipokrata s Hiosa, koji je bio jedan od najpoznatijih geometara u 5. stoljeću prije nove ere. Hipokrat se bavio kvadraturom likova u obliku polumjeseca, poznatih kao *lunule*[1] (vidi Sliku 2), odnosno *Hipokratovi mjeseci*. Takvim pristupom rješiv je i problem kvadrature lunule jednakokračnim pravokutnim trokutom, odnosno on je pokazao da je površina

[1]Figura omeđena s dva kružna luka

zadanog trokuta jednaka dvostrukoj površini lunule. Na isti način Hipo-



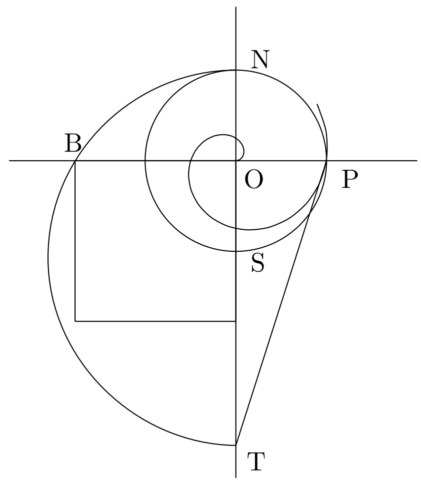
Slika 2: Lunula -Hipokratov mjesec

krat je pokušao riješiti problem kvadrature kruga, no njegovo je rješenje opovrgnuto. Hipija iz Elide je oko 420. godine prije nove ere otkrio krivulju, koju je Leibnitz kasnije nazvao *kvadratisa*, a koja je poslužila pri rješavanju problema kvadrature kruga, najprije Dinostratu, a zatim i ostalima. Nažalost, konstrukcija je zahtijevala više od uporabe ravnala i šestara.

Arhimed, sa Sirakuze na Siciliji, koji je živio u 3. stoljeću prije nove ere, u djelu *O Spiralama* opisao je spiralu koja je danas poznata kao *Arhimedova spirala.* On navodi sljedeću definiciju: *Ako se polupravac s fiksnom početnom točkom rotira jednolikom brzinom u ravnini, dok se ne vrati u početni položaj, te ako se u isto vrijeme dok se polupravac rotira, točka kreće jednolikom brzinom duž polupravca, polazeći od fiksne točke, time opisuje spiralu u ravnini.* Iz definicije se vidi kako je Arhimedova konstrukcija spirale zapravo mehanička. Jezikom suvremene matematike Arhimedovu spiralu bi mogli definirali kao:

- u polarnim koordinatama: $r = a\varphi,\ \ a \neq 0,\ \ \varphi \geq 0$
- u kartezijevim koordinatama: $x^2 + y^2 = a^2 \mathrm{arctg}^2 \frac{y}{x}$.

Nadalje, Arhimed je u djelu *Mjerenje kruga*, dokazao je da je površina kruga jednaka površini pravokutnog trokuta čije su katete jednake polumjeru i opsegu kruga. Primjenjujući taj zaključak, promatrao je problem kvadrature kruga na sljedeći način: najprije je konstruirao jedinični krug sa središtem u točki O (vidi Sliku 3), a zatim u njemu spiralu (na gore opisan način, gdje je O fiksna točka), koja kada izvrši jedan puni okretaj siječe dani krug u točki P. Nakon toga, konstruirao je normalu u točki O, na pravac OP, te njen presjek s kružnicom označio s N. Nadalje, ukoliko pretpostavimo da je u točki P povučena tangenta na spiralu, te njen presjek sa spomenutom normalom, označimo s T, prema Arhimedovim razmatranjima navedenim u djelima *Mjerenje kruga* i *O Spiralama* vrijedi da je $|OT| = \pi$. Dakle, možemo zaključiti da je Arhimedova konstrukcija tekla na sljedeći način: najprije je prislonio ravnalo na spiralu, dok dodirna točka nije bila P, te je potom sjecište te tangente s normalom označio s T. Nakon toga, Arhimed je polovište dužine $\overline{NT}$ označio sa S, te je opisao krug $k(S, |ST|)$ kako bi dobio korijen iz π, jer je $|OT| \cdot |ON| = |OB|^2$. Naposljetku je sa dobivenom stranicom konstruirao kvadrat jednake površine kao i krug. Važno je napomenuti da



