math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Matrice traga nula

komutator **linearna algebra**

Marijana Kožul i Rajna Rajić

marijana55@gmail.com , rajna.rajic@rgn.hr

Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Pierottijeva 6, Zagreb

Sažetak

U ovom radu dajemo prikaz osnovnih rezultata o kompleksnim kvadratnim matricama čiji trag je jednak nuli. Također karakteriziramo hermitske matrice traga nula i dajemo ocjene za njihove norme.

1 Uvod

Neka je $\mathbb{C}^n$ unitaran prostor snabdjeven skalarnim produktom

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i,$$

gdje su $x = (x_1, \ldots, x_n)$,$y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Euklidska norma vektora $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ definira se kao

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Označimo s $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ algebru svih kompleksnih kvadratnih matrica reda n. Poznato je da se algebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, preko standardne ortonormirane baze $(e_1, \ldots, e_n)$ prostora $\mathbb{C}^n$, poistovjećuje s algebrom $B(\mathbb{C}^n)$ svih linearnih operatora koji djeluju na $\mathbb{C}^n$. Vektore prostora $\mathbb{C}^n$ shvaćamo kao jednostupčane matrice.

Trag matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, u oznaci $\mathrm{tr}(A)$, definira se kao zbroj njezinih dijagonalnih elemenata

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Pokazuje se da je trag matrice jednak zbroju njezinih svojstvenih vrijednosti.
Preslikavanje $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ je linearan funkcional na prostoru $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, tj. vrijedi

$$\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{tr}(A) + \beta \mathrm{tr}(B)$$

za sve $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Također, za kompleksne kvadratne matrice A i B istoga reda vrijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(BA), \\ \operatorname{tr}(A^T) &= \operatorname{tr}(A), \\ \operatorname{tr}(A^*) &= \overline{\operatorname{tr}(A)} \end{aligned}$$

gdje smo s A^T označili transponiranu, a s A^* adjungiranu matricu matrice A. Prostor $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je unitaran uz skalarni produkt definiran s

$$(A|B) = \operatorname{tr}(B^* A) \quad (A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})).$$

Ovako definiran skalarni produkt je ekvivalentan euklidskom skalarnom produktu na $\mathbb{C}^{n \times n}$.

U daljnjem ćemo hermitski dio kvadratne matrice A, tj. matricu $\frac{1}{2}(A + A^*)$, po analogiji s kompleksnim brojevima označavati s $\operatorname{Re}(A)$. Prema tome, $\operatorname{Re}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$. Oznaku $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ koristit ćemo za dijagonalnu matricu reda n s elementima na glavnoj dijagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Sa $\sigma(A)$ označavat ćemo spektar kvadratne matrice A.

Pozitivan drugi korijen pozitivno semidefinitne matrice A uvodimo koristeći spektralni račun. Neka je $A = UDU^*$, gdje je $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, spektralni rastav matrice A. Definiramo dijagonalnu matricu

$$D^{1/2} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2}).$$

Tada je pozitivno semidefinitna matrica

$$A^{1/2} = UD^{1/2}U^*$$

jedinstveno pozitivno semidefinitno rješenje jednadžbe $X^2 = A$, koje nazivamo pozitivan drugi korijen matrice A. Apsolutnom vrijednošću matrice A, u oznaci $|A|$, nazivamo pozitivan drugi korijen matrice $A^* A$. Dakle, $|A| = (A^* A)^{1/2}$. Pokazuje se da za svaku kompleksnu kvadratnu matricu A reda n postoji unitarna matrica U reda n takva da je $A = U|A|$. Ovaj se rastav naziva polarni rastav matrice A (v. Teorem 3.7 iz [24]).

U ovom radu dat ćemo pregled osnovnih rezultata o kvadratnim matricama čiji trag je jednak nuli. Pokazat ćemo da je A matrica traga nula ako i samo ako je A komutator dviju matrica. Također, svaka je matrica traga nula unitarno slična matrici čija se dijagonala sastoji od samih nula. Posebno ćemo proučiti hermitske matrice traga nula; okarakterizirati ih, te dati ocjene za operatorsku normu takvih matrica.

