UDK 336.717:004.04
Prethodno priopćenje

Dr. sc. Darko Dukić*

Dr. sc. Gordana Dukić*

Davorin Turkalj, dipl. ek.**

RAČUNALNA ANALIZA MODELA OTPLATE ZAJMA

Ključne riječi: *modeli otplate zajma, računalna analiza, prenumerando i postnumerando otplata, anuiteti, složena dekurzivna kamatna stopa, metoda sekanti, algoritam*

U nedostatku vlastitih financijskih sredstava, a zbog potrebe zadovoljenja tekuće potrošnje ili investiranja, kreditno se zadužuju svi segmenti društva. Uzimajući u obzir moguću insolventnost zajmotražitelja u razdoblju amortizacije zajma, prije stupanja u dužničko-vjerovnički odnos nužno je pažljivo sagledati sve aspekte kreditiranja te izabrati adekvatan model otplate. S ciljem unapređenja odlučivanja iz područja kreditne politike u ovom je radu izvršena analiza mogućih strategija amortizacije zajma s obzirom na način otplate (prenumerando i postnumerando) te učestalost vraćanja anuiteta. Pritom je postavljen odgovarajući teorijska okvir te su dokazane neke zakonitosti. Na kraju je posebno izdvojen model otplate kredita koji je temeljen na složenoj dekurzivnoj kamatnoj stopi kao endogenoj varijabli. U okviru analize tog modela naveden je algoritam koji se može primijeniti pri determiniranju tražene kamatne stope pomoću metode sekanti. Upravo je jedna od intencija ovog rada bila i da se ukaže na mogućnosti korištenja računalne analize pri izboru adekvatnog modela otplate zajma.

* ABACUS obrt za poduke, istraživanja i poslovno savjetovanje, Osijek

** Poljoprivredni fakultet u Osijeku, Zavod za agroekonomiku

1. UVOD

Kreditni su odnosi neizostavan element društveno-ekonomskog razvoja. U svome primitivnom obliku pojavljuju se još u vremenu prvih diferenciranja članova zajednice i nastajanja privatnog vlasništva. Temelj za njihovo uspostavljanje predstavljaju odgovarajući dužničko-vjerovnički odnosi. Takav odnos nastaje kada vjerovnik na određeno vrijeme i uz određene uvjete ustupa svoja sredstva dužniku koji se obvezuje da će ugovorom utvrđene obveze izvršavati.

Osnovni je motiv davanja zajma (kredita) pribavljanje određene koristi koja proizlazi iz kamate, kao naknade vjerovniku za njegovo pozajmljivanje. S dužničke strane, podizanje kredita može biti potaknuto potrebom zadovoljenja tekuće potrošnje ili se na taj način pribavljena sredstva koriste za investiranje. U oba je slučaja ulazak u dužnički odnos posljedica nedostatka vlastitih sredstava. Iz tog razloga kreditno se zadužuju svi segmenti društva. Pravilno usmjerena kreditna sredstva generator su gospodarskog napretka, no njihovo neracionalno korištenje može rezultirati značajnim makroekonomskim nestabilnostima. Takve situacije nastupaju kada kritična masa dužnika nije u mogućnosti izvršavati svoje obveze. Različitim aspektima kreditnog zaduživanja stoga je potrebno posvetiti posebnu pozornost.

Uvjeti kreditiranja determinirani su brojnim čimbenicima. Među njima svakako treba izdvojiti situaciju koja vlada na financijskom tržištu, iznos sredstava koje zajmotražitelj namjerava pribaviti podizanjem kredita, njegovu solventnost, ali i odnos koji ima s budućim vjerovnikom (važnost koju kreditor pridaje potencijalnom dužniku može u značajnoj mjeri utjecati na uvjete kreditiranja). Te su odrednice osnova za ugovaranje iznosa zajma, kamatne stope, njezine fiksnosti ili promjenjivosti u razdoblju otplate, roka i načina otplate zajma (prenumerando ili postnumerando uplate), iznosa anuiteta, učestalosti njihova vraćanja, mogućeg vremena počeka, namjene kredita i visine naknade za obradu zahtjeva. Ugovorom se također definiraju jamci, hipoteka ili neki drugi oblik osiguranja u slučaju nemogućnosti vraćanja zajma. S ciljem prevladavanja troškova inflacije u ugovor se unosi i valutna klauzula ili se utvrđuje način revalorizacije kredita. Iz navedenog proizlazi da postoje brojni čimbenici koji određuju karakter kreditnog opterećenja zajmoprimca. Poduzeća i državne institucije, kao veliki zajmotražitelji, u pravilu imaju mogućnost utjecaja na pojedine elemente ugovora o zajmu. Sukladno principima racionalnog poslovanja, njihov management mora ustrajati na ugovaranju takvih dužničko-vjerovničkih odnosa koji će omogućiti neometano izvršavanje preuzetih obveza. U interesu je i financijske institucije koja odobrava kredit da zajmoprimatelj nema poteškoća pri vraćanju pozajmljenih sredstva, odnosno da otplata zajma ne utječe na normalno odvijanje njegovih poslovnih aktivnosti.

