Mostovi Kaliningrada nekad i sada

Matej Kopić*, Antoaneta Klobučar†

Sažetak. *U ovom radu su najprije dane stvarne situacije oko Kalingradskih mostova kroz povijest. Nakon toga je dano Eulerovo rješenje problema, Eulerov teorem za opći slučaj te Fleuryjev algoritam.*

Ključne riječi: *Kalingradski mostovi, Eulerova staza, Eulerova tura*

Bridges of Kaliningrad in the past and today

Abstract. *In this paper the history of Kaliningrad's bridges is described first. After that Euler's solution of the problem is given, and then Euler's theorem and Fleury's algorithm.*

Key words: *Bridges of Kaliningrad, Eulerian trails, Eulerian tours*

1. Uvod

Königsberg, nekadašnji glavni grad Istočne Pruske, danas je poznat kao ruski grad Kaliningrad. Grad je izgrađen s obje strane rijeke Pregel i na dva riječna otoka. Veći otok naziva se Kniephof. Sedam mostova povezuje obje strane rijeke i otoke.

Ljudi su pokušavali pronaći način da prijeđu svih sedam mostova tako da svaki most prijeđu točno jedanput i da se vrate u polaznu točku, ali bezuspješno. Taj problem privukao je pozornost švicarskom matematičaru Leonhardu Euleru, koji je 1735. godine predstavio rješenje problema. Objasnio je zašto nije moguće pronaći put.

Kroz povijest raspored i broj mostova se mijenjao. Sve do 1875. godine struktura mostova je bila kao u Eulerovo vrijeme i nije bilo moguće prijeći ih točno jednom. 1930. godine broj mostova s orginalnih sedam se povećao na deset. Razmatranja su pokazala da je tad postojalo traženo rješenje problema. Sve do par godina prije početka sadašnjeg tisućljeća broj mostova ostaje nepromijenjen, a tada ponovno dolazi do promjena, pa će problem opet biti bez rješenja. 2005. godine Kraljevski most je obnovljen u čast 750-te godišnjice grada pa je tražena šetnja opet bila moguća. Poljska putnička agencija Pawel Skrzynski ju je izvela.

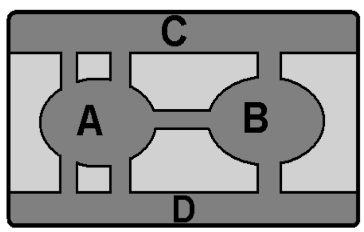
*student Odjela za matematiku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, E-mail: `Matej.Kopic@mathos.hr`

†Odjel za matematiku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, E-mail: `Antoaneta.Klobucar@mathos.hr`

Slika 1. Raspored mostova u Eulerovo doba

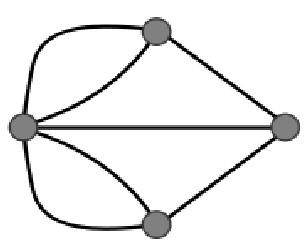
2. Eulerovo rješenje problema

Euler je problem riješio na slijedeći način: promatrao je niz slova A, B, C, D koji predstavljaju kopno (otoke i obale) - vidi sliku 2. Konstruirao je model računanja da dokaže da ne postoji takav niz koji zadovoljava tražene uvjete, time dokazujući da problem Königsberških mostova nema rješenje.



Slika 2.

Ako kopna A, B, C, D stisnemo u točke i povežemo ih linijama (mostovima) dobivamo graf.



Slika 3.

Rješenje problema Euler je stavio na papir i odnio ga na Akademiju znanosti u St. Petersburg 1735. godine.

Pri tome je formirao tri glavna zaključka:

- Ako je bilo koje kopno (obala ili otok) povezano s nekim drugim kopnom neparnim brojem mostova, tada kružno putovanje koje prelazi svaki most točno jedanput nije moguće.
- Ako je broj mostova neparan za točno dva kopna, tada je putovanje koje prelazi svaki most točno jedanput moguće samo ako putovanje počinje u jednom, a završava u drugom kopnu s neparnim brojem mostova.
- Ako nema kopna povezanog s neparnim brojem mostova putovanje može početi iz bilo kojeg kopna i završiti u tom istom kopnu.

Euler je dao heurističke razloge za točnost prvog zaključka. Da bi završio kružno putovanje oko obala prelazeći svaki most točno jedanput, onda za svaki ulazni most mora postojati izlazni.