Članak se temelji na diplomskom radu [18], koji se pak temelji na rezultatima koji se mogu naći u [1, 7, 8, 11, 15, 16, 24].

2 Karakterizacije matrica traga nula

Budući da je trag linearan funkcional na vektorskom prostoru $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, to je skup svih kvadratnih matrica reda n čiji je trag jednak nuli potprostor prostora $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Naime, ako su $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, te ako je $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 0$, tada je

$$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\text{tr}(A) + \beta\text{tr}(B) = 0$$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Izračunat ćemo dimenziju tog potprostora.

Propozicija 1. *Vektorski potprostor $V \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ svih kompleksnih kvadratnih matrica reda n čiji je trag jednak nuli ima dimenziju* $\dim V = n^2 - 1$.

Dokaz.. Označimo s $E_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$, matrice reda n čiji je (i, j)-ti element jednak jedan, dok su svi ostali elementi nule. Neka je $M_i = E_{ii} - E_{nn}, i = 1, \ldots, n-1$. Tada su matrice $E_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, i matrice $M_i, i = 1, \ldots, n-1$, elementi prostora V. Lako se provjeri da je ovih $(n^2 - n) + (n - 1) = n^2 - 1$ matrica linearno nezavisno. Nadalje, svaka se matrica $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ čiji je trag jednak nuli može prikazati kao

$$A = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_{ij} E_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} M_i,$$

jer je $\text{tr}(A) = 0$ ekvivalentno s $a_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}$. Zaključujemo da je $\dim V = n^2 - 1$ što se i tvrdilo. ■

Primjer 2. *Nilpotentna matrica, tj. matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ takva da je $A^k = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$, je primjer matrice traga nula, budući da su sve njezine svojstvene vrijednosti jednake nuli.*

Primjer 3. *Jedina pozitivno semidefinitna matrica traga nula je nul-matrica. Zaista, ako je trag pozitivno semidefinitne matrice jednak nuli, tada su sve njezine svojstvene vrijednosti jednake nuli. Prema tome, takva je matrica unitarno slična nul-matrici, dakle i sama je nul-matrica. Štoviše, ako je $A = BC$ umnožak dviju pozitivno semidefinitnih matrica $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, pri čemu je $\text{tr}(A) = 0$, tada je $A = 0$. Naime, kako je $B = T^*T$ i $C = S^*S$ za neke matrice $T, S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ (v. Teorem 7.3 iz [24]), to vrijedi*

$$\begin{aligned}
\text{tr}(A) &= \text{tr}(BC) \\
&= \text{tr}(T^*TS^*S) \\
&= \text{tr}(ST^*TS^*) \\
&= \text{tr}\big((TS^*)^*(TS^*)\big).
\end{aligned}$$

Ako je $\text{tr}(A) = 0$, slijedi $(TS^*)^*(TS^*) = 0$ jer je matrica $(TS^*)^*(TS^*)$ pozitivno semidefinitna. Stoga je $TS^* = 0$ odakle pak dobivamo $A = BC = T^*TS^*S = 0$.

Napomenimo da je umnožak dviju hermitskih (odnosno pozitivno semidefinitnih) matrica hermitska (odnosno pozitivno semidefinitna) matrica ako i samo ako te matrice komutiraju (v. Korolar 10 iz [19]). Inače, proučavanje umnoška hermitske i pozitivno semidefinitne matrice je netrivijalno pitanje ([14, 21, 23]).

Definicija 4. *Komutator kompleksnih kvadratnih matrica A i B reda n, u oznaci $[A, B]$, je matrica koju definiramo formulom* $[A, B] := AB - BA$.

