UDK 514.122:528.235
Izvorni znanstveni članak

Određivanje pravocrtnosti skupa točaka u ravnini

Miljenko LAPAINE, Martina TRIPLAT HORVAT – Zagreb[1]

SAŽETAK. Razmatra se problem određivanja pravca koji se po metodi euklidskih udaljenosti najbolje prilagođava zadanom skupu točaka u ravnini. Pokazuje se da problem nije linearan, ali se na njegovo rješavanje ne primjenjuje u geodeziji uobičajeni postupak linearizacije, nego se problem svodi na traženje ekstremnih vrijednosti funkcije jedne varijable te u konačnici na rješavanje kvadratne jednadžbe. Nadalje, istražuju se dovoljni uvjeti za ekstrem funkcije i pokazuje da problem općenito ima dva rješenja, jedan minimum i jedan maksimum. Za ilustraciju opisane metode, izvedene formule primijenjene su na određivanje jednadžbe pravca koji je po metodi euklidskih udaljenosti najbolje prilagođen skupu točaka koje reprezentiraju meridijan nacrtan u nepoznatoj kartografskoj projekciji karte J. R. Boškovića i Ch. Mairea Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico iz 1755. godine.

Ključne riječi: aliniranje, prilagođavanje pravca, euklidska udaljenost.

1. Uvod

U praktičnoj i inženjerskoj geodeziji poznat je termin *aliniranje*, koji označava postavljanje točaka u pravac ili u vertikalnu ravninu. Instrument za aliniranje ima dalekozor velikog povećanja koji se upotrebljava za viziranje čvrste ciljne značke smještene na kraju pravca. Njime se mogu iskolčiti međutočke (Frančula i Lapaine 2008).

U ovome radu razmatramo obratan zadatak. Pretpostavlja se da je poznat neki izvedeni objekt za koji je potrebno ispitati njegovu pravocrtnost. To može biti neka dionica ceste ili dio neke građevine ili nacrtana crta koja bi mogla ili trebala biti dio pravca.

Jedan od takvih problema pojavljuje se pri istraživanju kartografskih projekcija na starim kartama. Tako je primjerice o kartografskoj projekciji karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, u izradi koje je sudjelovao J. R. Bošković, do sada pisao samo Borčić (1964–65), koji navodi da je karta izrađena u poliedarskoj kartografskoj projekciji. Međutim, promatrajući kartografsku mrežu koja je

[1] prof. dr. sc. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Croatia, e-mail: mlapaine@geof.hr,
Martina Triplat Horvat, dipl. ing. geod., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Croatia, e-mail: mthorvat@geof.hr.

nacrtana na karti primijetili smo da bi slike meridijana mogle biti ravne crte, dok su slike paralela zakrivljene crte koje podsjećaju na lukove kružnica ili dijelove neke krivulje. Prema tome kartografska projekcija u kojoj je izrađena karta ne može biti poliedarska jer su u takvoj projekciji i slike meridijana i slike paralela dijelovi pravaca, ali bi mogla biti uspravna konusna ili azimutna.

U uspravnim konusnim projekcijama slike meridijana su pravci koji se sijeku u jednoj točki pod kutovima proporcionalnim odgovarajućim razlikama geografskih dužina. U azimutnim projekcijama slike meridijana su pravci koji se sijeku u jednoj točki pod kutovima jednakim odgovarajućim razlikama geografskih dužina. Jedna od mogućnosti ispitivanja pravocrtnosti nacrtanih meridijana je vizualna kontrola, a moguća je i računska kontrola primjenom pronalaženja "najboljeg" pravca. Objasnimo najprije da je to moguće napraviti na različite načine.

Za konačno mnogo točaka u ravnini, dobivenih mjerenjem neke kontinuirane pojave ili objekta, obično se želi rekonstruirati krivulja koja prolazi kroz njih, odnosno, budući da su mjerenja uvijek opterećena pogreškama, što bliže tim točkama. Posebno, ako je narav problema takva (npr. točke su nastale mjerenjem nečega što "bi trebalo" biti pravac), tražimo pravac koji "najbolje" predstavlja (aproksimira) dane točke (Jovičić i dr. 1982, Petrović i dr. 1983, Lapaine 1989).

Najčešće se postupa ovako: točke $T_1, T_2, ..., T_n$ prikažu se u nekom Kartezijevu koordinatnom sustavu u ravnini kao točke s koordinatama $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$, pa se traži onaj pravac $y = f(x) = ax + b$ za koji je zbroj kvadrata razlika ordinata

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$$

najmanji. Taj uvjet vodi na sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice koji znamo riješiti. Takav pristup može biti opravdan ako pretpostavimo da su apscise točaka bespogrešne ili znatno točnije od ordinata. U našem slučaju ta pretpostavka nije bila ispunjena pa moramo razmišljati na drugi način.

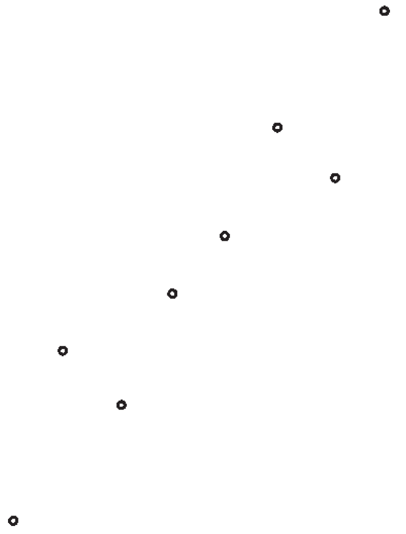
Primjer 1.

Zadano je 8 točaka u ravnini kao na slici 1. Traži se najbolji pravac.

