STUDENTSKA RUBRIKA

# Razni načini zadavanja ravnine u prostoru *

PETRA CORN IVANA KUZMANOVIĆ †

**Sažetak**. *Ravnina u prostoru može se jednoznačno odrediti pomoću normale na nju i jedne točke koja joj pripada. U ovom članku bit će pokazano jednoznačno zadavanje ravnine pomoću točaka i vektora u njoj, što se u konačnici može svesti na zadavanje točkom i normalom.*

**Ključne riječi:** *ravnina, jednadžba ravnine, zadavanje ravnine*

**Various ways of defining a plane in space**

**Sažetak**. *A plane in the space is uniquely defined by a normal vector and one point in it. In this paper we will show how the plane can be uniquely defined using points and vectors in it in the way which can be reduced to defining plane by a normal vector and one point.*

**Key words:** plane, equation of plane, defining plane

## 1. Zadavanje ravnine točkom i normalom

### 1.1. Ravnina koja prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava jednoznačno je određena svojom normalom

Neka je $M_0$ ravnina koja prolazi ishodištem $O$ koodinatnog sustava u prostoru i neka je $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektor okomit na ravninu $M_0$, koji zovemo normala na ravninu (vidi Sliku 1a).

Tada točka $P = (x, y, z)$ pripada ravnini $M_0$ ako i samo ako je vektor $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ okomit na normalu $\vec{n}$, tj. ako i samo ako je $\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n} = 0$. Drugim riječima, točka $P$ pripada ravnini $M_0$ koja prolazi kroz ishodište ako i samo ako je

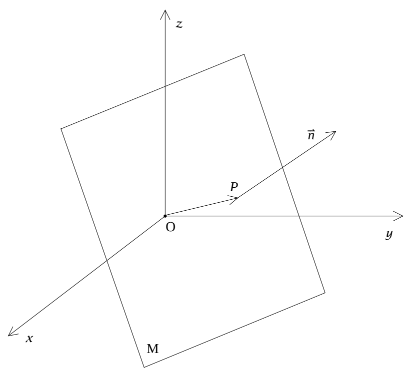
$$Ax + By + Cz = 0. \tag{1}$$

Jednadžba (1) je opća jednadžba ravnine kroz ishodište.

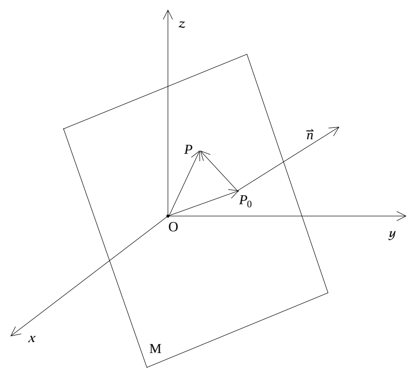
Nadalje želimo napraviti korak dalje, odnosno jednoznačno odrediti ravninu $M$ koja ne prolazi kroz ishodište. Kako postoji beskonačno

*Ovaj članak proširenje je domaće zadaće iz kolegija Geometrija ravnine i prostora na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku

†Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, `pcorn@mathos.hr`, `ikuzmano@mathos.hr`




(a) Ravnina kroz $O$




(b) Ravnina kroz $P_0$

Slika 1: Zadavanje ravnine točkom i normalom

mnogo ravnina okomitih na dani vektor, proizvoljnu ravninu ne možemo jednoznačno odrediti samo normalom nego je potrebno znati još neki objekt koji određuje tu ravninu. Najelementarniji slučaj je zadavanje točke koja pripada toj ravnini.

## 1.2. Svaka ravnina u prostoru jednoznačno je određena jednom svojom točkom i normalom

Neka je $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ dana točka u ravnini i $\vec{n}$ normala na tu ravninu (vidi Sliku 1b). Tada za proizvoljnu točku $P = (x, y, z) \in M$ vektor $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$ pripada ravnini $M$ pa je okomit na normalu $\vec{n}$. Zato skalarni produkt $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}$ iščezava, odnosno vrijedi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2}$$

Označimo li $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, jednadžba (2) prelazi u oblik

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

koji nazivamo opća jednadžba ravnine zadane točkom $P_0$ i normalom $\vec{n}$.