Kako je $\text{tr}(TS) = \text{tr}(ST)$, komutatori su primjer matrica čiji je trag jednak nuli. Možemo se zapitati opisuje li to svojstvo u potpunosti komutatore, odnosno je li svaka matrica traga nula komutator dviju matrica. Uočimo najprije da je odgovor potvrdan za dijagonalnu matricu $A = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ traga nula, budući da je jedan mogući izbor matrica T i S takvih da je $A = [T, S]$ dan s

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

gdje su $\mu_i = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j, i = 1, \dots, n-1$.

Promotrimo sada matricu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ traga nula, takvu da je $a_{ii} = 0, i = 1, \dots, n$. Izaberimo zatim matricu $T = \mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n)$, gdje su $t_1, \dots, t_n$ proizvoljni, ali međusobno različiti kompleksni brojevi. Neka je $S = (s_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, gdje je

$$s_{ij} := \frac{a_{ij}}{t_i - t_j}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n,$$

a $s_{ii}, i = 1, \dots, n$, su proizvoljni kompleksni brojevi. Lako se provjeri da je (i, j)-ti element matrice $TS - ST$ jednak $(t_i - t_j)s_{ij} = a_{ij}$, pa je prema tome $A = TS - ST$. Time smo pokazali da je matrica čiji su svi dijagonalni elementi jednaki nuli komutator dviju matrica.

Primijetimo da je svojstvo "biti komutator" invarijanta sličnosti. Naime, ako je $A = [T, S]$ za neke matrice $T, S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, tada je

$$\begin{aligned} R^{-1}AR &= R^{-1}(TS - ST)R \\ &= (R^{-1}TR)(R^{-1}SR) - (R^{-1}SR)(R^{-1}TR) \\ &= [R^{-1}TR, R^{-1}SR] \end{aligned}$$

za svaku regularnu matricu $R \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Odavde slijedi da je i svaka matrica A koja je slična matrici čija se dijagonala sastoji od samih nula također komutator dviju matrica.

Kao primjer matrica traga nula naveli smo nilpotentne matrice. Prema teoremu o Schurovoj dekompoziciji (teorem 3.3 iz [24]) svaka je nilptotentna matrica unitarno slična matrici čija se dijagonala sastoji od samih nula, pa su stoga nilpotentne matrice komutatori dviju matrica. Pokazat ćemo sada da ovaj rezultat vrijedi i općenito, odnosno da je svaka matrica traga nula unitarno slična matrici čiji su svi dijagonalni elementi jednaki nuli. Dokaz ove tvrdnje je netrivijalan, a temelji se na svojstvu konveksnosti numeričke slike matrice.

Numerička slika, ili kako se još naziva polje vrijednosti, matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ definira se kao skup

$$W(A) = \{(Ax, x) : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}.$$

Skup $W(A)$ je kompaktan, jer je slika neprekidne funkcije $x \mapsto (Ax, x)$ definirane na jediničnoj sferi $\{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = 1\}$, koja je kompaktan skup. Također, za svaki $\lambda \in \sigma(A)$ postoji jedinični vektor $x \in \mathbb{C}^n$ za koji je $Ax = \lambda x$, odakle slijedi $\lambda = (\lambda x, x) = (Ax, x) \in W(A)$. Prema tome, numerička slika matrice sadrži njezin spektar. Kao što smo već napomenuli, jedno od osnovnih svojstava numeričke slike matrice, koje je dovelo do mnogih interesantnih posljedica i korisnih primjena, je njezina konveksnost ([13, 22]). Više rezultata o numeričkoj slici matrice zainteresirani čitatelj može naći u [15].

Konveksnom kombinacijom elemenata $x_1, \ldots, x_n$ nekog vektorskog prostora nazivamo svaki vektor oblika

$$t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n,$$

pri čemu je $t_i \geq 0$ za $i = 1, \ldots, n$ i $t_1 + \cdots + t_n = 1$. Konveksan skup sadrži svaku konveksnu kombinaciju svojih elemenata (propozicija 11, str. 37 iz [19]). Kako je $W(A)$ konveksan, te $\sigma(A) \subseteq W(A)$, zaključujemo da skup $W(A)$ sadrži sve konveksne kombinacije svojstvenih vrijednosti matrice A. Upravo na tom svojstvu zasniva se dokaz sljedeće tvrdnje o karakterizaciji matrica traga nula.