Polazeći od navedenih pretpostavki, intencija je ovog rada bila da se ispitaju pojedini aspekti otplate zajma, odnosno izvrši analiza mogućih strategija amortizacije kredita. Pri njezinu provođenju prvo su determinirane razlike u načinima otplate zajma prenumerando uplatama, kada se anuiteti vraćaju početkom razdoblja, i postnumerando uplatama, kada se anuiteti vraćaju krajem razdoblja. Nakon toga ispitani su efekti amortizacije kredita s obzirom na učestalost plaćanja anuiteta, a u uvjetima prenumerando i postnumerando uplata. Razlike koje se pojavljuju pri takvim načinima otplate zajma ilustrirane su odgovarajućim primjerima.

Prije pojave elektroničkih računala i njihove implementacije u području otplate zajma bile su korištene različite tehnike kojima se nastojalo pojednostaviti provođenje zahtjevnih računskih postupaka. Upotrebom takvih metoda nije se dobivao korektan obračun, no u vremenu nepostojanja odgovarajuće računalne podrške takva se su odstupanja tolerirala. U današnjim uvjetima poslovi vezani uz obračun kredita nezamislivi su bez upotrebe suvremenih dostignuća informacijskih i komunikacijskih tehnologija. Njihova primjena omogućuje financijskim institucijama da fleksibilnije definiraju modele kreditiranja i tako prošire svoju ponudu, dok korisnicima zajma olakšava izbor strategije otplate koji najbolje odgovara njihovim zahtjevima. Upravo je jedan od ciljeva ovog istraživanja bio ukazati na mogućnosti korištenja računalne analize pri izboru adekvatnog modela amortizacije zajma. Ona u ovom radu posebno dolazi do izražaja pri formuliranju modela u kojem iznos složene dekurzivne kamatne stope nije unaprijed determiniran, već ovisi o iznosu zajma i anuiteta koje zajmotražitelj u dogovoru s kreditorom namjerava vraćati tijekom ugovorenoga vremenskog razdoblja. Na takav način utvrđena kamatna stopa predstavlja jedan od temeljnih elemenata za izbor najpovoljnijeg modela otplate zajma. U svrhu određivanja realne nultočke nelinearne funkcije koja se pritom dobiva moguće je koristiti više metoda, a u ovom će radu biti primijenjena metoda sekanti. S obzirom na to da ima iterativan karakter, njezina upotreba pretpostavlja korištenje elektroničkog računala, pa će stoga biti formuliran i odgovarajući algoritam. Postupak izračunavanja složene dekurzivne kamatne stope također će biti objašnjen na primjeru.

2. DETERMINIRANJE RAZLIKA IZMEĐU PRENUMERANDO I POSTNUMERANDO OTPLATA

Zajam predstavlja zaduženi iznos novčanih sredstva koji se zajmoprimatelj obvezuje vratiti kreditoru u ugovorenom roku uz plaćanje odgovarajuće kamate. Uvjeti kreditiranja preciziraju se ugovorom o zajmu čiji su osnovni elementi:

- iznos odobrenih sredstava (zajma)
- iznos kamatne stope
- fiksnost ili promjenjivost kamatne stope u razdoblju otplate zajma
- trenutak početka otplate (mogući poček)
- rok otplate
- način otplate
- broj anuiteta ili otplatnih rata
- iznos anuiteta ili otplatnih rata
- namjena zajma

- iznos naknade za obradu zahtjeva
- mjere osiguranja zajma (jamci, hipoteka i sl.)
- zaštitna klauzula, odnosno način revalorizacije kredita.