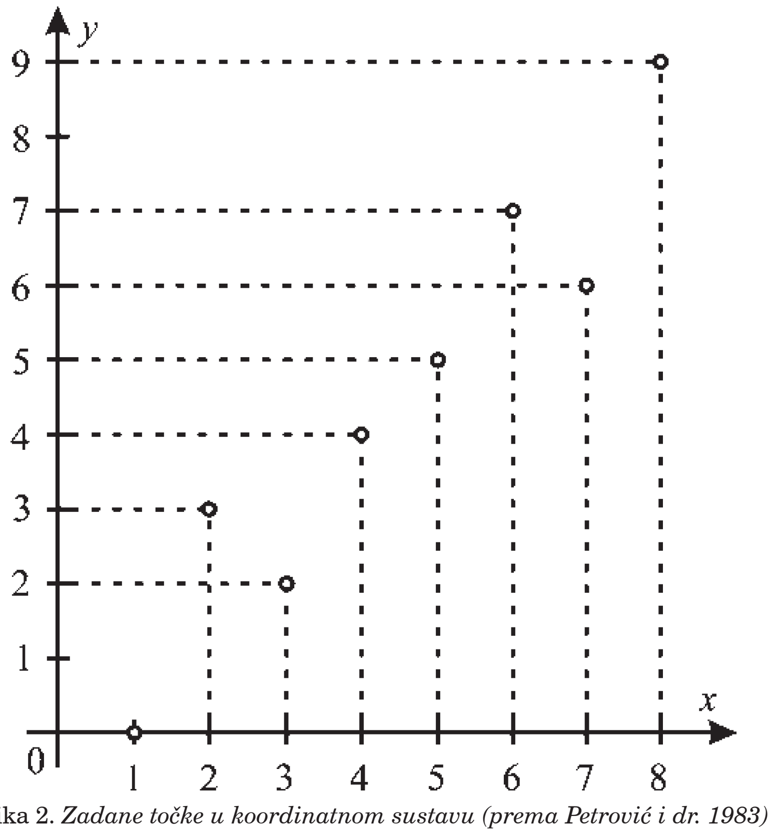
Da bi se zadatak mogao riješiti kako je malo prije opisano, treba najprije uvesti koordinatni sustav. To se može napraviti na beskonačno mnogo načina, a dva su od njih prikazana na slikama 2 i 3. Ako zadatak rješavamo u koordinatnom sustavu sa slike 2, kao rješenje dobit ćemo pravac p_1 (slika 4), a koordinatni sustav sa slike 3 vodi do rješenja p_2 (slika 4). Neki treći koordinatni sustav doveo bi do nekog trećeg rješenja p_3.

Dakle, budući da postoji beskonačno mnogo koordinatnih sustava, znači da za dani skup točaka ravnine postoji beskonačno mnogo pravaca od kojih je svaki "najbolji". Takav ćemo zaključak naravno odbaciti i pokušati precizirati termin "najbolji". Ilustrirajmo to na primjeru.

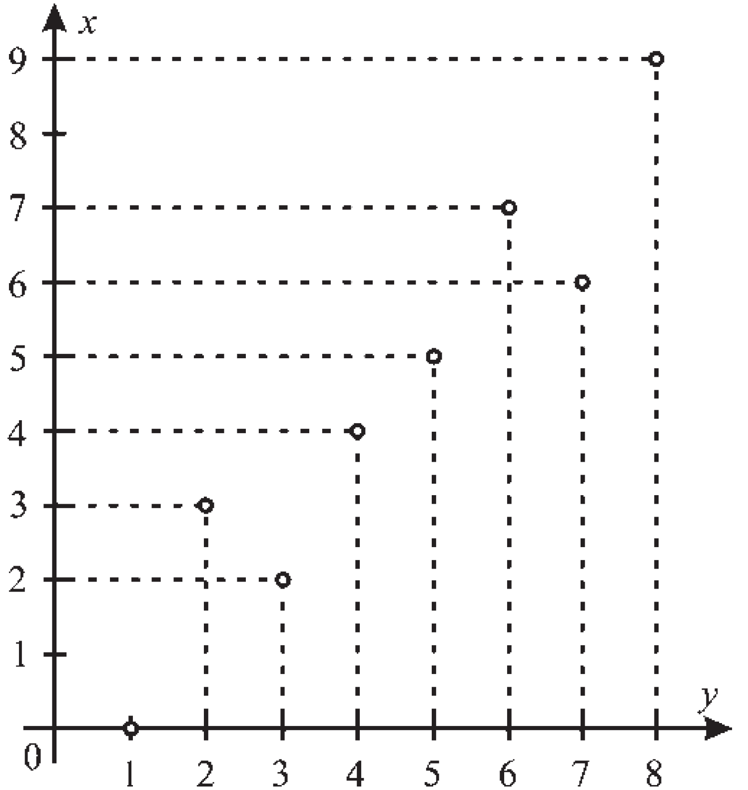
Budući da u našem zadatku nije riječ o proučavanju korelacije nego o traženju "najboljeg" pravca za zadani skup točaka, zaključujemo da minimizacija zbroja kvadrata razlike ordinata nije najbolji kriterij za pronalaženje toga pravca. Zato ćemo zadatak rješavati na drugi način. Želimo da, bez obzira na odabrani koordi-



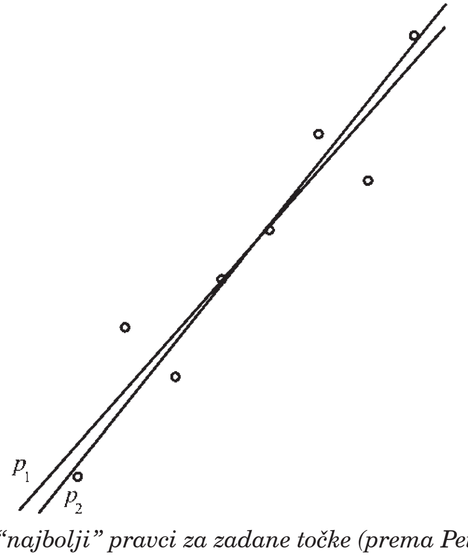
Slika 1. *Zadane točke u ravnini (prema Petrović i dr. 1983).*