Slika 3: Arhimedovo „rješenje" kvadrature kruga

ovim postupkom Arhimed nije dao rješenje problema *kvadrature kruga*, jer je jasno da spiralu nije moguće konstruirati isključivo ravnalom i šestarom. Arhimed je također, u već spomenutom djelu *Mjerenje kruga*, posebno promatrao aproksimacije broja π, te je došao do nejednakosti

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}\,,$$

a nešto kasnije dao je i donju granicu za π u obliku $211875 : 67441$, te gornju kao odnos $197888 : 62351$. Kako znamo, navedena donja granica veća je od prave vrijednosti broja π, pa se njegov zaključak pokazao netočnim. Tek je 480. godine nove ere Zu Chongzhi dobio znatno bolje ocjene za broj π:

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

Popularnost problema *kvadrature kruga* dovela je do velikog broja netočnih rješenja, te je Pariška Akademija 1775. donijela odluku da više neće pregledavati radove na tu temu, čime je taj problem svrstan u kategoriju rješavanja problema *perpetuum mobile*. Napokon, Carl Louis Ferdinand von Lindemann postao je slavan svojim dokazom iz 1882. da je broj π transcedentan, odnosno da ga nije moguće konstruirati ravnalom i šestarom, te je ovim rezultatom dokazana nemogućnost konstrukcije kvadrature kruga, na način na koji su to zahtijevali stari Grci. Lindemann je svoj rad objavio iste godine u članku *Über die Zahl* π.

3. Duplikacija kocke

Duplikacija kocke je problem konstruiranja kocke čiji je volumen dvostruko veći od volumena zadane kocke. Ovaj se problem ponekad naziva i *Delijski problem*, jer potječe od legende koja kaže da je u Ateni oko 430. godine prije nove ere harala kuga, te su stoga Atenjani, tražeći pomoć, otišli u poznato Delfijsko proročište u Delosu. Tamo su dobili odgovor da će pobijediti kugu ako uspiju udvostručiti oltar Apolonu, koji je bio u obliku kocke. Naivno se primivši problema, Atenjani su udvostručili svaku stranicu kocke, koja je predstavljala oltar, te su tako dobili oltar osam puta većeg volumena od polaznog. Kuga je nastavila harati gradom, budući da nisu ispunili zahtjev proročanstva. Ovu legendu zapisao je Teon iz Smirne. O ovom problemu postoji i druga legenda, zapisana od strane Eutociusa, u komentaru Arhimedova djela *O kugli i valjku*, koja kaže da je kralj Minos imao želju udvostručiti grob pjesnika Glaukusa, koji je bio kockastog oblika.

Ukoliko dani problem promatramo na algebarski način, te duljinu stranice zadane kocke označimo s a, problem se svodi na rješavanje jednadžbe $x = \sqrt[3]{2}a$, što je duljina stranice tražene kocke. Bez smanjenja općenitosti dovoljno je promatrati problem duplikacije kocke stranice jedinične duljine, te tada ostaje problem konstrukcije $\sqrt[3]{2}$. Dobro je poznato da je $\sqrt[3]{2}$ iracionalan broj koji nije moguće konstruirati ravnalom i šestarom.