**Primjedba 1.** *Primjetimo da smo jednadžbu (2) mogli lako dobiti i iz jednadžbe (1) jer se ravnina $M$ kroz točku $P_0$ može dobiti translacijom ravnine $M_0$ za vektor $\overrightarrow{OP_0}$ s istom normalom ali koja prolazi kroz ishodište pa je $P \in M$ ako i samo ako je $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in M_O$, što izravno iz* (1) *daje (2).*

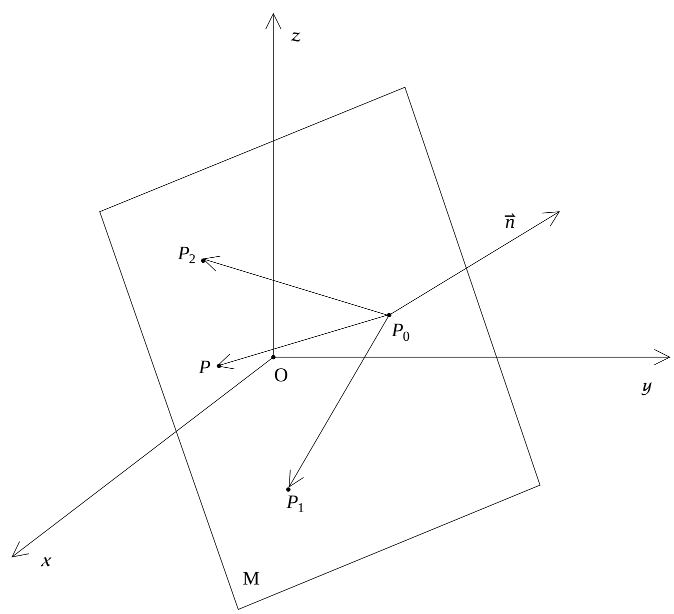
**Primjer 1.** *Odredimo jednadžbu ravnine zadane normalom $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i točkom $P_0 = (-1, 1, 2)$.*

*Rješenje*: Izravnim uvrštavanjem u jednadžbu (2), dobivamo $2x + y - z + 3 = 0$.

## 2. Drugi načini zadavanja ravnine

### 2.1. Svaka ravnina u prostoru jednoznačno je određena s tri nekolinearne točke koje leže na njoj

Neka su $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tri nekolinearne točke koje leže u ravnini $M$ (vidi sliku 2). Tada i vektori $\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1-x_0)\vec{i}+(y_1-y_0)\vec{j}+(z_1-z_0)\vec{k}$ i $\overrightarrow{P_0P_2} = (x_2-x_0)\vec{i}+(y_2-y_0)\vec{j}+(z_2-z_0)\vec{k}$ pripadaju ravnini.




Slika 2: Zadavanje ravnine s tri nekolinearne točke

Normala na ravninu $M$ okomita je na sve vektore u ravnini $M$ pa onda specijalno i na vektore $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$. Kako je vektorski produkt dvaju vektora upravo vektor koji je okomit na njih, slijedi da normala mora biti kolinearna s vektorskim produktom $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$. Vektor kolinearan s normalom ravnine također je normala iste ravnine pa možemo uzeti $\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$. Dobivamo

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k},$$

gdje je

$$\begin{aligned} A &= (y_1 - y_0)(z_2 - z_0) - (z_1 - z_0)(y_2 - y_0), \\ B &= -(x_1 - x_0)(z_2 - z_0) + (z_1 - z_0)(x_2 - x_0), \\ C &= (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0). \end{aligned}$$

Tako smo dobili normalu na ravninu i točku u ravnini (npr. $P_0$) koji jednoznačno određuju ravninu pa slijedi da je ravnina jednoznačno određena i s tri nekolinearne točke.

**Primjer 2.** *Odredimo jednadžbu ravnine u kojoj leže točke* $P_0 = (-1, 1, 2)$, $P_1 = (1, -1, 4)$ *i* $P_2 = (0, 1, 4)$.

*Rješenje*: Normala na ravninu dobije se kao $\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$, gdje je $\overrightarrow{P_0P_1} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\overrightarrow{P_0P_2} = \vec{i} + 2\vec{k}$, pa je

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

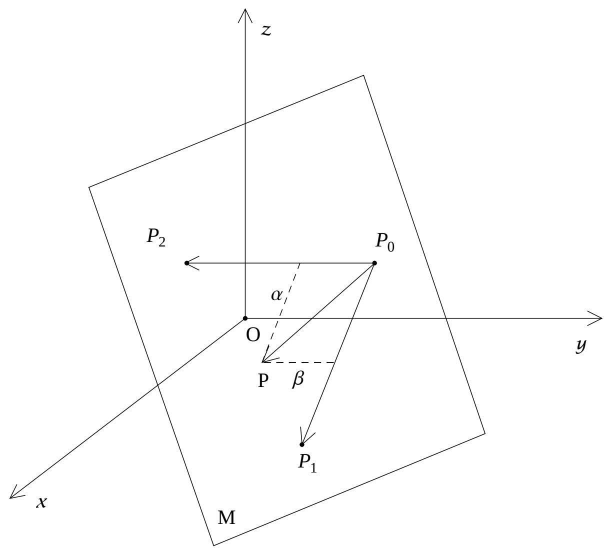
Uvrštavajući u jednadžbu (2) dobivamo jednadžbu ravnine $M$ kao $2x + y - z + 3 = 0$.