Slika 2. *Zadane točke u koordinatnom sustavu (prema Petrović i dr. 1983).*



Slika 3. *Zadane točke u drugom koordinatnom sustavu (prema Petrović i dr. 1983).*



Slika 4. *Različiti "najbolji" pravci za zadane točke (prema Petrović i dr. 1983).*

natni sustav, kao "najbolji" pravac uvijek dobijemo jedan te isti pravac. Budući da je euklidska udaljenost točke od pravca uvijek ista, bez obzira na koordinatni sustav u kojem računamo, ona je dobar kriterij za nalaženje najboljeg pravca. Euklidska udaljenost definira se kao drugi korijen iz zbroja kvadrata razlika koordinata zadanih točaka (Pitagorin poučak primijenjen na koordinatne razlike).

Spomenimo da je Adcock (1878) predložio takav pristup za određivanje "najvjerojatnijeg položaja" pravca određenog točkama čije su koordinate rezultat mjerenja. Riječi "najvjerojatniji položaj" stavili smo pod navodnike jer Adcock ne pretpostavlja nikakvu razdiobu odstupanja točaka od pravca već primjenjuje metodu najmanjih kvadrata, koja, kao što je poznato, ne mora biti povezana ni s kakvom razdiobom odstupanja pa stoga ne mora ni dati najvjerojatnije rješenje. Iako su se Adcocku u izvodu potkrale izvjesne pogreške citirali smo njegov rad zbog toga što je to najstariji poznati izvor koji problemu prilagođavanja pravca skupu točaka u ravnini prilazi uzimajući u obzir normale iz zadanih točaka na traženi pravac, što je zapravo samo drugi način izražavanja euklidskih udaljenosti, koji smo primijenili u ovome radu. Vrijedno je spomenuti i članak H. Wolfa (1941) u kojem se daje pregled do tada objavljenih radova na tu temu.

2. Određivanje najboljeg pravca

Za zadanih n točaka $T_1, T_2, ..., T_n$ u ravnini treba naći onaj pravac koji ima svojstvo da je zbroj kvadrata euklidskih udaljenosti zadanih točaka od toga pravca najmanji.

Rješenje

Neka točke $T_1, T_2, ..., T_n$ u nekom Kartezijevu koordinatnom sustavu imaju koordinate

$$T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2), ..., T_n(x_n, y_n) .$$

Kvadrat euklidske udaljenosti točke $T_i(x_i, y_i)$ od pravca

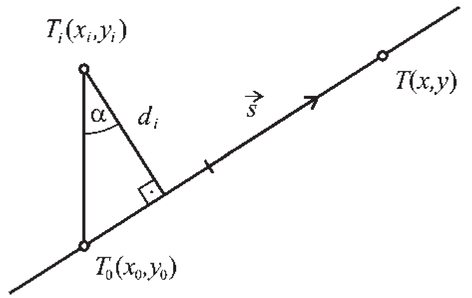
$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} \tag{1}$$

je

$$d_i^2 = \frac{\left[(x_i - x_0)l - (y_i - y_0)k\right]^2}{k^2 + l^2} . \tag{2}$$

Vidimo da je (1) kanonski ili standardni oblik jednadžbe pravca u ravnini. U toj su jednadžbi x i y koordinate bilo koje točke na pravcu, x_0 i y_0 su koordinate jedne zadane točke na pravcu, a k i l su komponente vektora smjera toga pravca $\vec{s} = k\vec{i} + l\vec{j}$ (vidi sliku 5).

Na slici se lako vidi da je $\overrightarrow{T_0T} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$. Vektori $\overrightarrow{T_0T}$ i $\vec{s}$ su kolinearni, pa vrijedi $\overrightarrow{T_0T} = \lambda\vec{s} = \lambda(k\vec{i} + l\vec{j})$ i odatle $x - x_0 = \lambda k$, $y - y_0 = \lambda l$, što je ekvivalentno s (1).



Slika 5. *Pravac kroz zadanu točku s koordinatama* (x_0, y_0) *i zadanog smjera* $\vec{s} = k\vec{i} + l\vec{j}$. *Udaljenost točke* $T_i(x_i, y_i)$ *od pravca je* d_i.

Kosinus kuta α između vektora $\overrightarrow{T_iT_0}$ i vektora $l\vec{i} - k\vec{j}$ koji je okomit na vektor $\vec{s}$ smjera pravca, odnosno koji ima smjer euklidske udaljenosti točke $T_i(x_i, y_i)$ od pravca može se izraziti na dva načina: iz trokuta na slici i iz definicije skalarnog produkta:

$$\cos\alpha = \frac{d_i}{\left|\overrightarrow{T_iT_0}\right|} = \frac{\overrightarrow{T_iT_0}(l\vec{i} - k\vec{j})}{\left|\overrightarrow{T_iT_0}\right|\left|l\vec{i} - k\vec{j}\right|}.$$

Odatle se odmah dobije

$$d_i = \frac{\overrightarrow{T_iT_0}(l\vec{i} - k\vec{j})}{\left|l\vec{i} - k\vec{j}\right|} = \frac{(x_i - x_0)l - (y_i - y_0)k}{\sqrt{l^2 + k^2}}.$$

