L'Hospitalovo pravilo[1]

Martina Duk[2], Mirela Jukić Bokun[3]

Limesi u kojima se javljaju neodređeni oblici mogu se u nekim slučajevima računati L'Hospitalovim pravilom. Ovo pravilo omogućava da se, ako su zadovoljeni određeni uvjeti, limes kvocijenta $\frac{f(x)}{g(x)}$ računa kao limes kvocijenta derivacija $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Strogi matematički dokazi ovog pravila zahtijevaju poznavanje netrivijalnih tvrdnji iz diferencijalnog računa. Međutim, jedan njegov specijalni slučaj može se dokazati korištenjem osnovnih svojstava limesa, neprekidnosti i derivacije funkcije te se može provesti na bazi gradiva četvrtog razreda srednje škole. U članku ćemo dokazati taj specijalni slučaj, dok ćemo pravilo u strožoj formi samo iskazati. Na primjerima ćemo pokazati primjenu pravila te istaknuti najvažnije elemente na koje se treba paziti prilikom primjene pravila.

Smatramo da bi se pravilo i primjeri koje smo riješili mogli obrađivati na dodatnoj nastavi matematike u četvrtom razredu srednje škole kao još jedna zanimljiva i korisna primjena derivacija. Komentari vezani uz primjenu pravila mogli bi biti korisni i studentima koji se susreću s L'Hospitalovim pravilom.

1. Uvod

U računanju s limesima mogu se javiti neki od neodređenih oblika

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.$$

U ovim slučajevima računanje s limesima zahtijeva neke posebne tehnike. Primjerice, ako se brojnik i nazivnik racionalne funkcije poništavaju u točki c, onda je limes te racionalne funkcije u točki c oblika $\frac{0}{0}$ i rješava se tako da se i brojnik i nazivnik te funkcije podijele s $x-c$.

---

[1]Ovaj je članak napisan na osnovi diplomskog rada Martine Duk (mentor T. Marošević, komentor M. Jukić Bokun) obranjenog 2012. godine na Sveučilišnom nastavničkom studiju matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku

[2]Martina Duk, Antunovac

[3]Mirela Jukić Bokun, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Primjer 1. *Izračunajte*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x}{x-2}.$$

Rješenje. *Uočimo da je zadani limes upravo oblika* $\frac{0}{0}$.
Kako je $x^3-4x=x(x+2)(x-2)$, *lako vidimo da je*

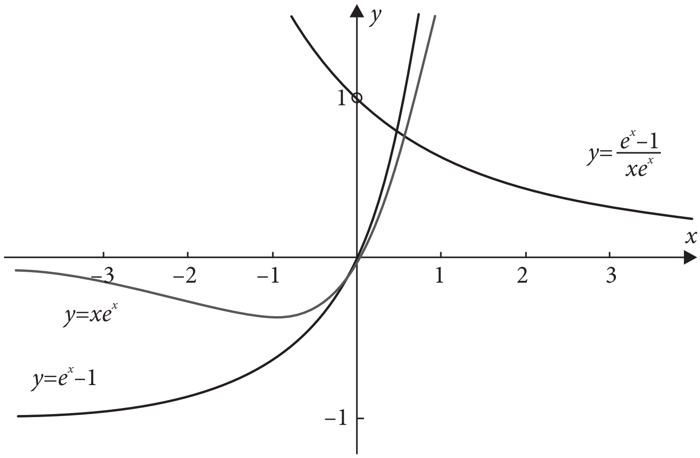
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x}{x-2}=\lim_{x\to 2}x(x+2)=8.$$

◊

Međutim, limes

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x}$$

Također je oblika $\frac{0}{0}$, no na njega ne možemo primijeniti gornje pravilo.



Slika 1.

Na Slici 1. prikazani su grafovi funkcija $f(x)=e^x-1$, $g(x)=xe^x$, $h(x)=f(x)/g(x)$, (posljednja funkcija nije definirana za $x=0$). Sa slike se jasno vidi da ovaj limes postoji (čak se može i iščitati da je jednak 1), no pitanje je kako možemo izračunati ovu vrijednost. Kao što ćemo pokazati u Primjeru 3.1., to se može učiniti upravo primjenom L'Hospitalovog pravila.