Teorem 5. *Za $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a)

tr$(A) = 0$;

(b)

A je komutator dviju matrica;

(c)

postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ takva da su svi dijagonalni elementi matrice U^*AU jednaki nuli.

Dokaz.. Tvrdnje (b)⇒(a) i (c)⇒(a) su očite.

(a)⇒(c) Tvrdnju da postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, takva da su svi dijagonalni elementi matrice U^*AU jednaki nuli, dokazujemo indukcijom po redu matrice n. Jasno je da tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

Prepostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve matrice reda $n - 1$. Neka je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Prema pretpostavci je

$$\frac{1}{n}\lambda_1 + \cdots + \frac{1}{n}\lambda_n = \frac{1}{n}\,\text{tr}(A) = 0,$$

tj. 0 je konveksna kombinacija svojstvenih vrijednosti matrice A, pa stoga $0 \in W(A)$. Tada postoji $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$, takav da je $(Ax, x) = 0$. Neka je $W \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ unitarna matrica čiji je prvi stupac vektor x; dakle $We_1 = x$. Tada vrijedi

$$(W^*AWe_1, e_1) = (AWe_1, We_1) = (Ax, x) = 0,$$

pa je

$$W^*AW = \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ v & B \end{bmatrix},$$

gdje su $u, v \in \mathbb{C}^{n-1}$,$B \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Kako je

$$0 = \text{tr}(A) = \text{tr}(W^*AW) = 0 + \text{tr}(B) = \text{tr}(B),$$

prema pretpostavci indukcije postoji unitarna matrica $V_1 \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ takva da su svi dijagonalni elementi od $V_1^*BV_1$ jednaki nuli. Definiramo $U = WV$, gdje je

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$$

unitarna matrica. Tada je

$$\begin{aligned} U^*AU &= (WV)^*A(WV) = V^*(W^*AW)V \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ v & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & u^*V_1 \\ V_1^*v & V_1^*BV_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

matrica čiji su svi dijagonalni elementi jednaki nuli.
(a)$\Rightarrow$(b) Pokazali smo da (a) povlači (c), a iz prijašnjih razmatranja jasno je da tada vrijedi i tvrdnja (b). ■

Napomena 6. *Pokazali smo da za matricu A čiji su svi dijagonalni elementi jednaki nuli postoje matrice T i S, pri čemu je T dijagonalna, pa stoga i normalna matrica, takve da je $A = [T, S]$. Štoviše, za svojstvene vrijednosti matrice T možemo izabrati bilo koje međusobno različite kompleksne brojeve. Prema prethodnom teoremu svaka je matrica A traga nula unitarno slična matrici čija se dijagonala sastoji od samih nula. Odavde zaključujemo da za svaku matricu A traga nula postoji rastav $A = [T, S]$, gdje za T možemo izabrati normalnu matricu s proizvoljnim međusobno različitim svojstvenim vrijednostima.*

Kao očitu posljedicu propozicije 1 i teorema 5 navodimo sljedeći rezultat.

Korolar 7. *Skup svih komutatora dviju matrica reda n je vektorski potprostor od $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ dimenzije $n^2 - 1$.*

3 Karakterizacije hermitskih matrica traga nula

Važnu klasu unutar komutatora čine samokomutatori, tj. hermitske matrice oblika $[T^*, T]$, gdje je $T \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

Ako je $A = [T^*, T]$ samokomutator i $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ unitarna matrica, onda je

$$\begin{aligned} U^*AU &= U^*(T^*T - TT^*)U \\ &= (U^*T^*U)(U^*TU) - (U^*TU)(U^*T^*U) \\ &= (U^*TU)^*(U^*TU) - (U^*TU)(U^*TU)^* \\ &= [(U^*TU)^*, U^*TU], \end{aligned}$$

pa je U^*AU također samokomutator. Dakle, "biti samokomutator" je invarijanta unitarne sličnosti.