Kako je svakom pravcu pridruženo beskonačno mnogo jednadžbi oblika (1) jer k i l nisu jednoznačno određeni, možemo po volji zadati jedan uvjet koji povezuje k i l. Iz (2) vidimo da je pogodno odabrati

$$k^2 + l^2 = 1 \tag{3}$$

pa onda umjesto (2) imamo

$$d_i^2 = \left[(x_i - x_0)l - (y_i - y_0)k\right]^2. \tag{4}$$

Tražimo, dakle, da funkcija

$$S = S(k, l, x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \tag{5}$$

poprimi najmanju moguću vrijednost, minimum, uz uvjet (3). Da bismo riješili postavljeni zadatak, tzv. uvjetni ekstrem, konstruiramo pomoćnu funkciju kako nas uči matematička analiza:

$$R = R(k, l, x_0, y_0, \lambda) = S(k, l, x_0, y_0) - \lambda(k^2 + l^2 - 1) \tag{6}$$

i tražimo njezine ekstremne vrijednosti. U tu svrhu odredimo parcijalne derivacije i izjednačimo ih s nulom:

$$\frac{\partial R}{\partial k}=\frac{\partial S}{\partial k}-2\lambda k=2\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0)^2-\lambda\right]k-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)(y_i-y_0)l\right\}=0$$

$$\frac{\partial R}{\partial l}=\frac{\partial S}{\partial l}-2\lambda l=2\left\{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)(y_i-y_0)k+\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2-\lambda\right]l\right\}=0$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_0}=\frac{\partial S}{\partial x_0}=2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-x_0)l-(y_i-y_0)k\right](-l)\right\}=0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y_0}=\frac{\partial S}{\partial y_0}=2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-x_0)l-(y_i-y_0)k\right]k\right\}=0$$

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda}=-(k^2+l^2-1)=0\ .$$

Dobili smo 5 nelinearnih jednadžbi s 5 nepoznanica. Lako se vidi da se treća i četvrta od tih jednadžbi mogu pojednostavniti i da vode na jednu te istu jednadžbu

$$k\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0)=l\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)$$

koja se uz oznake

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\quad \text{i}\quad \overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n} \qquad (8)$$

može napisati u obliku

$$k(\overline{y}-y_0)=l(\overline{x}-x_0)\ .$$

Iz posljednjeg izraza čitamo da točka s koordinatama $(\overline{x},\overline{y})$, tj. težište skupa točaka, pripada traženom pravcu. To pak znači da se jednadžba traženoga pravca može napisati u obliku

$$\frac{x-\overline{x}}{k}=\frac{y-\overline{y}}{l}\ .$$

Dakle, još je potrebno naći odgovarajuće vrijednosti za k i l. Uz oznake

$$a=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$$

$$b=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \qquad (9)$$

$$d=n\overline{x}\overline{y}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\ ,$$

prva, druga i peta jednadžba iz sustava (7) prelaze u

$$\begin{aligned}(a-\lambda)k+dl&=0\\ dk+(b-\lambda)l&=0\\ k^2+l^2&=1\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Trivijalno rješenje $k=l=0$ očito ne dolazi u obzir. Shvatimo prve dvije jednadžbe u (10) kao homogeni sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama k i l. Da bi on imao netrivijalno rješenje, determinanta tog sustava mora biti jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & d \\ d & b-\lambda \end{vmatrix}=0\,.$$

To je kvadratna jednadžba

$$\lambda^2-(a+b)\lambda+ab-d^2=0 \tag{11}$$

koju znamo riješiti:

$$\lambda_{1,2}=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-4(ab-d^2)}}{2}=\frac{a+b\pm\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2}\,. \tag{12}$$

Vidimo da su oba rješenja realna i pozitivna. Ako sad bilo koju od tih dviju vrijednosti λ uvrstimo u sustav

$$\begin{aligned}(a-\lambda)k+dl&=0\\ k^2+l^2&=1\,,\end{aligned}$$

dobit ćemo k i l:

$$k=\pm\frac{d}{\sqrt{d^2+(a-\lambda)^2}}\quad \text{i}\quad l=\mp\frac{a-\lambda}{\sqrt{d^2+(a-\lambda)^2}}\,. \tag{13}$$

Na prvi se pogled čini da smo dobili dva rješenja, dva pravca. Međutim, vektori $\vec{s}$ i $-\vec{s}$ određuju jedan te isti pravac. No treba ipak uočiti da smo odredili dvije svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2, a one daju dva međusobno okomita vektora $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$. Dokažimo to.

S obzirom na to da se u izrazima za k i l pojavljuju isti nazivnici, dovoljno je dokazati da su međusobno okomiti vektori

$$d\vec{i}-(a-\lambda_1)\vec{j}\quad \text{i}\quad d\vec{i}-(a-\lambda_2)\vec{j}\,,$$

odnosno da je njihov skalarni produkt jednak nuli:

$$\left[d\vec{i}-(a-\lambda_1)\vec{j}\right]\left[d\vec{i}-(a-\lambda_2)\vec{j}\right]=d^2+(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)=$$

$$=d^2-a(\lambda_1+\lambda_2)+a^2+\lambda_1\lambda_2=d^2-a(a+b)+a^2+ab-d^2=0\,.$$

Na taj smo način dokazali da postoje dva međusobno okomita smjera (pravca) u kojima funkcija R postiže ekstrem. Dakle, naš zadatak ima dvije stacionarne točke, dva lokalna ekstrema. U kojem je minimum, a u kojem maksimum?