Zajam se može vratiti jednokratno, no u gospodarskoj je praksi uobičajeno da se vraća kroz više otplatnih rata. U tom se slučaju pojedini iznosi kojima se otplaćuje zajam nazivaju anuiteti. Svaki anuitet, koji može biti konstantan ili promjenjiv, u sebi sadrži prispjele kamate i dio kojim se vraća zajam (otplatna kvota). U otplati zajma uglavnom se primjenjuje dekurzivno složeno ukamaćivanje. Budući da je cilj ove analize utvrditi razlike u otplati zajma prema načinu vraćanja anuiteta, u nastavku će se napraviti distinkcija između prenumerando i postnumerando otplata.

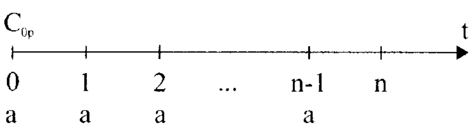
Prenumerando otplatama anuiteti se uplaćuju početkom ekvidistantnih vremenskih razdoblja. Moguće je ugovorom definirati i nejednaka vremenska razdoblja otplata, no u ovom se radu takav model neće posebno analizirati. Kod uplata anuiteta početkom jednakih vremenskih razdoblja uobičajeni su vremenski razmaci od jedne godine, polugodišta, kvartala i mjeseca. Slika 1 prikazuje otplatu zajam prenumerando anuitetima, gdje je:

C_{0p} - iznos odobrenog zajma uz anuitete plative početkom razdoblja,

a - iznos anuitet,

n - broj razdoblja plaćanja,

t - oznaka vremena.



Slika 1: Otplata zajma anuitetima plativim početkom razdoblja

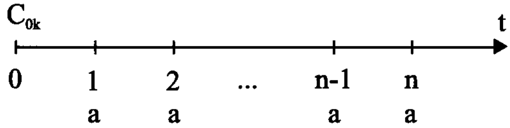
Iznos anuiteta kod otplate zajma prenumerando otplatama računa se prema sljedećoj formuli:

$$a = C_{0p} r^{n-1} \frac{r-1}{r^n - 1}$$

U navedenom izrazu r označava kamatni faktor koji se određuje na temelju determinirane kamatne stope p:

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

Postnumerando otplata predstavlja način otplate zajma kod kojeg se anuiteti vraćaju krajem ekvidistantnih vremenskih razdoblja. I u ovom je slučaju moguće ugovoriti nejednaka vremenska razdoblja otplate. Pri oplatama anuiteta krajem jednakih vremenskih razdoblja također su uobičajeno ugovaraju vremenski razmaci od jedne godine, polugodišta, kvartala i mjeseca. Slikom 2, na kojoj C_{0k} označava iznos odobrenog kredita uz anuitete plative krajem razdoblja, prikazana je otplata zajma postnumerando otplatama.



Slika 2: Otplata zajma anuitetima plativim krajem razdoblja

Iznos anuiteta ovakvog zajma određuje se pomoću formule:

$$a = C_{0k} r^n \frac{r-1}{r^n - 1}$$

Iz grafičkih prikaza i izraza pomoću kojih se određuju iznosi anuiteta uočljivo je da se otplate zajma prenumerando i postnumerando otplatama razlikuju za iznos kamata jednog razdoblja. Naime, uz uvjet jednakih anuiteta, trajanje otplata isti broj jednakih razdoblja i istu dekurzivnu kamatnu stopu, vrijednost zajma koji se vraća anuitetima krajem razdoblja (C_{0k}) može se izraziti pomoću vrijednosti zajma čiji su anuiteti plativi početkom razdoblja (C_{0p}) na sljedeći način:

$$C_{0p} r^{n-1} \frac{r-1}{r^n - 1} = C_{0k} r^n \frac{r-1}{r^n - 1}$$

$$C_{0p} r^{n-1} = C_{0k} r^n$$

$$C_{0p} r^{-1} = C_{0k} .$$

Dakle vrijedi:

$$C_{0k} = C_{0p} r^{-1} \text{, odnosno } C_{0p} = C_{0k} r^{1} .$$

Navedeno se može objasniti na sljedećem primjeru. Neka se pretpostavi da zajmotražitelj razmatra mogućnost podizanja kredita od 100.000,00 kuna, koji treba vratiti s 5 godišnjih anuiteta plativih početkom razdoblja, uz primjenu složene dekurzivne godišnje kamatne stope od 10%. U tom slučaju anuitet iznosi:

$$a = 100000 \cdot 1.1^{5-1} \frac{1.1-1}{1.1^5-1} = 23981.59 \text{ kuna.}$$

Zajmoprimac će pritom ukupno platiti 19.907,95 kuna kamata (vrijednost ukupnih kamata određuje se kao razlika između sume svih anuiteta i iznosa odobrenog zajma). S obzirom na to da prvi anuitet plaća u trenutku dobivanja kredita, dužnik će zapravo raspolagati iznosom od 76.018,41 kuna.