L'Hospitalovo pravilo dobilo je ime po francuskom matematičaru Guillaumeu Françoiseu Antoineu, Marquisu de L'Hospitalu (1661. – 1704.) koji je 1696. godine objavio prvu knjigu iz matematičke analize *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* u kojoj se nalazilo i ovo pravilo. Pravilo bi se zapravo trebalo zvati Bernoullijevo pravilo. Naime, otkriveno je da većina L'Hospitalovih rezultata iz spomenute knjige izvorno pripada Johannu Bernoulliju (1667. – 1748.) koji je L'Hospitala podučavao Newton-Leibnozovom infinitezimalnom računu i koji je za mjesečnu novčanu naknadu ustupio te rezultate L'Hospitalu, s dozvolom za objavljivanje.

Najprije ćemo ponoviti osnovne definicije i svojstva limesa, neprekidnosti i derivacije funkcije. Nakon toga dokazat ćemo spomenuti specijalni slučaj L'Hospitalovog pravila, iskazati strožu formu pravila i na primjerima pokazati primjenu. Na kraju donosimo nekoliko zadataka za vježbu.

2. Osnovne definicije i svojstva

Za početak ćemo pretpostaviti da su čitatelju poznate definicija i svojstva limesa niza (vidi npr. [4], [5]). Ako nije drugačije naglašeno, govorit ćemo o realnim funkcijama realne varijable i s D_f ćemo označavati prirodno područje definicije funkcije *f*.

Definicija 2.1. *Realan broj L je limes funkcije f u točki c ako za svaki niz* (x_n) *elemenata iz* D_f *koji teži broju c, niz funkcijskih vrijednosti* $(f(x_n))$ *teži broju L, tj. vrijedi*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x_n) = L.$$

Pišemo

$$L = \lim_{x\to c} f(x).$$

Ponovimo i pojam jednostranog limesa funkcije.

Definicija 2.2. *Realan broj L je limes zdesna [limes slijeva] funkcije f u točki c ako za svaki niz* (x_n) *elemenata iz* D_f *sa svojstvom da je* $x_n > c$ [$x_n < c$], *za svaki* $n \in \mathbb{N}$, *koji teži broju c, vrijedi*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x_n) = L.$$

Pišemo

$$L = \lim_{x\to c^+} f(x), \quad [L = \lim_{x\to c^-} f(x)].$$

Kako limes funkcije potječe od limesa niza, očito je da se svojstva limesa funkcije nasljeđuju od svojstava limesa niza (svojstva se mogu naći na str. 142. u [6]).

Definicija 2.3. *Funkcija f je neprekidna u točki* $c \in D_f$ *ako je*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \tag{1}$$

Ako je funkcija f definirana na segmentu $[a,b]$, *onda je ona neprekidna u točki a [u točki b] ako je*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \quad [\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)].$$

Uočimo da svojstvo (1) možemo zapisati i ovako:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = f\left(\lim_{x\to c} x\right).$$

Kažemo da s limesom možemo ući pod neprekidnu funkciju ili da limes i neprekidna funkcija komutiraju.

Definicija 2.4. *Ako za funkciju f definiranu na otvorenom intervalu I u točki* $x_0 \in I$ *postoji broj*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

onda se on naziva derivacija funkcije f u točki x_0 *i označava s* $f'(x_0)$.

Ako je f derivabilna u svakoj točki $x_0 \in I$, *onda kažemo da je ona derivabilna na I, a funkciju* $x \mapsto f'(x)$ *definiranu na I označavamo s* f' *i nazivamo derivacijom funkcije f na I.*

U nastavku ćemo koristiti nešto drugačiji zapis derivacije funkcije u točki x_0 Uočimo da uz oznaku $\Delta x = x - x_0$ (tada je $x = x_0 + \Delta x$) imamo

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pravila deriviranja mogu se naći u npr. [5], str. 193.-201., i mi ih ovdje nećemo navoditi.

Na kraju ovog dijela navest ćemo i dokazati sljedeći važan teorem.

Teorem 2.1. *Ako je funkcija f derivabilna u točki* x_0, *onda je ona i neprekidna u toj točki.*

Dokaz. Prema *Definiciji 2.3.* funkcija f je neprekidna u točki x_0 ako vrijedi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ili, ekvivalentno, $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = 0.$ Pokažimo da uz pretpostavku da je *f* derivabilna u točki x_0 vrijedi posljednja jednakost. Koristeći svojstva limesa i definiciju derivacije, zaključujemo da vrijedi sljedeći niz jednakosti

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} x - x_0\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0.$$

□

Napomenimo da obrat prethodnog teorema ne vrijedi (vidi npr. [5], str. 188.).