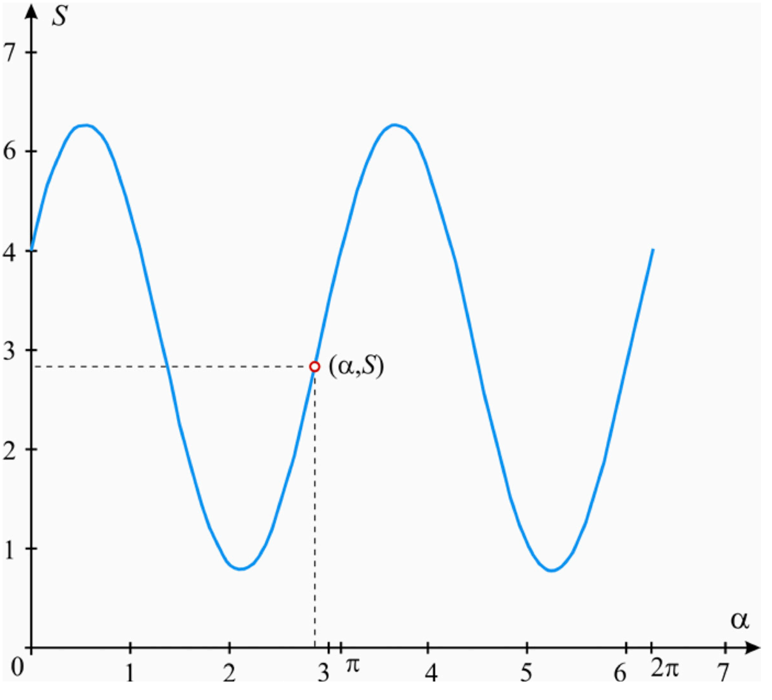
Na to pitanje nije jednostavno odgovoriti (Bronštejn i Semendjajev 1964) jer je u (6) $R = R(k, l, x_0, y_0, \lambda)$ funkcija 5 varijabli. Relativno jednostavni postupci za određivanje dovoljnih uvjeta za ekstremne vrijednosti razrađeni su za funkcije jedne i dviju varijabli, dok je u slučaju više varijabli postupak složeniji i može zahtijevati "dodatna ispitivanja" (Kurepa 1975). Stoga ćemo krenuti drugim putem i pokazati da se naš problem može svesti na određivanje ekstremnih vrijednosti funkcije jedne varijable. Naime, nakon što smo se uvjerili da treba uzeti $x_0 = \bar{x}$ i $y_0 = \bar{y}$ te ako uvedemo supstituciju

$$k = \cos\alpha\,,\ \ l = \sin\alpha \tag{14}$$

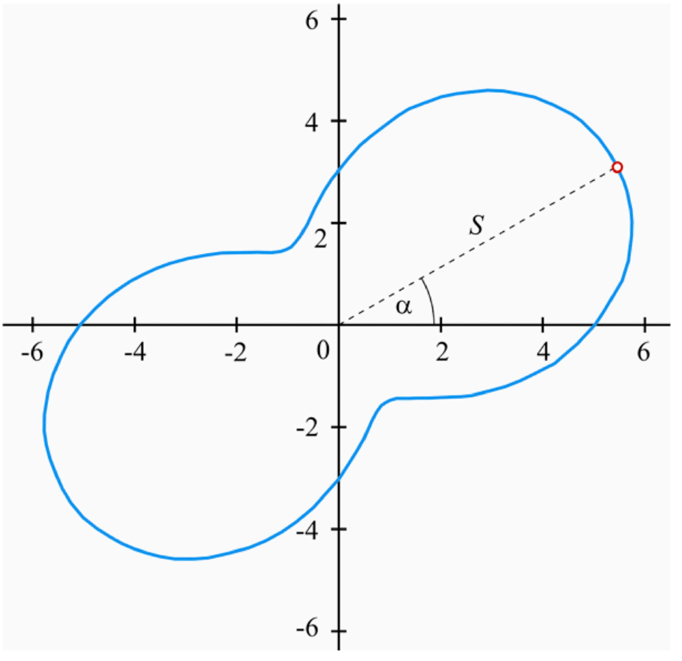
bit će očito ispunjen uvjet $k^2 + l^2 = 1$, a funkcija (slika 6 i 7) čije ekstremne vrijednosti tražimo može se sad napisati u obliku

$$S = S(\alpha) = ak^2 + bl^2 + 2dkl = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha + d\sin 2\alpha\,, \tag{15}$$

tj. u obliku funkcije jedne varijable $S = S(\alpha)$, gdje su a, b, i d određeni formulama (9).



Slika 6. *Prikaz funkcije* $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha + d\sin 2\alpha$ *u pravokutnom koordinatnom sustavu.*



Slika 7. *Prikaz funkcije* $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha + d\sin 2\alpha$ *u polarnom koordinatnom sustavu.*

Slučaj $d = 0$

Ako je $d = 0$, onda se izraz (15) pojednostavnjuje u (slika 8 i 9)

$$S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha$$

što se može primjenom poznatih trigonometrijskih relacija

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \quad \text{i} \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

transformirati u

$$S = S(\alpha) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\alpha\,.$$

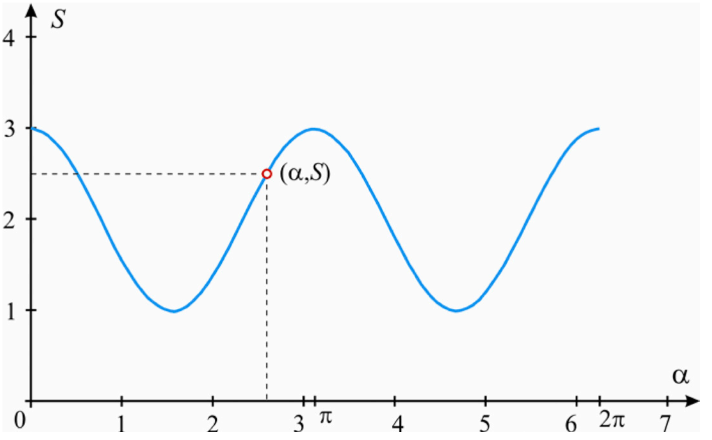
Poznavajući svojstva trigonometrijske funkcije kosinus, nije teško zaključiti da je:

$$\text{za } a > b \text{ i } \cos 2\alpha = 1,\ S_{\max} = a \text{ te za } \cos 2\alpha = 0,\ S_{\min} = b$$