**Primjedba 2.** *Zadavanje ravnine pomoću tri točke mogli smo promatrati i na drugi način. Neka su* $P_0, P_1, P_2 \in M$ *tri nekolinearne točke. Kako su svaka tri vektora u ravnini linearno zavisna, tada je* $P \in M$ *ako i samo ako su vektori* $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$ *i* $\overrightarrow{P_0P}$ *linearno zavisni, tj.* $\overrightarrow{P_0P} = \alpha\overrightarrow{P_0P_1} + \beta\overrightarrow{P_0P_2}$ *(vidi Sliku 3). Iz prethodne jednakosti također je moguće dobiti jednadžbu* (2).

**Zadatak 1.** *Neka su* $P_0, P_1, P_2 \in M$ *tri nekolinearne točke. Iz uvjeta* $\overrightarrow{P_0P} = \alpha\overrightarrow{P_0P_1} + \beta\overrightarrow{P_0P_2}$ *(vidi Primjedbu 2) izvedite opću jednadžbu ravnine.*

## 2.2. Svaka ravnina u prostoru jednoznačno je određena s dvije različite točke i vektorom u toj ravnini koji je nekolinearan s vektorom kojeg određuju te dvije točke

Neka su $P_0 = (x_0, y_0, z_0), P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in M$ točke i $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \in M$ vektor u ravnini $M$ (vidi Sliku 4). Tada u ravnini $M$ možemo definirati i vektor $\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{k}$. Znamo da je ravnina jednoznačno određena točkom i normalom. Kako nam je zadana točka iz ravnine (npr. $P_0$), potrebno je provjeriti možemo li




Slika 3: Zadavanje ravnine s tri nekolinearne točke

jednoznačno odrediti normalu ravnine $M$. Kako je normala okomita na svaki vektor u ravnini, slijedi $\vec{n} \perp \vec{a}$ i $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P_1}$, a onda normalu možemo dobiti kao vektorski produkt $\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{a}$, tj.

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} = \vec{0},$$

gdje je

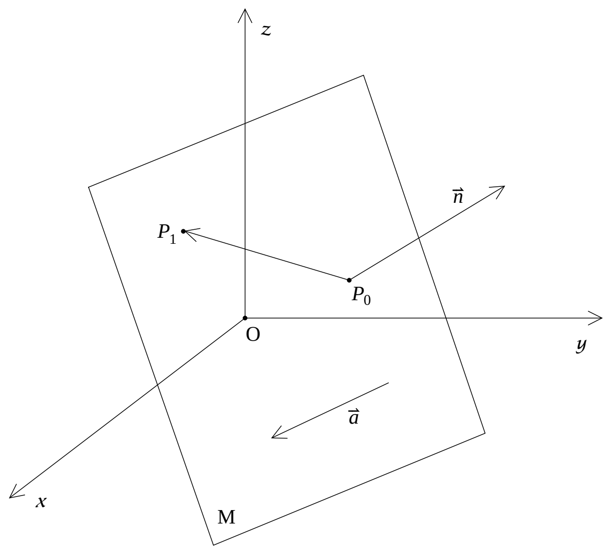
$$\begin{aligned} A &= (y_1 - y_0)a_z - (z_1 - z_0)a_y \\ B &= -(x_1 - x_0)a_z + (z_1 - z_0)a_x \\ C &= (x_1 - x_0)a_y - (y_1 - y_0)a_x \end{aligned}$$

Tako smo dobili normalu $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ i točku $P_0 \in M$ pa time i jednoznačno određenu ravninu s jednadžbom (2).

**Primjer 3.** *Odredimo jednadžbu ravnine u kojoj leže točke* $P_0 = (-1, 1, 2)$, $P_1 = (1, -1, 4)$ *i vektor* $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{k}$.

*Rješenje*: Normala na ravninu dobije se kao $\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{a}$, gdje je $\overrightarrow{P_0P_1} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ pa je

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$




Slika 4: Zadavanje ravnine s dvije različite točke i vektorom u njoj

Uvrštavajući $P_0$ i $\vec{n}$ u jednadžbu (2) dobivamo jednadžbu ravnine $M$ kao $2x + y - z + 3 = 0$.