3. L'Hospitalovo pravilo

Kako bismo izveli jedan specijalni slučaj ovog pravila, pretpostavimo da imamo zadan limes neodređenog oblika $\frac{0}{0}$, tj. imamo zadane funkcije *f* i *g* takve da vrijedi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

i trebamo odrediti sljedeći limes:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ako postoji $f'(x_0)$ i $g'(x_0)$, onda su prema *Teoremu 2.1.* funkcije *f* i *g* neprekidne u točki x_0 i vrijedi

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \quad g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0. \tag{2}$$

Nadalje, ako je $g'(x_0) \neq 0$, vrijedi sljedeći niz jednakosti

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} &= \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem relacije iz (2) dobivamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3}$$

Uočimo da korištenjem ove formule možemo riješiti primjer iz uvoda.

Primjer 3.1. *Odredimo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{xe^x}.$$

Rješenje. *Ako stavimo* $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = xe^x$, *onda je*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0,$$

Kako za sve $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $f'(x) = e^x$, $g'(x) = e^x(1+x)$ *(uočimo da smo ovdje koristili formulu za derivaciju produkta) i* $g'(0) = 1 \neq 0$, *svi uvjeti iz prethodnih razmatranja su zadovoljeni pa uvrštavanjem u formulu (3) dobivamo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{xe^x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 1.$$

◊

Ako su f' i g' još i neprekidne funkcije u x_0, vrijedi

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pa jednakost (3) možemo zapisati na sljedeći način:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Upravo ova posljednja formula poznata je pod imenom L'Hospitalovo pravilo. Mi smo je dokazali za funkcije koje imaju neprekidnu derivaciju u točki x_0, međutim, može se pokazati da ona vrijedi i uz slabije uvjete od ovih koje smo mi zahtijevali. Ti uvjeti dani su u sljedećem teoremu.

Teorem 3.1. *Neka postoji otvoren interval I oko točke* x_0 *takav da su funkcije f i g derivabilne na* $I \setminus \{x_0\}$, *vrijedi* $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$, *i*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

ili

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *i element je skupa* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *onda postoji i* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *i vrijedi*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Napomena 3.1. *Može se pokazati da analogna tvrdnja vrijedi i u slučaju* $x_0 = \pm\infty$, *kao i za jednostrane limese.*

Kao što smo već spomenuli, strogi matematički dokaz ovog teorema izlazi iz okvira srednjoškolske matematike (slično kao i dokazi teorema vezanih uz primjenu derivacija pri određivanju intervala monotonosti i lokalnih ekstrema funkcije koji se koriste u četvrtom razredu srednje škole). Dokaz se može naći u [1] ili [7].

4. Primjena L'Hospitalovog pravila

U nastavku ćemo riješiti još nekoliko primjera vezanih uz L'Hospitalovo pravilo.

Primijetimo najprije da u L'Hospitalovom pravilu ne koristimo derivaciju kvocijenta, nego kvocijent derivacija. Naime,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primjer 4.1. *Odredimo*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+4x}.$$

Rješenje. *Komentirajmo detaljno ovaj primjer. Neka je* $f(x)=\sin x$ *i* $g(x)=x^2+4x.$

Tada je

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=0$$

pa je traženi limes oblika $\frac{0}{0}$. *Funkcije* $f(x)$ *i* $g(x)$ *su derivabilne za sve realne x i vrijedi* $g'(x)=2x+4\neq 0$ *na npr. intervalu* $I=\langle -1,1\rangle$. *Kako je*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{\left(x^2+4x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x+4}=\frac{1}{4},$$

tj. postoji $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *svi uvjeti Teorema 3.1 su zadovoljeni pa nam L'Hospitalovo pravilo daje*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+4}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{\left(x^2+4x\right)'}=\frac{1}{4}.$$

◊

Početne pretpostavke *Teorema 3.1.* su u primjerima koji slijede gotovo trivijalno zadovoljene pa ih u nastavku nećemo komentirati. Napomenimo ipak da se uvjet da postoji interval *I* oko zadanog x_0 takav da je $g'(x)\neq 0, \forall x\in I\setminus\{x_0\}$, iako se u primjenama rijetko komentira, ne smije zanemariti (nešto više o tome može se naći u [2]).

Kod primjene L'Hospitalovog pravila najčešće se, radi jednostavnijeg zapisa, u zagradu piše o kojem je neodređenom obliku riječ, te sa $\overset{L'H}{=}$ označava da je upotrijebljeno L'Hospitalovo pravilo. Npr.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'H}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Mi ćemo također koristiti ovaj zapis, uz napomenu da je on neprecizan. Naime, on pretpostavlja da su ova dva limesa jednaka, a oni su (ako su zadovoljene početne pretpostavke *Teorema 3.1.*) jednaki samo ako drugi limes postoji.