Ako se zajmotražitelj odluči za postnumerando otplatu, uz uvjet da tijekom 5 godina uz istu kamatnu stopu plaća jednaki iznos anuiteta od 23981.59 kuna, vrijednost odobrenog zajma će iznositi:

$$C_{0k} = 100000 \cdot 1.1^{-1} = 90909.09 \text{ kuna.}$$

Pri takvom načinu otplate zajma, dužnik će platiti 28.998,86 kuna kamata, ali će raspolagati većim početnim iznosom novčanih sredstava. U navedenom primjeru zajmoprimac će pri otplati zajma postnumerando anuitetima u trenutku odobrenja zajma imati 14.890,68 kuna više nego da se odlučio za prenumerando otplatu. Prema tome, management mora procijeniti da li želi raspolagati većim početnim novčanim sredstvima ili platiti manji iznos kamata.

3. ANALIZA AMORTIZACIJE ZAJMA PRENUMERANDO I POSTNUMERANDO OTPLATAMA S OBZIROM NA UČESTALOST VRAĆANJA ANUITETA

Jedan je od važnijih čimbenika koji utječu na iznos kamata koje otplatom zajma treba vratiti broj anuiteta ili otplatnih rata. Uz pretpostavku da su pri otplati zajma većim brojem anuiteta dogovorena ekvidistantna vremenska razdoblja, ugovorom se mora precizirati veličina takvih razmaka, odnosno broj anuiteta koji se vraća tijekom godine. Pritom se determinira broj jednakih podintervala (m) na koji se dijeli godina. Kako se najčešća utvrđuju polugodišnja, kvartalna i mjesečna razdoblja, m poprima vrijednosti 2, 4 i 12 respektivno. No, godina se može podijeliti i drugačije pa je npr. za tjedne rate $m = 52$, za rate koje se plaćaju svaka dva mjeseca $m = 6$, a ako se anuiteti plaćaju svake dvije godine $m = 0.5$.

Kako se iznos kamata računa na ostatak duga, u slučaju zajma s postnumerando anuitetima vrijednost je ukupnih kamata manja što se češće uplaćuju anuiteti. No, za zajam čiji se anuiteti vraćaju početkom razdoblja ukupan je iznos kamata veći kako se povećava broj anuiteta, odnosno kada je vremenski razmak između anuiteta kraći. Pritom veličina anuiteta u oba slučaja ima tendenciju smanjivanja. Iz toga proizlazi da češće otplate rezultiraju manjim iznosom svakog pojedinog anuiteta.

Relacija između zajmova čiji se anuiteti vraćaju početkom i krajem razdoblja determinirana je u prethodnom poglavlju:

$$C_{0p} = C_{0k} r^1,$$

$$C_{0k} = C_{0p} r^{-1}.$$

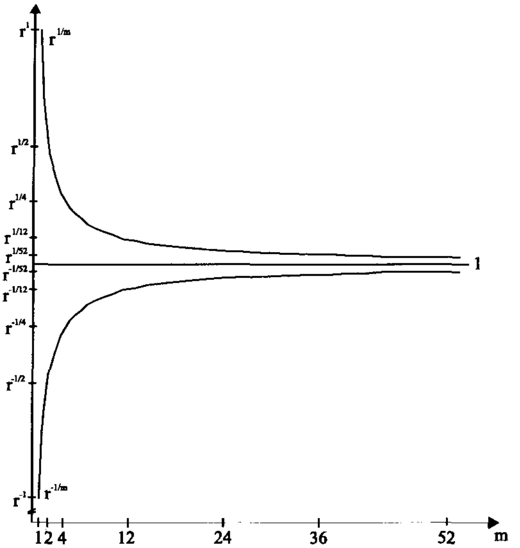
Na isti način mogu se odrediti vrijednosti zajma C_{0p} i C_{0k} koji se vraćaju ispodgodišnjim anuitetima plativim krajem, odnosno početkom razdoblja:

$$C_{0p} = C_{0k} r^{\frac{1}{m}},$$

$$C_{0k} = C_{0p} r^{-\frac{1}{m}}.$$

Funkcije koje opisuju kretanje godišnjih i ispodgodišnjih konformnih kamatnih faktora kod prenumerando otplata i recipročnih godišnjih i ispodgodišnjih konformnih kamatnih faktora kod postnumerando otplata prikazane su slikom 3.