Rješenje problema Königsberških mostova dovodi do rađanja matematičke grane zvane teorija grafova, koja pronalazi uporabu u područjima od strojarstva pa sve do socijalnih znanosti.

U teoriji grafova šetnja predstavlja proizvoljan obilazak vrhova i bridova na grafu (naizmjenično) ali bez preskakanja. Eulerovom stazom se naziva šetnja po grafu koja svakim bridom prolazi točno jedanput. Zatvorena Eulerova staza (početak i kraj su isti) naziva se Eulerova tura. Povezani graf je graf u kojem za svaka dva vrha na grafu postoji šetnja koja iz jednog vrha vodi u drugi. Povezani graf u kojem postoji Eulerova tura naziva se Eulerov graf. Treba istaknuti da ukoliko postoji Eulerova tura nije nužno jedinstvena.

Rezultat dobiven u problemu Königsberških mostova je generaliziran kao Eulerov teorem:

Teorem 1. Povezan graf **G** je Eulerov ako i samo ako su svi vrhovi od **G** parnog stupnja (odnosno svaki vrh se "nalazi" na parnom broju bridova).

Dokaz: Teorem se dokazuje u dva smjera.

a) Prvo pretpostavimo da je graf Eulerov, što znači da postoji Eulerova tura na grafu. Uzmimo da ona počinje (i završava) u nekom vrhu **v**. Svaki unutarnji vrh (onaj koji nije ni početak ni kraj te ture) u svakom pojavljivanju ima brid koji ulazi i izlazi iz njega - znači stupanj mu je paran. Isto tako, pošto tura počinje i završava u vrhu **v** i njegov stupanj je paran (a svi su bridovi obuhvaćeni), pa su svi vrhovi parnog stupnja.

b) Neka su svi vrhovi grafa **G** parnog stupnja i neka je graf povezan. Pretpostavimo da **G** nije Eulerov. Odaberimo takav graf sa najmanjim mogućim brojem bridova. Pošto su svi vrhovi na **G** parnog stupnja, stupanj svakog vrha je veći ili jednak 2. Može se lako vidjeti da tada graf sadrži ciklus (zatvorenu stazu). Neka je **C** zatvorena staza u **G** maksimalne duljine. Pošto **C** nije Eulerova tura od **G**, postoje bridovi iz grafa **G** koji nisu u stazi **C** - taj dio grafa **G** označit ćemo sa **G'**. Svi vrhovi na **C** su parnog stupnja, pa povezan graf **G'** također nema vrh neparnog stupnja. Pošto je **G'** graf koji ima manje bridova od **G** i iz odabira da je **G** graf sa najmanje bridova koji ne sadrži Eulerovu turu, slijedi da na **G'** postoji Eulerova tura **C'**. Kako je **G** povezan, postoji vrh **v** koji se nalazi i u **C** i u **C'**. Može se pretpostaviti da je **v** kraj od **C** i početak od **C'**. No, tada je **CC'** zatvorena staza u **G** veća od **C**, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je **C** najveća takva zatvorena staza. Slijedi da je **G** Eulerov graf.

□

Na osnovu Teorema 1. slijedi

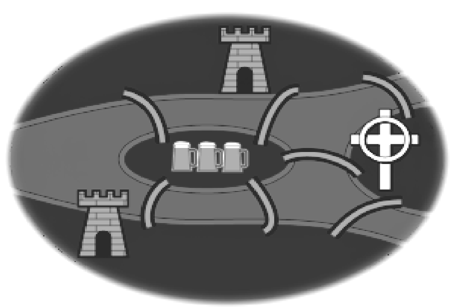
Korolar 1. Povezani graf **G** ima Eulerovu stazu ako i samo ako ima najviše dva vrha neparnog stupnja (početak i kraj staze)

a)Ako **G** ima Eulerovu stazu, tada kao u dokazu Teorema 1., svaki vrh koji nije početak ili kraj te staze ima paran stupanj.

b) Pretpostavimo da je **G** povezan graf s najviše dva vrha neparnog stupnja. Ako uopće nema takvih vrhova onda prema Teoremu 1. ima zatvorenu Eulerovu stazu. Ako postoje vrhovi neparnog stupnja onda ih mora biti točno dva jer je suma stupnjeva vrhova paran broj. Neka su to **u** i **v**. Spojimo ta dva vrha bridom **e** i promatramo graf **G+e**. Svaki vrh iz **G+e** ima paran stupanj pa po Teoremu 1. na grafu postoji Eulerova tura. Ako iz te ture sad izbacimo brid **e** dobivamo Eulerovu stazu na **G**.