Primjer 4.2. *Odredimo*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3}.$$

Rješenje. *Traženi limes je oblika* $\frac{\infty}{\infty}$ *i uočimo da se primjenom L'Hospitalovog pravila dobiva*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}. \tag{4}$$

Na posljedni limes opet možemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty. \tag{5}$$

Prema (4), (5) i Teoremu 3.1. zaključujemo da je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{e^x}=+\infty.$$ ◊

U prethodnom smo primjeru vidjeli da se L'Hospitalovo pravilo može primijeniti više puta. Važno je napomenuti da uvijek trebamo provjeravati jesu li zadovoljeni uvjeti *Teorema 3.1.* Primjerice, ako bismo u *Primjeru 4.1.* na limes

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2x+4}$$

ponovo primijenili L'Hospitalovo pravilo bez provjere radi li se o neodređenom obliku, dobili bismo

$$\lim_{x\to0}\frac{(\cos x)'}{(2x+4)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2}=0,$$

što svakako nije točan rezultat.

U iduća dva primjera pokazat ćemo kako se neodređeni oblici $\infty-\infty$ i $0\cdot\infty$ mogu svesti na oblik na koji možemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo.

Primjer 4.3. *Odredimo*

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right).$$

Rješenje. *Ovaj limes je oblika* $\infty-\infty$, *ali svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\\&=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\\&=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.\end{aligned}$$ ◊

Primjer 4.4. *Odredimo*

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x.$$

Rješenje. *Traženi limes je oblika* $0\cdot\infty$, *međutim, ako ga zapišemo na sljedeći način:*

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}},$$

dolazimo do oblika na koji možemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo. Kako je

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0,$$

zaključujemo da je traženi limes jednak 0. ◊

U prethodnom smo primjeru neodređeni oblik $0\cdot\infty$ mogli svesti i na oblik $\frac{0}{0}$ na sljedeći način:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}.$$

Ako na ovaj oblik primijenimo L'Hospitalovo pravilo, dobivamo

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}(-x\ln^2 x),$$

što vodi do još kompliciranijeg limesa, pa ovaj zapis, iako korektan, nije koristan. Sljedeći primjer također pokazuje da direktna primjena L'Hospitalovog pravila ne mora dati traženi limes.

Primjer 4.5. *Odredimo*

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Rješenje. *Uočimo da je traženi limes oblika* $\frac{\infty}{\infty}$. *Pokušamo li na njega primijeniti L'Hospitalovo pravilo, dobivamo*

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Dakle, uzastopna primjena L'Hospitalovog pravila vraća nas na početni limes.

Traženi limes postoji i relativno lako se računa ako se i brojnik i nazivnik podijele sa x. Dobivamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1.$$

◊

Pokažimo sada da obrat L'Hospitalovog pravila ne vrijedi.

Primjer 4.6. *Odredimo*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}.$$

Rješenje. *Neka je $f(x)=x+\sin x$, $g(x)=x$. Ove funkcije su derivabilne i vrijedi $g'(x)=1\neq 0$ za sve realne x, te je*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0,$$

međutim, jer je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1}=\lim_{x\to+\infty}(1+\cos x),$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ne postoji*[4]*. To međutim ne mora odmah značiti da* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ *ne postoji, nego samo da ga nećemo moći odrediti L'Hospitalovim pravilom.*

Pokažimo da dani limes postoji. Uočimo da je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+sinx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right). \tag{6}$$

Kako je $|\sin x|\leq 1$, vrijedi $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|}$ pa je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

Prema (6), traženi limes postoji i jednak je 1. ◊

Neodređeni oblici tipa $0^0, 1^\infty, \infty^0$ dolaze od limesa oblika

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$$

I oni se rješavaju logaritmiranjem. Koristi se sljedeća ideja. Naime, ako je $y(x)=[f(x)]^{g(x)}$, logaritmiranjem (za $f(x)>0$) dobivamo

$$\ln y(x)=g(x)\ln f(x),$$

[4]Nizovi zadani s $(x_n)=(2n\pi)$, $(x_n')=((2n+1)\pi)$ imaju svojstvo da je $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n'=+\infty$, ali je $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\cos x_n)=2\neq 0=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\cos x_n')$.