Slika 3: Grafički prikaz funkcija godišnjih i ispodgodišnjih konformnih kamatnih faktora kod prenumerando otplata i recipročnih godišnjih i ispodgodišnjih konformnih kamatnih faktora kod postnumerando otplata



Dvije prikazane funkcije simetrične su s obzirom na horizontalnu asimptotu kojoj teže za dovoljno veliki m. Naime, u tom slučaju vrijedi:

$$\lim_{m \to \infty} r^{-\frac{1}{m}} = \lim_{m \to \infty} r^{\frac{1}{m}} = 1 .$$

Prema tome, s povećavanjem broja anuiteta razlika između godišnjih i ispodgodišnjih konformnih kamatnih faktora kod prenumerando otplata i recipročnih godišnjih i ispodgodišnjih konformnih kamatnih faktora kod postnumerando otplata smanjuje se i približava vrijednosti 1. Zbog toga se smanjuje i razlika u ukupnim kamatama koje se plaćaju kod prenumerando i postnumerando otplata. Također se smanjuje i razlika u iznosima anuiteta, odnosno kada $m \to \infty$ vrijedi:

$$C_{0p} = C_{0k} .$$

Može se zaključiti da češće vraćanje anuiteta izjednačava dva analizirana načina otplate zajma. No, ta je razlika značajna u slučaju otplate rjeđim anuitetima. Tako su anuiteti koji se plaćaju jednom godišnje ili u intervalu dužem od jedne godine razlog znatno većim ukupnim kamatama zajma s postnumerando otplatama u odnosu na zajam s prenumerando otplatama.

Razlike koje postoje pri otplati zajma anuitetima koji se vraćaju početkom i krajem razdoblja jednostavno se mogu uočiti na sljedećem primjeru. U njemu će se pretpostaviti da je financijska institucija odobrila zajam od 100.000,00 kuna na rok od 3 godine uz složenu dekurzivnu godišnju kamatnu stopu od 5%. S ciljem izbora modela amortizacije zajma koji najbolje odgovara njegovim potrebama, zajmotražitelj želi ispitati učinke prenumerando i postnumerando otplata. Iznos anuiteta koji se plaćaju početkom razdoblja računa se pomoću formule:

$$a = C_{0p} r^{\frac{n-1}{m}} \frac{r^{\frac{1}{m}} - 1}{r^{\frac{n}{m}} - 1} .$$

Kod postnumerando otplata iznos anuiteta određuje se iz izraza:

$$a = C_{0k} r^{\frac{n}{m}} \frac{r^{\frac{1}{m}} - 1}{r^{\frac{n}{m}} - 1} .$$

U oba se slučaja veličina ukupnih kamata određuje na način da se od sume svih anuiteta oduzme iznos odobrenog zajma. Rezultati analize otplate zajma godišnjim, polugodišnjim, kvartalnim, mjesečnim i tjednim anuitetima plativim početkom razdoblja prikazani su u tablici 1.

broj razdoblja na koji se dijeli godina (m)	broj anuiteta (n)	iznos anuiteta (a)	ukupna kamata (I)
1	3	34972.24	4916.72
2	6	17699.40	6196.40
4	12	8903.67	6844.04
12	36	2979.97	7278.92
52	156	688.76	7446.56

Tablica 1. Rezultati analize prenumerando otplata zajma s različitim brojem anuiteta

U tablici 2 navedeni su rezultati analize otplate zajma godišnjim, polugodišnjim, kvartalnim, mjesečnim i tjednim anuitetima koji se vraćaju krajem razdoblja.

broj razdoblja na koji se dijeli godina (m)	broj anuiteta (n)	iznos anuiteta (a)	ukupna kamata (I)
1	3	36720.86	10162.58
2	6	18136.49	8818.94
4	12	9012.94	8155.28
12	36	2992.11	7715.96
52	156	689.41	7547.96

Tablica 2. Rezultati analize postnumerando otplata zajma s različitim brojem anuiteta

Kako se povećava broj anuiteta, ukupna kamata kod prenumerando otplata raste, dok se u slučaju postnumerando otplata smanjuje. Kada $n \to \infty$ iznosi ukupnih kamata međusobno konvergiraju. Izražena preko formule za izračunavanje anuiteta kod postnumerando otplata, njihova je vrijednost određena izrazom:

$$.I = \lim_{n\to\infty}\left(nC_{0k} r^{\frac{n}{m}} \frac{r^{\frac{1}{m}}-1}{r^{\frac{n}{m}}-1}\right) - C_{0k}$$