Ako je A samokomutator, onda je $\mathrm{tr}(A) = 0$. Pokazat ćemo da je svaka hermitska matrica, čiji je trag jednak nuli, samokomutator.

Teorem 8. *Za hermitsku matricu $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a)

$\mathrm{tr}(A) = 0$;

(b)

A je samokomutator.

Dokaz.. Tvrdnja (b)⇒(a) je očita.

(a)⇒(b) Kako je A hermitska matrica, to postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tako da je $D = U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, gdje su $\lambda_i \in \sigma(A)$, te $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Stavimo $\mu_i = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j, i = 1, \ldots, n-1$. Budući da je $\mathrm{tr}(A) = 0$, vrijedi $\mu_i \geq 0$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Neka je

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \sqrt{\mu_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\mu_{n-1}} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}).$$

Tada je

$$\begin{aligned} T^*T - TT^* &= \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2 - \mu_1, \mu_3 - \mu_2, \ldots, \mu_{n-1} - \mu_{n-2}, -\mu_{n-1}) \\ &= \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \\ &= D, \end{aligned}$$

tj. D je samokomutator. Stoga je i $A = UDU^*$ također samokomutator. ■

U nastavku ćemo dati još neke interesantne karakterizacije hermitskih matrica traga nula.

Teorem 9. *Za hermitsku matricu $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a)

$\mathrm{tr}(A) = 0$;

(b)

$A = P - UPU^*$, gdje je $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ pozitivno semidefinitna matrica i $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ unitarna matrica;

(c)

$A = \mathrm{Re}(N)$, gdje je $N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotentna matrica.

Dokaz.. Tvrdnja (b)⇒(a) je očita.

(a)⇒(b) Prema teoremu 8 postoji $T \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tako da je $A = T^*T - TT^*$. Neka je $T = U|T|$ polarni rastav matrice T. Tada je $TT^* = U|T|^2U^*$, pa je $A = |T|^2 - U|T|^2U^*$, gdje je $P = |T|^2$ pozitivno semidefinitna matrica.

(c)⇒(a) Kako je $\mathrm{tr}(N) = 0$, vrijedi

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\mathrm{Re}(N)) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(N) + \mathrm{tr}(N^*)\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(N) + \overline{\mathrm{tr}(N)}\right) = 0.$$

(a)⇒(c) Kako je $\text{tr}(A) = 0$ to je, prema teoremu 5, $A = U^*BU$ gdje je $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ unitarna matrica, a $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ (hermitska) matrica s nulama na glavnoj dijagonali. Matrica B može se zapisati kao zbroj $B = \frac{1}{2}(M + M^*)$, pri čemu je M gornja trokutasta matrica s nulama na glavnoj dijagonali, pa je prema tome M nilpotenta matrica. Tada je $N = U^*MU$ nilpotentna matrica, te vrijedi $A = U^*BU = \frac{1}{2}(N + N^*) = \text{Re}(N)$. ■

4 Ocjene za norme samokomutatora

Na $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ uvodi se matrična (operatorska) norma inducirana euklidskom normom na $\mathbb{C}^n$;

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad (A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})).$$

Ovako definirana matrična norma je submultiplikativna, tj.