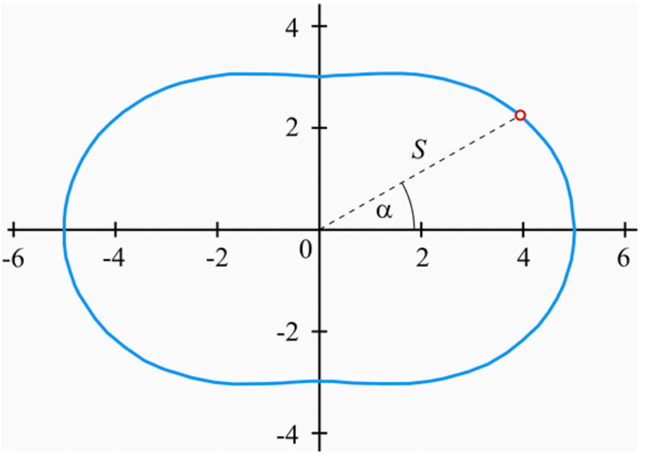
i obratno

$$\text{za } a < b \text{ i } \cos 2\alpha = 1,\ S_{\min} = a \text{ te za } \cos 2\alpha = 0,\ S_{\max} = b\,.$$

Ako je $a = b$, tada je funkcija S konstantna pa nema ekstrema, krivulja na slici 9 postaje kružnica.



Slika 8. *Prikaz funkcije* $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\alpha$ *u pravokutnom koordinatnom sustavu.*



Slika 9. *Prikaz funkcije* $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\alpha$ *u polarnom koordinatnom sustavu.*

Slučaj $d \neq 0$

Prva derivacija funkcije S po α je

$$\frac{dS}{d\alpha} = (b-a)\sin 2\alpha + 2d\cos 2\alpha \,. \tag{16}$$

Iz nužnog uvjeta za ekstrem

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0$$

slijedi

$$\tan 2\alpha = \frac{2d}{a-b} \tag{17}$$

i odatle zbog periodičnosti funkcije tangens možemo izračunati najprije rješenja $2\alpha + n\pi$, a zatim $\alpha + n\frac{\pi}{2}$, gdje je n bilo koji cijeli broj. Iz naravi problema slijedi da je dovoljno odrediti kutove α i $\alpha+\frac{\pi}{2}$ ili $\alpha-\frac{\pi}{2}$.

Uočimo najprije da iz (13) i (14) slijedi

$$\tan\alpha = \frac{l}{k} = -\frac{d}{a-\lambda} = \frac{-(a-b)\pm\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2d} = \frac{b-a}{2d} \pm \sqrt{1+\left(\frac{b-a}{2d}\right)^2}\,. \tag{18}$$

Lako se vidi da je

$$(\tan\alpha)_1(\tan\alpha)_2 = \left[\frac{b-a}{2d} + \sqrt{1+\left(\frac{b-a}{2d}\right)^2}\right]\left[\frac{b-a}{2d} - \sqrt{1+\left(\frac{b-a}{2d}\right)^2}\right] = -1\,,$$

što je u skladu s prije utvrđenom činjenicom da su smjerovi koji određuju ekstremne vrijednosti međusobno okomiti. Nadalje,

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2d}{a-b}\,,$$

a to je izraz (17), do kojeg smo sada došli na drugi način. Međutim, i dalje tražimo odgovor na pitanje u kojem je smjeru maksimum, a u kojem minimum funkcije koju istražujemo. S obzirom na to da je u (15) definirana funkcija jedne varijable, poslužit ćemo se znanjem iz matematičke analize prema kojem odgovor na to pitanje daje predznak druge derivacije funkcije u stacionarnoj točki. Stoga odredimo drugu derivaciju funkcije S derivirajući prvu derivaciju izraženu izrazom (16):

$$\frac{d^2S}{d\alpha^2} = 2(b-a)\cos 2\alpha - 4d\sin 2\alpha\,. \tag{19}$$

Uzme li se u obzir poznate relacije među trigonometrijskim funkcijama

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \quad \text{i} \quad \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

izraz (19) može se transformirati u

$$\frac{d^2S}{d\alpha^2} = -\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\frac{(a-b)^2+4d^2}{d} \tag{20}$$

iz kojeg se vidi da predznak $\frac{d^2S}{d\alpha^2}$ ovisi samo o predznacima od d i $\tan\alpha$. No kako je prema (18)

$$\tan\alpha = \frac{b-a}{2d} \pm \sqrt{1+\left(\frac{b-a}{2d}\right)^2},$$

to je jasno da će biti $\frac{d^2S}{d\alpha^2} > 0$ ako uzmemo $\tan\alpha = \frac{b-a}{2d} - \sqrt{1+\left(\frac{b-a}{2d}\right)^2}$ te da će biti $\frac{d^2S}{d\alpha^2} < 0$ za $\tan\alpha = \frac{b-a}{2d} + \sqrt{1+\left(\frac{b-a}{2d}\right)^2}$.