Budući da je u navedenom primjeru $m = \frac{n}{3}$ vrijedi:

$$I = \lim_{n\to\infty}\left(nC_{0k} r^{3} \frac{r^{\frac{3}{n}}-1}{r^{3}-1}\right) - C_{0k}$$

$$I = \frac{C_{0k} r^3}{r^3-1} \lim_{n\to\infty}\left(n(r^{\frac{3}{n}}-1)\right) - C_{0k} .$$

Nakon supstitucije $\frac{3}{n} = t$ dobiva se:

$$I = \frac{3C_{0k} r^3}{r^3-1} \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}(r^{t}-1)\right) - C_{0k} .$$

Iz nove supstitucije $r^t - 1 = u$, odnosno $t = log_r(u+1)$ proizlazi:

$$I = \frac{3C_{0k} r^3}{r^3-1} \lim_{u\to 0}\left(\frac{u}{log_r(u+1)}\right) - C_{0k} .$$

Daljnjim sređivanjem dolazi se do rješenja:

$$I = \frac{3C_{0k} r^3}{r^3-1} \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{log(u+1)}{u \cdot log\, r}} - C_{0k}$$

$$I = \frac{3C_{0k} r^3}{r^3-1} log\, r \frac{1}{\lim_{u\to 0} log(u+1)^{\frac{1}{u}}} - C_{0k}$$

$$I = \frac{3C_{0k} r^3}{r^3-1} log\, r \frac{1}{log \lim_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}} - C_{0k}$$

$$I = \frac{3C_{0k} r^3}{r^3-1} log\, r \frac{1}{log\, e} - C_{0k}$$

$$I = \frac{3C_{0k} r^3}{r^3-1} ln\, r - C_{0k} .$$

Kako je u primjeru $C_{0k} = 100000$, a $r = 1.05$, iznos je ukupnih kamata koje u slučaju kada $n \to \infty$ zajmoprimac mora platiti:

$$I = \frac{3 \cdot 100000 \cdot 1.05^3}{1.05^3 - 1} ln 1.05 - 100000 = 7497 \text{ kuna.}$$

Broj anuiteta također utječe i na veličinu anuiteta. Tako su anuiteti plativi krajem razdoblja veći od onih koji se plaćaju početkom razdoblja. Povećanjem broja anuiteta ta se razlika smanjuje pa su iznosi tjednih anuiteta gotovo izjednačeni. Na temelju navedenog moglo bi se zaključiti da je povoljnije uzeti kredit koji se otplaćuje početkom razdoblja uz što manji broj anuiteta. Međutim, takvo zaduženje ima nedostataka, jer prvi anuitet, koji se zapravo plaća u trenutku odobrenja zajma, predstavlja određeno učešće ili polog te znatno umanjuje stvarno dobivena sredstva. Te je činjenice potrebno uzeti u obzir pri izboru modela otplate zajma.

4. MODEL OTPLATE ZAJMA KOJI JE TEMELJEN NA SLOŽENOJ DEKURZIVNOJ KAMATNOJ STOPI KAO ENDOGENOJ VARIJABLI

Zajmotražitelj svoju odluku o izboru modela otplate koji najbolje odgovara njegovim zahtjevima može bazirati i na složenoj dekurzivnoj kamatnoj stopi koja se obračunava pri amortizaciji kredita. Logično je da će zajmotražitelj preferirati one modele otplate zajma u kojima se obračunava niža kamatna stopa. Prilikom dogovaranja uvjeta kreditiranja iznos kamatne stope može biti unaprijed fiksiran. U tom se slučaju ugovorena kamatna stopa tretira kao egzogena varijabla modela. No, zajmotražitelj može zahtijevati posebne uvjete otplate pa je u takvim situacijama iznos kamatne stope potrebno utvrditi na temelju ostalih elemenata. Tako npr. zajmotražitelj može determinirati vrijednost zajma te broj i iznos jednakih anuiteta koje je u mogućnosti otplaćivati tijekom ugovorenog vremenskog razdoblja. Potrebno je napomenuti da pritom nije nužno utvrditi jednake vremenske intervale plaćanja anuiteta.