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \quad (A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})),$$

te unitarno invarijantna, tj.

$$\|UAV\| = \|A\|$$

za sve unitarne matrice $U, V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Također vrijedi

$$\|A^*\| = \|A\|, \quad \|A^*A\| = \|A\|^2.$$

Ako je matrica A normalna, onda je

$$\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

U ovoj točki dat ćemo gornju i donju ocjenu za matrične norme samokomutatora. Uočimo, za samokomutator $A = [T^*, T]$ vrijedi ocjena

$$\|A\| = \|T^*T - TT^*\| \leq \|T^*T\| + \|TT^*\| = 2\|T\|^2.$$

Međutim, ovaj pristup ne daje nam dobru gornju ocjenu. Fong [8] je dokazao da se konstanta 2 u gornjoj ocjeni može zamijeniti konstantom 1.

Teorem 10. *Ako je* $A = [T^*, T]$, *onda je* $\|A\| \leq \|T\|^2$.

Dokaz.. Kako je matrica A hermitska, to prema teorem 8.8 iz [24] postoji jedinični vektor x takav da $(Ax, x) = \|A\|$, ili postoji jedinični vektor y takav da $(Ay, y) = -\|A\|$. U prvom slučaju imamo

$$\|T\|^2 \geq \|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (TT^*x, x) + (Ax, x) \geq \|A\|,$$

dok je u drugom slučaju

$$\|T\|^2 = \|T^*\|^2 \geq \|T^*y\|^2 = (T^*y, T^*y) = (TT^*y, y) = (T^*Ty, y) - (Ay, y) \geq \|A\|.$$

Time je teorem dokazan. ■

Za donju ocjenu norme samokomutatora koristit ćemo nejednakost

$$\|A + B\| \leq \max\{\|A\|, \|B\|\} + \|A^{1/2}B^{1/2}\| \qquad (1)$$

koja vrijedi za svake dvije pozitivno semidefinitne matrice

$A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, a čiji se dokaz može pronaći u [17].

Teorem 11. *Ako je* $A = [T^*, T]$, *onda je* $\|A\| \geq \|T\|^2 - \|T^2\| \geq 0$.

Dokaz.. Neka je $T = U|T|$ polarni rastav matrice T. Budući da su matrice $|T|$ i $U|T|U^*$ pozitivno semidefinitne, prema (1) vrijedi

$$\begin{aligned}
\|T^*T + TT^*\| &= \left\| |T|^2 + U|T|^2U^* \right\| \\
&= \left\| |T|^2 + (U|T|U^*)^2 \right\| \\
&\leq \max\left\{ \left\| |T|^2 \right\|, \left\| (U|T|U^*)^2 \right\| \right\} + \| |T|U|T|U^* \| \\
&= \left\| |T|^2 \right\| + \|U|T|U|T|U^*U\| \\
&= \|T^*T\| + \|U|T|U|T|\| \\
&= \|T\|^2 + \left\|T^2\right\|.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \|T^*T - TT^*\| \\
&= \|T^*T + TT^* - 2TT^*\| \\
&\geq 2\,\|TT^*\| - \|T^*T + TT^*\| \\
&\geq 2\|T\|^2 - \left(\|T\|^2 + \left\|T^2\right\|\right) \\
&= \|T\|^2 - \left\|T^2\right\|,
\end{aligned}$$

što se i tvrdilo. ■

Napomena 12. *(a) Primijetimo da za normalnu matricu* T *imamo* $A = [T^*, T] = T^*T - TT^* = 0$, *pa teorem 11 kaže da vrijedi* $\|T\|^2 = \|T^2\|$, *što je dobro poznata činjenica (v. vidi str. 178 iz* [11]*).*

(b) Ocjene dane teoremima 10 i 11 su oštre. Zaista, za nilpotentnu matricu T *čiji je indeks nilpotentnosti dva, postižu se jednakosti*