Kako je logaritamska funkcija neprekidna, a limes i neprekidna funkcija komutiraju, zaključujemo da vrijedi

$$\ln\left(\lim_{x\to x_0} y(x)\right) = \lim_{x\to x_0} \ln y(x).$$

Odavde zaključujemo da je, ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0} \ln y(x) = L,$ onda i

$$\lim_{x\to x_0} y(x) = e^L.$$

Primjer 4.7. *Odredimo*

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Rješenje. *Uočimo da je ovaj limes oblika* 0^0. *Logaritmiranjem dobivamo*

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} x^x\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x^x\right) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x.$$

U Primjeru 4.4. zaključili smo da je posljednji limes jednak 0, pa je

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

◊

Primjer 4.8. *Odredimo*

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Rješenje. *Ovaj limes je oblika* 1^∞. *Logaritmiranjem dobivamo*

$$\ln\left(\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \beta x \ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right).$$

Kako je

$$\lim_{x\to +\infty} \beta x \ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right) = \beta \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

primjenom L'Hospitalovog pravila na posljednji limes dobivamo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{-\alpha}{x^2\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = \alpha.$$

Stoga je

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}.$$

◊

Primjer 4.9. *Odredimo*

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}.$$

Rješenje. *Traženi limes je oblika* ∞^0. *Logaritmiranjem dobivamo*

$$\ln\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}=\lim_{x\to0^+}\mathrm{tg}\,x\ln\left(\frac{1}{x}\right). \tag{7}$$

Posljednji limes je oblika $0\cdot\infty$, *ali se može svesti na oblik pogodan za primjenu L'Hospitalovog pravila na sljedeći način:*

$$\lim_{x\to0^+}\mathrm{tg}x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{ctg}x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln1-\ln x}{\mathrm{ctg}x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\ln x}{\mathrm{ctg}x}.$$

Višestruka primjena L'Hospitalovog pravila na posljednji limes daje

$$\lim_{x\to0^+}\frac{-\ln x}{\mathrm{ctg}x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2x}{x}$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin x\cos x}{1}=0.$$

Iz (7) slijedi da je

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}=1.$$

◊

Primjer 4.10. *Dokažimo da je*

$$\lim_{x\to1}\left(a^{\frac{1}{1-x}}\right)^{\ln x}=\frac{1}{a},\qquad a>1,\ a\in\mathbb{R}.$$

Rješenje. *Uočimo da je u slučaju* $x\to1^+$ *ovaj limes oblika* ∞^0, *dok je u slučaju* $x\to1^-$ *oblika* 0^0. *Logaritmiranjem dobivamo*

$$\ln\lim_{x\to1}\left(a^{\frac{1}{1-x}}\right)^{\ln x}=\lim_{x\to1}\ln\left(a^{\frac{1}{1-x}}\right)^{\ln x}=\ln a\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}.$$

L'Hospitalovo pravilo primijenjeno na posljednji limes daje

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'H}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1.$$

Stoga je

$$\ln\lim_{x\to1}\left(a^{\frac{1}{1-x}}\right)^{\ln x}=-\ln a=\ln\frac{1}{a}$$

pa je

$$\lim_{x\to 1}\left(a^{\frac{1}{1-x}}\right)^{\ln x}=\frac{1}{a}.$$

◊

4.1. Zadaci za vježbu

1. Izračunajte sljedeće limese:

$a)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{10}+3x^5+2}{x^{100}+2x^{50}-3}$

$b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-1\right)\operatorname{ctg} x$

$c)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{3+\sqrt[5]{x}}$

$d)\ \lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

$e)\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\left(\operatorname{tg}\pi x\right)^{\operatorname{tg}2\pi x}$

$f)\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^5e^{-x}$

$g)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}$

$h)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$

$i)\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sin 5x)}{\ln(\sin x)}$

$j)\ \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

2. Izračunajte sljedeće limese (vidi [5], str. 169.);

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^{\ln x}$

3. Dokažite da je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab},\qquad \forall a,\, b>0.$$

Literatura

1. D. Blanuša, *Viša matematika,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.
2. R. P. Boas, *Counterexamples to L'Hospital's Rule,* Amer. Math. Monthly **93** (1986.), 644-645**.**
3. J. Broadwin, *The immortal L'Hospital,* http:/apcentral.collegeboard.com/apc/public/repository/ap08_calc_LHospital_final.rev2.pdf
4. M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika,* Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.
5. B. Dakić, N. Elezović, *Udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2001.
6. J. Đurović, I. Đurović, S. Rukavina, *Udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred opće, jezične i klasične gimnazije*, Element, Zagreb, 2001.
7. S. Kurepa, *Matematička analiza: Funkcije jedne varijable,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.