Neka se pretpostavi da zajmotražitelj želi podići zajam od 100.000,00 kuna, koji bi vratio s 10 jednakih polugodišnjih anuiteta od 12.000,00 kuna plativih krajem razdoblja. S ciljem determiniranja složene dekurzivne kamatne stope koju će kreditor uz takve uvjete obračunati zajmoprimatelju, primjenom formule za izračunavanje anuiteta kod postnumerando otplata, dobiva se:

$$12000 = 100000 \cdot r^{\frac{10}{2}} \frac{r^{\frac{1}{2}} - 1}{r^{\frac{10}{2}} - 1}$$

$$12000(r^5 - 1) = 100000 \cdot r^5 (r^{\frac{1}{2}} - 1)$$

$$25r^{\frac{11}{2}} - 28r^5 + 3 = 0$$

Tražena složena dekurzivna kamatna stopa predstavlja realnu nultočku dobivene funkcije, koja mora biti pozitivna. Više metoda razvijeno je s ciljem rješavanja takvih nelinearnih jednadžbi, a u ovom će radu biti primijenjena metoda sekanti. Ona započinje izborom dviju početnih aproksimacija r_0 i r_1 u intervalu $[a,b]$ tako da bude $f(r_0) \cdot f(r_1) < 0$ Zatim se na krivulju, kroz točke $(r_0, f(r_0))$, $(r_1, f(r_1))$, povlači sekanta. Sljedeća aproksimacija dobije se kao sjecište sekante s apscisnom osi. Do rješenja jednadžbe $f(r) = 0$ dolazi se ponavljanjem postupka, kojim se dobiva niz aproksimacija definiran rekurzivnom formulom:

$$r_{n+1} = r_n - \frac{r_n - r_{n-1}}{f(r_n) - f(r_{n-1})} f(r_n).$$

Postupak se ponavlja sve dok ne bude zadovoljen uvjet $|f(r_n)| < \varepsilon$, gdje ε predstavlja grešku aproksimacije koja se tolerira.

Zbog iterativnog karaktera, koji zahtijeva značajan vremenski angažman analitičara i povećava mogućnost pogreške pri računanju, metoda sekanti pretpostavlja upotrebu računala i odgovarajuće programske podrške. Stoga je u nastavku naveden algoritam koji se može primijeniti za rješavanje dobivene nelinearne jednadžbe pomoću metode sekanti.

```
INPUT "MAKSIMALAN BROJ ITERACIJA:
", NMAX
INPUT "TOČNOST: ", EPS
100 INPUT "DONJA GRANICA INTERVALA
A = ", A
INPUT "GORNJA GRANICA INTERVALA B
= ", B
150 DEF FNF (R) = 25 * R Č (11 /
2) - 28 * R Č 5 + 3
IF FNF(A) < 0 THEN 200
C = A: A = B: B = C
200 R(0) = A: R(1) = B
F(0) = FNF(A)
F(1) = FNF(B)
IF FNF(A) * FNF(B) > 0 THEN 400
IF FNF(A) * FNF(B) = O THEN 300
FOR I = 1 TO NMAX - 1
R(I + 1) = R(I) - (F(I) / (F(I) -
F(I - 1))) * (R(I) - R(I - 1))
B = R(I + 1): F(I + 1) = FNF(B)
IF ABS(F(I + 1)) < EPS THEN 500
NEXT I: GOTO 500
300 IF FNF(B) = 0 THEN 500
B = A: GOTO 500
400 PRINT "IZABERITE NOVI POČETNI
INTERVAL JER JE R(A)*R(B)>0!": GOTO
100
500 PRINT "SLOŽENA DEKURZIVNA
KAMATNA STOPA r ="; B
```

U ovom je primjeru izabrana donja granica intervala $a = 1.03$, a gornja granica $b = 1.1$. Naime, za te je vrijednosti $f(1.03) = -0.0463$, a $f(1.1) = 0.1336$, pa je zadovoljen uvjet $f(r_0) \cdot f(r_1) < 0$. Također, maksimalan broj iteracija limitiran je na 50, dok je točnost procjene postavljena na vrijednost 0.000001. Potrebno je napomenuti da je sama funkcija definirana linijom 150.

Primjenom algoritma u nekom od programskih jezika dobiva se rješenje $r = 1.0704$. Dakle, uz uvjete koje .je postavio zajmotražitelj bit će obračunata složena godišnja dekurzivna kamatna stopa $p = 7.04\%$.