Pokušavajući riješiti problem duplikacije kocke, neki su matematičari došli do približnog rješenja, a smatra se da je Hipokrat s Hiosa bio prvi među njima. On je došao do zaključka da je duplikacija kocke, zadane duljine stranice a, moguća ako je moguće konstruirati srednje geometrijske proporcionale između a i $2a$. Poznato je da su srednje geometrijske proporcionale između proizvoljno zadanih dužina a i b zapravo dužine x i y za koje vrijedi

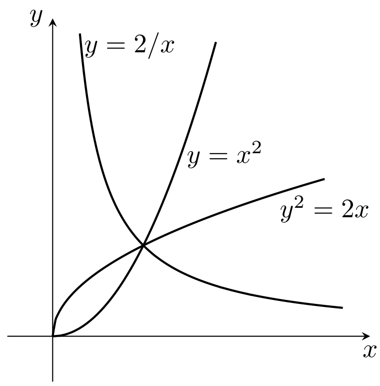
$$a : x = x : y = y : b\,. \tag{1}$$

Kako je u našem slučaju $b = 2a$, iz prethodnih je jednakosti lako dobiti da je $x = a\sqrt[3]{2}$, što je ujedno duljina stranice tražene kocke, dvostruko veće po volumenu od zadane. Nakon Hipokrata, određivanje srednjih geometrijskih proporcionala između a i $2a$, postalo je glavna vodilja pri rješavanju problema duplikacije kocke. Tako je Arhita iz Tarenta, koji je živio u 4. stoljeću prije nove ere, tražene srednje geometrijske proporcionale odredio pomoću presjeka valjka, stošca i torusa [1, str. 40] i zapisao da su one jednake $\sqrt{x^2 + y^2}$ i $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Eudoksov učenik Menehmo također je krenuo od jednakosti (1), te je rješavajući problem otkrio konike, odnosno elipsu, hiperbolu i parabolu, kao presjeke stošca s ravninama koje nisu paralelne bazi. Iz jednakosti (1) direktno slijedi da je

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx, \quad xy = ab\,, \tag{2}$$

od kojih prve dvije jednakosti predstavljaju jednadžbe parabola, a zadnja jednadžbu hiperbole. Kako je ranije opisano da se problem duplikacije kocke svodi na konstrukciju $\sqrt[3]{2}$, dovoljno je promotriti specijalan slučaj kada je $a = 1$ i $b = 2$. Tada niz jednakosti (2) postaje

$$x^2 = y, \quad y^2 = 2x, \quad xy = 2\,, \tag{3}$$



Slika 4: Menehmovo ,,rješenje" duplikacije kocke

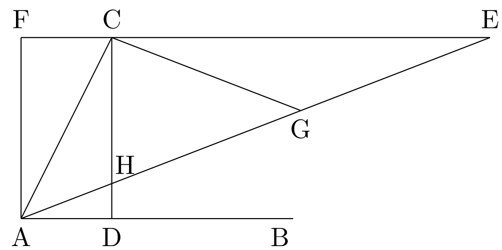
što grafički možemo prikazati kao na Slici 4. Presjek danih krivulja (3) je točka s x-koordinatom $\sqrt[3]{2}$, što je ujedno i rješenje problema. Nažalost, u 4. stoljeću prije nove ere, kada je Menehmo predložio svoje rješenje problema, nije bilo poznato kako konstruirati potrebne konike. Isto tako, niti danas nije moguće konstruirati iste isključivo koristeći ravnalo i šestar.

Godine 1637. Decartes je naslutio da je ovaj problem nerješiv pomoću ravnala i šestara, što je i dokazao P. L. Wantzel 1837. godine.

4. Trisekcija kuta

Trisekcija kuta je problem konstruktivnog nalaženja trećine zadanog kuta, a potječe još iz 4. stoljeća prije nove ere. Zanimljivo je da su Grci uočili ovaj problem pri gradnji svojih hramova, spomenika, te ornamenata, čije se ukrašavanje svodilo na trisekciju određenih kutova. Bitno je napomenuti da se ovaj problem razlikuje od prethodnih, jer ga je moguće riješiti u specijalnim slučajevima (npr. kutovi od 27°, 45°, 90°). Isto tako, problem je moguće riješiti i za određene kutove, koje nije moguće konstruirati ravnalom i šestarom, kao što je kut od $3\pi/7$, što je pokazao Honsberger 1991. [4]. Lako se pokaže da se problem trisekcije kuta svodi isključivo na trisekciju šiljastih kutova, budući da se svaki kut veći od pravoga može zapisati kao suma pravih kutova i jednog šiljastog kuta. Mnogi su matematičari predložili svoja rješenja ovog problema, no mi ćemo navesti dva najzanimljivija od kojih niti jedno nije izvedivo isključivo ravnalom i šestarom.