## 2.3. Svaka ravnina u prostoru jednoznačno je određena s jednom točkom i dva linearno nezavisna vektora u toj ravnini

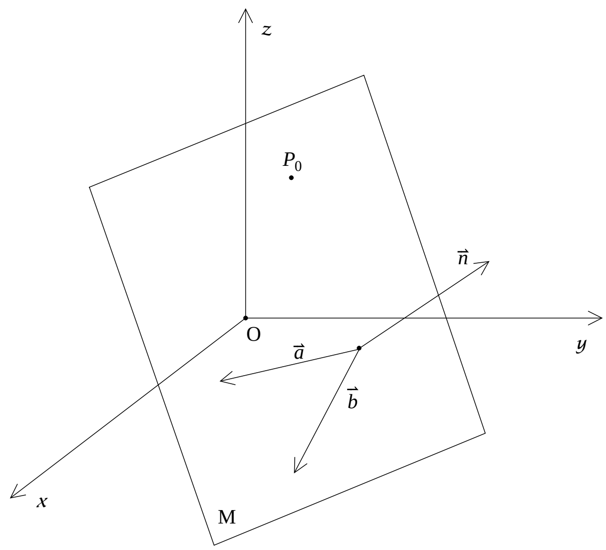
Neka su dani linearno nezavisni vektori $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ u ravnini $M$ i točka $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ (vidi sliku 5).

Vektorski umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ daje vektor koji je okomit na oba vektora a taj vektor je onda normala na ravninu kojoj oni pripadaju. Stoga je

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k},$$

gdje su

$$A = a_y b_z - a_z b_y$$
$$B = -a_x b_z + a_z b_x$$
$$C = a_x b_y - a_y b_x$$




Slika 5: Zadavanje ravnine s točkom i dva linearno nezavisna vektora

Tako smo dobili normalu $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ i točku $P_0 \in M$ pa time i jednoznačno određenu ravninu $M$ s jednadžbom (2).

**Primjer 4.** *Odredimo jednadžbu ravnine u kojoj leži točka* $P_0 = (-1, 1, 2)$ *i vektori* $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$.

*Rješenje*: Normala na ravninu dobije se kao $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$, pa je

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Uvrštavajući $P_0$ i $\vec{n}$ u jednadžbu (2), dobivamo jednadžbu ravnine $M$ kao $2x + y - z + 3 = 0$.

## 3. Zadaci

**Zadatak 2.** *Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži točku* $P = (1, 1, 1)$ *i paralelna je s ravninom* $2x - y - z + 17 = 0$. Rješenje: $2x - y - z = 0$.

**Zadatak 3.** *Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži točke* $P_1 = (1, 2, -1)$, $P_2 = (-1, 0, 3)$ *i koja je okomita na ravninu* $-2y - z + 3 = 0$. Rješenje: $5x - y + 2z - 1 = 0$.

**Zadatak 4.** *Neka je* $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *standardni pravokutni koordinatni sustav. Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži točke* $P = (1, -2, 0)$,

$Q = (2, 1, -3)$ *i paralelna je s osi* $y$. Rješenje: $3x + z - 3 = 0$.

**Zadatak 5.** *Dane su je točke* $P = (1, 2, 3)$, $Q = (3, 2, 1)$ *i ravnina* $M'$ *čija je jednadžba* $4x - y + 2z - 7 = 0$. *Odredite jednadžbu ravnine* $M$ *koja sadrži točke* $P$, $Q$ *i okomita je na ravninu* $M'$. Rješenje: $x + 6y + z - 16 = 0$.

**Zadatak 6.** *Dana je ravnine* $M_1$ *s jednadžbom* $-x - 2y + z - 2 = 0$ *i ravnina* $M_2$ *s jednadžbom* $2x + 4y - 2z - 1 = 0$. *Odredite jednadžbu ravnine* $M_3$ *obzirom na koju su ravnine* $M_1$ *i* $M_2$ *međusobno simetrične.* Rješenje: $2x - 4y - 2z + 3 = 0$.

## Literatura

[1] L. Čaklović, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[2] N. Elezović, A. Aglić, *Linearna algebra – zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2003.

[3] M. Filić, *Linearna algebra*, Građvinski fakultet, Zagreb, 1975.

[4] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[5] R. Scitovski, *Geometrija ravnine i prostora*, nastavni materijal dostupan na `http://www.mathos.unios.hr/geometrija`