Dakle, minimum funkcije $S = S(\alpha)$ definirane s (14) postiže se za onaj α_1 za koji je

$$\tan\alpha_1 = \frac{b-a}{2d} - \sqrt{1+\left(\frac{b-a}{2d}\right)^2}.$$

Odgovarajuća minimalna vrijednost funkcije $S = S(\alpha)$ iznosi

$$S_{\min} = S(\alpha_1) = d\tan\alpha_1 + a = \frac{a+b-\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2}.$$

Analogno tome, maksimum funkcije $S = S(\alpha)$ definirane s (15) postiže se za onaj α_2 za koji je

$$\tan\alpha_2 = \frac{b-a}{2d} + \sqrt{1+\left(\frac{b-a}{2d}\right)^2}.$$

Odgovarajuća maksimalna vrijednost funkcije $S = S(\alpha)$ iznosi

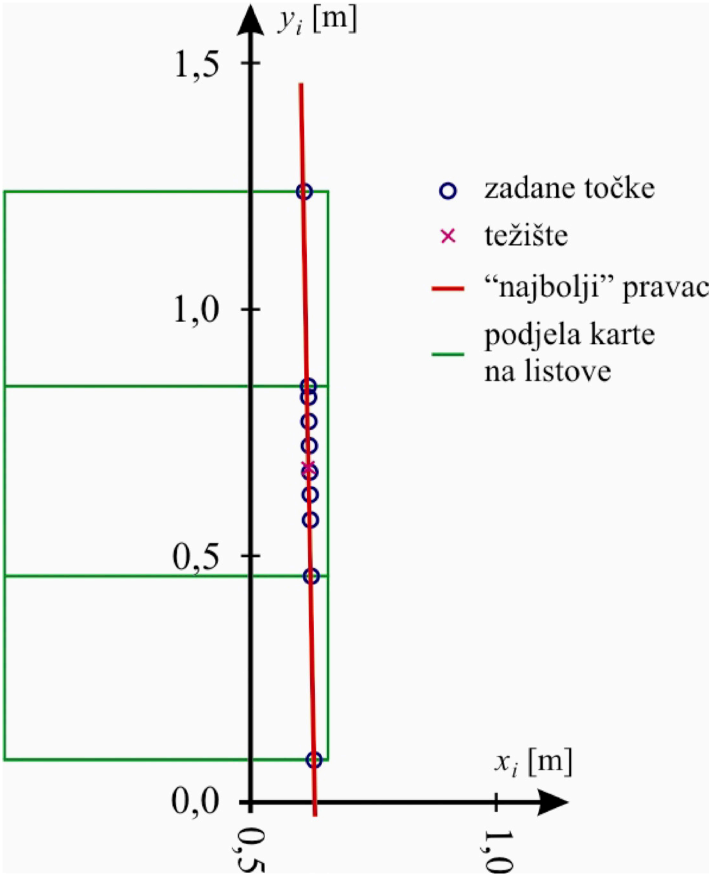
$$S_{\max} = S(\alpha_2) = d\tan\alpha_2 + a = \frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2}.$$

Spomenimo još da bi se do traženog rješenja moglo doći i uspoređivanjem dviju stacionarnih vrijednosti funkcije S i odabirom one koja je manja i zatim pripadnoga kuta α.

Primjer 2.

Kartografska projekcija u kojoj je izrađena *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* J. R. Boškovića i Ch. Mairea još je uvijek nepoznata. Meridijani na toj karti podsjećaju na ravne crte što je slučaj samo u konusnim i azimutnim projekcijama. Pravocrtnost slika meridijana na toj karti ispitali smo primjenom metode euklidskih udaljenosti. Za svaki meridijan odredili smo jednadžbu pravca najbolje prilagođenog skupu točaka čije su koordinate očitane s meridijana nacrtanih na karti. Za ilustraciju dajemo prikaz određivanja najpovoljnijeg pravca na primjeru najistočnijeg meridijana nacrtanog na toj karti.

Izvorna karta sastoji se od tri lista koji su najprije spojeni u cjelinu u digitalnom obliku i uz pomoć nanoCAD-a. Donji lijevi rub karte postavljen je u ishodište koordinatnog sustava radne površine, a odabrana je mjerna jedinica metar. Uzduž najistočnijeg meridijana na dobro vidljivim mjestima odabrano je 10 točaka, čije



Slika 10. *Skica pravca prilagođenoga najistočnijemu meridijanu na karti Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.*

smo vrijednosti očitali (slika 10). Koordinate su tih točaka (x_i, y_i) (tablica 1, drugi i treći stupac). Odabrane su sve točke na meridijanu čije su se koordinate mogle pročitati s karte. Između prvih dviju i posljednjih dviju točaka meridijan nije iscrtan zbog drugog sadržaja na karti (kartuša, posveta) pa zbog toga skup zadanih točaka nije jednoliko raspoređen.

Iz tablice 1 možemo primijetiti da točka 6 ima najveće odstupanje koje iznosi 0,00036 m, dok je najmanje odstupanje u točki 7 i ono iznosi 0,00002 m. Standardna devijacija za taj skup podataka iznosi 0,0001 m.

Vrijednosti kvadrata euklidskih udaljenosti točaka od pravca (tablica 1, četvrti stupac) izračunane su primjenom izraza (4). Težište, pomoćne veličine i komponente vektora smjera pravca (tablica 2) izračunane su primjenom izraza (7), (9), (12) i (13).

Tablica 1. *Koordinate točaka (x_i, y_i) i euklidske udaljenosti (d_i) od tih točaka do prilagođenog pravca.*

Broj točke	x_i **[m]**	y_i **[m]**	d_i^2 **[m²]**	d_i **[m]**
1	0,60966	1,24822	3,53051E-08	0,00019
2	0,61682	0,84985	7,87289E-09	0,00009
3	0,61713	0,83005	3,65982E-09	0,00006
4	0,61783	0,77910	1,41255E-08	0,00012
5	0,61871	0,72855	1,28634E-08	0,00011
6	0,62012	0,67397	1,26953E-07	0,00036
7	0,62053	0,62872	5,64958E-10	0,00002
8	0,62151	0,57778	6,24058E-09	0,00008
9	0,62347	0,46389	4,59551E-09	0,00007
10	0,62970	0,08705	4,34244E-08	0,00021
$\sum$	6,19547	6,86719	2,55605E-07	0,00130
			$\sum d_i/n$	0,00013