Oko 4. stoljeća prije nove ere, rješavanjem problema trisekcije kuta bavio se i Hipokrat, koji je dao mehaničko rješenje ovog problema, koje nije izvedivo isključivo ravnalom i šestarom, a sastoji se u sljedećem: Neka je dan kut CAB, te je iz vrha C povučena okomica na pravac AB, koji u D siječe AB. Slično se konstruira i pravac, okomit na AB, kroz točku A, te se lako dobije pravokutnik $ADCF$ (vidi Sliku 5). Pravac



Slika 5: Hipokratovo „rješenje” trisekcije kuta

FC se produlji do točke E, tako da bude $|HE| = 2|AC|$, pri čemu je H sjecište od AE i CD. Tada dobivamo da je kut EAB jednak trećini kuta CAB.

Napomena. Neka je G polovište dužine $\overline{HE}$. Tada Hipokratovu tvrdnju možemo dokazati na sljedeći način: Neka je $\angle EAB = \alpha$ i $\angle EAC = \beta$. Treba pokazati da je $\angle EAB = \frac{1}{3}\angle CAB$, odnosno $2\alpha = \beta$ (jer je $3\alpha = \alpha + \beta$). Imamo da je

$$2|AC| = |HE|, \tag{4}$$

te kako je G polovište dužine $\overline{HE}$, vrijedi $|HG| = |GE|$. Nadalje, kako je trokut HCE pravokutan, slijedi da je G središte kružnice opisane tom trokutu, te vrijedi

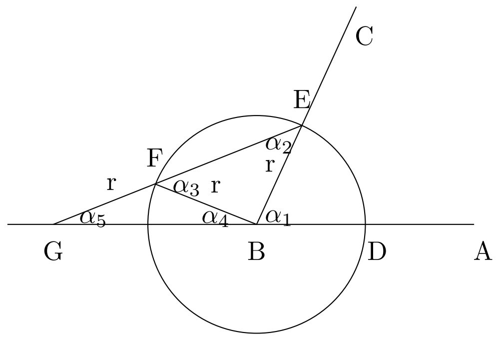
$$|HG| = |GE| = |CG|,$$

odnosno i

$$|HE| = 2|HG| = 2|GE| = 2|CG|. \tag{5}$$

Sada, iz (4) i (5) slijedi da je $|AC| = |CG|$, te i $\angle CGA = \beta$, $\angle ECG = \alpha$. Napokon, iz $\angle EGC = 180° - \beta = 180° - 2\alpha$, slijedi da je $2\alpha = \beta$.

Nešto elegantnije rješenje dao je Arhimed, u 2. stoljeću prije nove ere. On je konstrukciju proveo uz pomoć ravnala i šestara, pri čemu je na ravnalo dozvoljeno ucrtavanje dužina, što prelazi izvan okvira dozvoljenih konstrukcija. Opišimo ukratko njegov pristup problemu: Neka je dan proizvoljan šiljasti kut ABC (vidi Sliku 6), te mu oko vrha B opišemo kružnicu proizvoljnog polumjera r. Presjek kružnice s krakovima danog kuta označimo s D i E. Na ravnalo nanesemo duljinu polumjera r, te je označimo s $\overline{FG}$ i postavimo ravnalo kroz točku E, tako da su točke F, G i E kolinearne, točka F se nalazi na kružnici, a G na pravcu AB. Time dobivamo kut AGE koji je jednak trećini danog kuta ABC. Tu tvrdnju možemo i dokazati, uz oznake kao na Slici 6. Treba pokazati da je $3\alpha_5 = \alpha_1$. Iz svojstava vanjskog kuta trokutova GBE i FGB slijedi