□

Iz promatranog slijedi da se problem Königsbergških mostova zapravo sastoji u ispitivanju sadrži li jedan specifičan graf s 4 vrha i 7 bridova Eulerovu turu ili ne. Graf koji odgovara grafu Konigsberških mostova ima četiri vrha neparnog stupnja pa ne može imati Eulerovu turu, a ni stazu.



Slika 4.

3. Nalaženje Eulerove ture na grafu

Očigledno je posve lako utvrditi je li graf sadrži ili ne sadrži Eulerovu stazu odnosno Eulerovu turu. U slučaju pozitivnog odgovora na ova pitanja, ostaje problem kako ih naći. Razmotrimo slučaj nalaženja Eulerove ture (pod uvjetom da je razmatrani graf Eulerov, naravno).

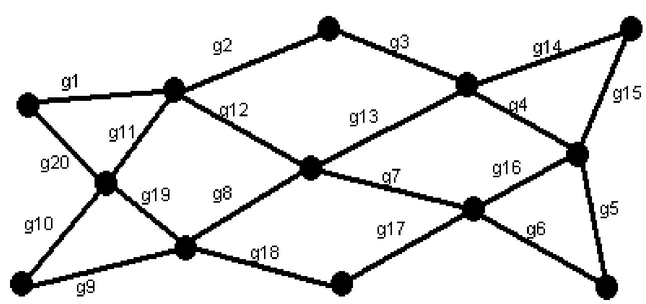
Fleuryjev algoritam je konceptualno vrlo jednostavan, ali dosta spor algoritam za nalaženje Eulerove ture. Prema ovom algoritmu;

1) krenemo od proizvoljnog vrha grafa i krenemo duž proizvoljnog brida koji vodi iz promatranog vrha, pri čemu, ako je ikako moguće, biramo brid koji nije rezni brid grafa (rezni brid je onaj čijim odstranjivanjem povećavamo broj dijelova grafa takvi da ne možemo prijeći iz jednog u drugog) - odnosno, brid koji je rezni biramo samo ako nam je to jedina mogućnost.

2) Izabrani brid dopisujemo na kraj niza bridova (koji je na početku algoritma prazan)

3) Sada brišemo promatrani brid, i nastavljamo postupak od vrha u koji je vodio upravo izbrisani brid. Postupak nastavljamo sve dok se ne izbrišu svi bridovi.

Po završetku algoritma, bridovi u nizu, u redoslijedu kako su upisivani u niz, formiraju traženu Eulerovu turu. Na sljedećoj slici je prikazan primjer jednog Eulerovog grafa, kao i moguća Eulerova tura dobijena primjenom Fleuryjevog algoritma. Preciznije, traženu Eulerovu turu formiraju bridovi obilježeni sa g1 - g20, u rastućem poretku indeksa.



4. Zaključak

I danas, 272 godine nakon Eulerovog rješenja problema Königsberških mostova, ovaj problem privlači pažnju i još uvijek je aktualan. Stoga se može reći da je to jedan od najljepših problema teorije grafova.

Literatura

[1] N. L. BIGGS, E. K. LLOYD, R. J. WILSON, *Graph Theory*, 1736-1936. Oxford, England: Oxford University Press, 1976.

[2] B. BOLLOBÁS, *Graph Theory: An Introduction Course*, Springer-Verlag, p. 12, 1979.

[3] G. CHARTRAND, *"The Königsberg bridge Problem: An Introduction to Eulerian Graphs in Introductory Graph Theory"*. New York: Dover, 1985.

[4] H. FLEISCHNER, *(Some of) the many use of Eulerian Graphs graph theory*, Discrete Math., **230**(2001)23-43.

[5] F. HARARY, *Graph Theory*. Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 1-2, 1994.

[6] HARTSFIELD, RINGEL,*Pearls in Graph Theory*, Academic Press, 1990.

[7] H. STEINHAUS, *Mathematical Snapshots 3rd ed.* New York: Dover, pp. 256-259, 1999.

[8] D. VELJAN, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, pp. 286-294, 1989.

[9] R. J. WILSON, *Introductions to Graph Theory*, Longman Iac, 1985.