$$\|T\|^2 - \|T^2\| = \|T^*T - TT^*\| = \|T\|^2.$$

5 Generalizacije

Pojam traga ne može se općenito definirati za operatore koji djeluju na beskonačno-dimenzionalnim prostorima. Ipak, prirodno se zapitati mogu li se rezultati o karakterizaciji komutatora i samokomutatora generalizirati i za takve operatore. Puno je zanimljivih radova napisano na tu temu (v. [2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 20]). Jedna od značajnih karakterizacija komutatora može se naći u [4, 12], gdje je pokazano da je ograničen linearan operator A koji djeluje na beskonačno-dimenzionalnom Hilbertovom prostoru H komutator dvaju operatora ako i samo ako A nije kompaktna perturbacija (različitog od nule) skalarnog operatora, tj. ako A nije oblika $K + \lambda I$, gdje je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,$K$ kompaktan operator na H, a I jedinični operator na H. (Ograničen linearan operator K na Hilbertovom prostoru H je kompaktan ako i samo ako za svaki ograničen niz (x_n) u H, niz (Kx_n) u H ima konvergentan podniz.) Također su važne karakterizacije komutatora na beskonačno-dimenzionalnom Hilbertovom prostoru dobivene u terminima njegove esencijalne numeričke slike, odnosno nul-dijagonalnih operatora ([2, 5, 6, 20]).

Bibliografija

[1]

A. A. Albert, B. Muckenhoupt, On matrices of trace zero, Michigan Math. J. 4 (1957), 1–3.

[2]

J. H. Anderson, Derivations, commutators, and the essential numerical range, Thesis, Indiana University, 1971.

[3]

J. H. Anderson, J. G. Stampfli, Commutators and compressions, Israel J. Math. 10 (1971), 433–441.

[4]

A. Brown, C. Pearcy, Structure of commutators of operators, Ann. of Math. 82 (1965), 112–127.

[5]

P. Fan, On the diagonal of an operator, Trans. Amer. Math. Soc. 283 (1) (1984), 239–251.

[6]

P. Fan, C.-K. Fong, Which operators are the self-commutators of compact operators?, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1) (1980), 58–60.

[7]

P. A. Fillmore, C. K. Fong, A. R. Sourour, Real parts of quasi-nilpotent operators, Proc. Edinb. Math. Soc. 22 (1979), 263–269.

[8]

C. K. Fong, Norm estimates related to self-commutators, Linear Algebra Appl. 74 (1986), 151–156.

[9]

P. R. Halmos, Commutators of operators, Amer. J. Math. 74 (1952), 237–240.

[10]

P. R. Halmos, Commutators of operators II, Amer. J. Math. 76 (1954), 191–198.

[11]

P. R. Halmos, Finite-Dimensional Vector Spaces, Springer-Verlag, New York, 1974.

[12]

P. R. Halmos, A glimpse into Hilbert space, Lectures on Modern Mathematics, Vol. I, Wiley, New York, 1963.

[13]

F. Hausdorff, Das Wertvorrat einer Bilinearform, Math. Zeit. 3 (1919), 314–316.

[14]

Y. Hong, R. A. Horn, The Jordan canonical form of a product of a Hermitian and a positive semidefinite matrix, Linear Algebra Appl. 147 (1991), 373–386.

[15]

R. A. Horn, C. R. Johnson, Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[16]

F. Kittaneh, Commutator inequalities associated with the polar decomposition, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (5) (2001), 1279–1283.

[17]

F. Kittaneh, Norm inequalities for certain operator sums, J. Funct. Anal. 143 (1997), 337–348.

[18]

M. Kožul, Hermitske matrice, diplomski rad, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2013.

[19]

S. Kurepa, Funkcionalna analiza. Elementi teorije operatora, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[20]

H. Radjavi, Structure of $A^*A - AA^*$, J. Math. Mech. 16 (1) (1966), 19–26.

[21]

W. Rehder, On the product of self-adjoint operators, Internat. J. Math. & Math. Sci. 5 (4) (1982), 813–816.

[22]

O. Toeplitz, Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér, Math. Zeit. 2 (1918), 187–197.

[23]

P. Y. Wu, Products of positive semidefinite matrices, Linear Algebra Appl. 111 (1988), 53–61.

[24]

F. Zhang, Mathrix Theory. Basic Results and Techniques, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 2011.

ISSN 1334-6083