Slika 6: Arhimedovo „rješenje" trisekcije kuta

da je

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_5 \tag{6}$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 + \alpha_5. \tag{7}$$

Nadalje, kako je trokut GBF jednakokračan, imamo da je

$$\alpha_4 = \alpha_5. \tag{8}$$

Iz jednakosti (7) i (8) slijedi da je

$$\alpha_3 = 2\alpha_5\,. \tag{9}$$

Budući da je trokut EFB jednakokračan, imamo da je

$$\alpha_2 = \alpha_3. \tag{10}$$

Koristeći (6), (9) i (10) slijedi niz jednakosti

$$\alpha_1 = \alpha_3 + \alpha_5 = 2\alpha_5 + \alpha_5 = 3\alpha_5\,.$$

□

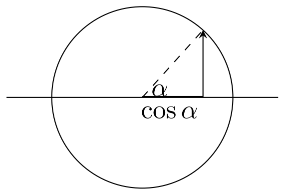
Važno je napomenuti da se Hipijine kvadratise, već spomenute u prethodnom poglavlju također mogu koristiti i za rješavanje problema trisekcije kuta [1, str. 47.]. P. L. Wanzel je pored nemogućnosti rješenja problema duplikacije kocke, iste godine pokazao i nemogućnost rješenja trisekcije kuta.

S trigonometrijskog aspekta problem konstrukcije danog kuta ekvivalentan je konstrukciji njegovog kosinusa (vidi Sliku 7). Primijenimo li trigonometrijski identitet

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,,$$

s obzirom da je $\cos 3\alpha$ zadan (budući da je 3α kut koji dijelimo) uz oznake $\cos 3\alpha = a$ i $\cos\alpha = x$ možemo uočiti da se problem trisekcije kuta α svodi na rješavanje kubne jednadžbe

$$4x^3 - 3x - a = 0\,. \tag{11}$$



Slika 7: Trisekcija kuta s trigonometrijskog aspekta

Racionalna rješenja prethodne jednadžbe možemo odrediti koristeći sljedeći teorem (vidi [3, str. 88]):

Teorem 1. *Ako je racionalni broj* $\frac{p}{q}$ *korijen jednadžbe*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\,, \qquad a_n \neq 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, a p *i* q *su relativno prosti, onda je* p *djelitelj slobodnog člana* a_0 *i* q *djelitelj vodećeg koeficijenta* a_n*.*

Važno je napomenuti da ukoliko realan broj x možemo izraziti pomoću četiri osnovne računske operacije i kvadratnog korijena, odmah imamo i ekvivalentnu tvrdnju da dužinu x možemo konstruirati pomoću ravnala i šestara. Isto tako, poznata nam je i sljedeća tvrdnja: *Ukoliko realan broj koji se može izraziti pomoću četiri osnovne računske operacije i kvadratnog korijena zadovoljava kubnu jednadžbu s racionalnim koeficijentima, onda ta jednadžba ima bar jedno racionalno rješenje* (vidi [1, str. 51]).

Primjer. Neka je $3\alpha = 60°$. Iz jednadžbe (11) dobivamo

$$8x^3 - 6x - 1 = 0\,.$$

Prema Teoremu 1 jedini kandidati za racionalna rješenja prethodne jednadžbe su ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{8}$. Lako se provjeri da niti jedno od njih ne zadovoljava danu jednadžbu, te se njezina rješenja, prema prethodnoj tvrdnji, ne mogu konstruirati ravnalom i šestarom.

Literatura

[1] F. M. Brückler, *Povijest matematike 1*, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2007.

[2] Ž. Dadić, *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[3] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[4] E. W. Weisstein, *Angle Trisection*, from MathWorld–A Wolfram Web Resource.
`http://mathworld.wolfram.com/AngleTrisection.html`