Tablica 2. *Težište, pomoćne veličine i komponente vektora smjera pravca.*

Parametar	**Vrijednost**
$\overline{x}$	0,61955 [m]
$\overline{y}$	0,68672 [m]
a	0,79738 [m²]
b	0,00024 [m²]
d	0,01378 [m²]
λ	2,55605E-07 [m²]
k	0,01728
l	–0,99985

Uvrste li se vrijednosti iz tablice 2 u izraz (1), jednadžba pravca u kanonskom obliku za promatrani meridijan glasi

$$\frac{x-0,61955}{0,01728}=\frac{y-0,68672}{-0,99985}.$$

Prosječno odstupanje točaka od pravca iznosi 0,00013 m, odnosno desetinku milimetra. Slične vrijednosti prosječnog odstupanja dobiju se i za ostale meridijane nacrtane na karti, uvijek oko desetinke milimetra. S obzirom na dobivene vrijednosti možemo zaključiti da su meridijani nacrtani na karti pravci, a ne krivulje.

Meridijani se u projekciji sijeku pod kutom od 13', dok se s karte može pročitati da na sferi zatvaraju kut od 20'. S obzirom na to zaključujemo da je karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* izrađena u nekoj konusnoj projekciji. Detaljan postupak određivanja koordinata točke u kojoj se meridijani sijeku i kuta pod kojim se meridijani sijeku opisan je u disertaciji M. Triplat Horvat (2014).

3. Zaključak

Problem određivanja parametara pravca koji se po metodi euklidskih udaljenosti najbolje prilagođava zadanom skupu točaka u ravnini nije linearan, ali se može svesti na traženje ekstremnih vrijednosti funkcije jedne varijable i zatim na rješavanje kvadratne jednadžbe. Najstariji poznati objavljeni članak na tu temu je Adcockov iz 1878. godine, no u njemu ima i tiskarskih i stvarnih pogrešaka pa mu treba pristupiti s oprezom. U ovome su radu izvedene formule koje daju traženo rješenje bez dodatnih ispitivanja. Primjena tih formula provjerena je na primjerima određivanja jednadžbi pravaca koji se po metodi euklidskih udaljenosti najbolje prilagođuju skupovima točaka koji reprezentiraju meridijane nacrtane u još nepoznatoj kartografskoj projekciji na karti J. R. Boškovića i Ch. Mairea *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* iz 1755. godine. U ovome radu detaljno je prikazano određivanje najboljeg pravca za jedan takav meridijan.

Razmatrani problem moguće je poopćiti na 3-dimenzionalni prostor (Jovičić i dr. 1982), a moguće je također i uvođenje različitih težina pojedinih točaka i/ili koordinata (Lapaine 1989) te određivanje procjene točnosti izračunanih veličina. To su moguće teme kojima bi se mogla proširiti dosadašnja istraživanja.

ZAHVALA. Autori zahvaljuju recenzentima koji su pažljivim čitanjem i vrijednim komentarima pridonijeli da konačan tekst ovoga članka bude znatno bolji od prve verzije rukopisa.

Literatura

Adcock, R. J. (1878): A Problem in Least Squares, The Analyst, Vol. 5, No. 2, 53–54.

Borčić, B. (1964–65): Karta Crkvene države u djelu Ruđera Boškovića "De litteraria expeditione per pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam", Almanah Bošković, Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, 185–196.

Bronštejn, I. N., Semendjajev, K. A. (1964): Matematički priručnik, Tehnička knjiga, Zagreb.

Frančula, N., Lapaine, M. (2008): Geodetsko-geoinformatički rječnik, Državna geodetska uprava, Zagreb.

Jovičić, D., Lapaine, M., Petrović, S. (1982): Prilagođavanje pravca skupu točaka prostora, Geodetski list, 10–12, 260–266.

Kurepa, S. (1975): Matematička analiza, Funkcije više varijabli, Tehnička knjiga, Zagreb.

Lapaine, M. (1989): An Algorithm for the Least-Squares Fitting of a Straight Line to Correlated Observations, Vortragsauszuge: XII. österreichischer Mathematikerkongress, Sektion 10, Angewandte Mathematik, Wien, Österreichische Mathematische Gesellschaft, Vortragsauszug.

Petrović, S., Lapaine, M., Jovičić, D., Žarinac-Frančula, B. (1983): Prilagođavanje pravca, Zbornik radova 5. međunarodnog simpozija Kompjuter na sveučilištu, Cavtat, Sveučilišni računski centar Zagreb, 529–535.

Triplat Horvat, M. (2014): Kartografska analiza karata Papinske Države J. R. Boškovića i Ch. Mairea, doktorska disertacija, rukopis, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Wolf, H. (1941): Beitrag zur Bestimmung der Gleichung der plausibelsten Geraden einer fehlerzeigenden Puktreihe, Zeitschrift für Vermessungswesen, 70, 411–431.

Rectilinearity Determination of a Planar Point Set

ABSTRACT. This paper analyses the problem of determining parameters of a straight line by the method of Euclidean distances that best fit the given set of points in a plane. It is shown that the problem is not linear. However, the method of linearization, which is frequently applied in geodesy, is not applied. Instead, extreme values of the functions of one variable are found and finally quadratic equation is solved exactly. Furthermore, sufficient conditions for the extreme of the function are explored and it is shown that the problem generally has two solutions, one minimum and one maximum. To illustrate the described method, derived formulas were applied to determine the equation of the straight line which, by the Euclidean distance method, best fits the point set which represents a meridian drawn in an unknown map projection of J. R. Bošković's and Ch. Maire's map Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico published in 1755.

Keywords: alignment, straight line fitting, Euclidean distance.

Primljeno: 2013-12-11

Prihvaćeno: 2014-04-26