Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost*

Ilija Ilišević†

Sažetak. *Mnoge nejednakosti koje se pojavljuju na natjecanjima iz matematike mogu se lako dobiti primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakost. Dokaz ove nejednakosti može se izvesti analizom odgovarajuće kvadratne funkcije, što je razumljivo već učenicima drugog razreda srednje škole.*

Abstract. **The Cauchy-Schwarz-Buniakowsky inequality.** *Many inequalities which appear on competitions of young mathematicians could be easily obtained by applying the Cauchy-Schwarz-Buniakowsky inequality. The proof of this inequality could be done by analysing a corresponding quadratic function, which is understood even by students in the second grade of a secondary school.*

Teorem 1. [Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva (CBS) nejednakost]. *Za bilo koja dva konačna niza realnih brojeva $a=(a_1,\ldots,a_n)$ i $b=(b_1,\ldots,b_n)$ vrijedi:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \tag{1}$$

*Pri tome jednakost u (**??**) vrijedi onda i samo onda ako su nizovi a i b proporcionalni.*

Dokaz. Promotrimo kvadratnu funkciju $f: R \to R$ definirana formulom

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k x+b_k)^2=\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)x+\sum_{k=1}^{n} b_k^2. \tag{2}$$

Budući da je f nenegativna funkcija ($f(x)\ge 0$ za svaki $x\in R$), njena diskriminanta D ne može biti pozitivna, tj.

$$D=4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2-4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\le 0,$$

*Predavanje održano u okviru Matematičkog kolokvija, HMD - Podružnica Osijek, 24. svibnja 1996.

†III. gimnazija, K. Firingera 14, HR-31000 Osijek

odakle slijedi tražena nejednakost

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Iz (**??**) vidi se da jednakost u (**??**) vrijedi onda i samo onda ako postoji realan broj x_0 takav da je $b_k = x_0\, a_k$, $k = 1, \ldots, n$, tj. ako su nizovi a i b proporcionalni. □

Primjer 1.. *Neka su x i y realni brojevi, takvi da je $4x+5y=1$. Pokažimo da je tada $x^2+y^2 \geq \frac{1}{41}$.*
Pomoću CSB nejednakosti dobivamo

$$1 = (4x+5y)^2 \leq (4^2+5^2)(x^2+y^2) = 41(x^2+y^2),$$

odakle slijedi tražena nejednakost.

Primjer 2.. *Ako su x, y, z realni brojevi takvi da je $x+y+y=1$, pokažimo da je $x^2+y^2+z^2 \geq 12$.*
Koristeći CSB nejednakost dobivamo

$$6^2 = (x+y+z)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2),$$

odakle slijedi tražena nejednakost.

Primjer 3.. *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Dokažimo nejednakost:*

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n} \leq \sqrt{n}.$$

Primjenom CSB nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n})^2 &= (1\cdot\sqrt{x_1}+1\cdot\sqrt{x_2}+\ldots+1\cdot\sqrt{x_n})^2\\ &\leq (1^2+1^2+\ldots+1^2)(x_1+x_2+\ldots+x_n) = n\cdot 1,\end{aligned}$$

odakle korjenovanjem slijedi tražena nejednakost.

Primjer 4.. *Pokažimo da za svaki $a \in R\backslash\{1\}$ vrijedi nejednakost*

$$3(1+a^2+a^4) > (1+a+a^2)^2.$$

Prema CSB nejednakosti imamo

$$(1+a+a^2)^2 \leq (1+1+1)(1+a^2+a^4) = 3(1+a^2+a^4).$$

Kako je $a \neq 1$, nizovi $(1,1,1)$ i $(1,a,a^2)$ nisu proporcionalni. Zbog toga vrijedi stroga nejednakost.

Primjer 5.. *Neka su $a, b, c \in [-\frac{1}{4}, \infty)$, takvi da je $a+b+c=1$. Dokažimo nejednakost*

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leq 5.$$

Pomoću CSB nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} &\leq \sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{(\sqrt{4a+1})^2+(\sqrt{4b+1})^2+(\sqrt{4c+1})^2}\\ &= \sqrt{3}\sqrt{4(a+b+c)+3} = \sqrt{3}\sqrt{7} = \sqrt{21} < 5.\end{aligned}$$

Primjer 6.. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažimo nejednakost*

$$abc(a+b+c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

Primjenimo CSB nejednakost:

$$(a+b+c)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c} + \frac{b}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a} + \frac{c}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\right)(c+a+b).$$

Iz posljednje nejednakosti dobivamo $a+b+c \leq \frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}$. Množenjem ove nejednakosti s abc dobivamo traženu nejednakost.

Primjer 7.. *Ako su a, b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, dokazati da vrijedi nejednakost*

$$ab + bc + ca < 2c^2.$$

Pomoću CSB nejednakosti dobivamo

$$ab+bc+ca \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2} = a^2+b^2+c^2 = 2c^2 \Rightarrow$$
$$ab+bc+ca \leq 2c^2$$

Primjetimo da u prethodnoj nejednakosti ne može stajati znak jednakosti, jer nizovi (a, b, c) i (b, c, a) nisu proporcionalni. Naime,kada bi nizovi (a, b, c) i (b, c, a) bili proporcionalni, postojao bi realan broj k takav da je

$$a = kb, \;\; b = kc, \;\; c = ka.$$

Tada bi imali $c^2 = (ka)^2 = k^2(kb)^2 = k^4(kc)^2 = k^6c^2$, odakle bi sljedilo da je $k = 1$, a $c = ka = 1 \cdot a$, što bi bilo u suprotnosti s Pitagorinim teoremom. Dakle, vrijedi stroga nejednakost.

Primjer 8.. *Ako su x, y, z realn brojevi takvi da je*

$$x + y + z = 4 \quad i \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6,$$

pokazati da oni pripadaju segmentu $[\frac{2}{3}, 2]$.
Prvo zapišimo zadane jednakosti u obliku

$$y + z = 4 - x \quad \text{i} \quad y^2 + z^2 = 6 - x^2,$$

a zatim primjenimo CSB nejednakost:

$$(4-x)^2 = (y+z)^2 \leq (1^2+1^2)(y^2+z^2) = 2(6-x^2).$$

Dakle, $3x^2 - 8x + 4 \leq 0$, odakle je $x \in [\frac{2}{3}, 2]$. Budući da se x, y, z javljaju simetrično u obje jednakosti, brojevi y i z također pripadaju segmentu $[\frac{2}{3}, 2]$.

Literatura

[1] N. Elezović, *Odabrani zadaci iz elementarne matematike*, Element, Zagreb, 1992.

[2] V. A. Krečmar, *Zadačnik po algebre*, Nauka, Moskva, 1972.

[3] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[4] J. Pečarić, *Nejednakosti*, Element, Zagreb, 1996.