5. ZAKLJUČAK

Ugovor o zajmu sadrži različite elemente kojima se determiniraju uvjeti kreditiranja. Poglavito veliki zajmotražitelji, kakvi su poduzeća i državne institucije, mogu do izvjesne mjere utjecati na njegov sadržaj. Pravilnim izborom modela otplate oni će smanjiti mogućnost pojave problema koji su posljedica neizvršavanja ugovorenih obveza. Izbor neadekvatne strategije otplate kredita imat će suprotan učinak. Ne može se izbjeći dojam da u našoj gospodarskoj teoriji i praksi toj problematici nije posvećena potrebna pozornost. Argument takvom stajalištu jednostavno se pronalazi u činjenici da je u Republici Hrvatskoj godinama prisutno često neracionalno kreditno zaduživanje velikih razmjera. Ako se takve negativne tendencije najskorije ne zaustave, postoji realna opasnost da će dovesti do značajnih društvenih i ekonomskih poremećaja.

Kako bi se s teorijskoga i praktičnog stajališta istražili pojedini aspekti amortizacije kredita, u radu je izdvojeno nekoliko modela otplate. U okviru analize prvo su determinirane razlike koje se pojavljuju kod amortizacije kredita čiji se anuiteti vraćaju početkom i krajem razdoblja te je utvrđeno da se ta dva oblika obračuna razlikuju za iznos kamata jednog razdoblja. Nakon toga izvršena je analiza otplate zajma prenumerando i postnumerando otplatama s obzirom na učestalost vraćanja anuiteta. Pokazano je da su uz isti početni iznos zajma, jednaku vrijednost kamatne stope te isti rok otplate i broj otplatnih rata, anuiteti plativi krajem razdoblja veći od onih koji se vraćaju prenumerando uplatama. Ta se razlika s povećanjem broja anuiteta smanjuje, a iznosi ukupnih kamata koje zajmoprimac plaća kod oba načina otplate međusobno konvergiraju. Zajmotražitelj mora procijeniti koji mu oblik obračuna bolje odgovara, s obzirom na to da u slučaju podizanja kredita koji se otplaćuje manjim brojem anuiteta plativim početkom razdoblja morati platiti manju kamatu, no i iznos stvarno raspoloživih sredstava tada je manji.

Analiza uvjeta kreditiranja i izbor adekvatnog modela otplate zajma u suvremenim su uvjetima nezamislivi bez računalne podrške. Ona je u ovom radu posebno došla do izražaja pri determiniranju dekurzivne godišnje kamatne stope koju će kreditor obračunati zajmotražitelju u slučaju da zahtijeva posebne uvjete amortizacije zajma. U tom je dijelu naveden algoritam koji se može primijeniti pri determiniranju tražene kamatne stope pomoću metode sekanti. I na taj se način nastojala aktualizirati kod nas zanemarena upotreba kvantitativnog pristupa pri izboru adekvatnog modela kreditiranja.

Literatura

1. Chiang, A.C.: Osnovne metode matematičke ekonomije, Treće izdanje, prijevod, Mate d.o.o., Zagreb, 1994.

2. Crnjac, M., Jukić, D., Scitovski, R.: Matematika, Ekonomski fakultet u Osijeku, Osijek, 1994.

3. Kaw, A.: "Secant Method", *http://numericalmethods.eng.usf.edu/mws/gen/03nle/mws_gen_nle_txt_secant.pdf*

4. Mathews, J.H.: "Module for the Secant Method", *http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/SecantMethodMod.html*

5. Relić, B., Šego, B.: Financijska matematika 2, Treće izdanje, Centar za dopisno obrazovanje Zavoda Birotehnika, Zagreb, 1990.

6. Relić, B., Šego, B.: "Modeli otplate zajma u užem i širem smislu", *http://www.mmoi.efzg.hr/radovi/bsego/Clanak-RIF-BSego.pdf*

7. Scitovski, R.: Numerička matematika, Drugo izdanje, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osijek, 2004.

8. Scitovski, R.: Problemi najmanjih kvadrata. Financijska matematika., Ekonomski fakultet u Osijeku / Elektrotehnički fakultet u Osijeku, Osijek, 1993.

9. Šego, B.: "Model kreditiranja i kvaliteta financijskog upravljanja", http://www.mmoi.efzg.hr/radovi/bsego/hk98.pdf

10. Van Horne, J.C.: Financijsko upravljanje i politika (Financijski menedžment), Deveto izdanje, prijevod, Mate d.o.o., Zagreb, 1993.

Darko Dukić, Ph. D, Gordana Dukić, Ph. D., Davorin Turkalj, grad. oec.

COMPUTER ANALYSIS OF LOAN REDEMPTION MODEL

Summary

Lacking the own financial means and due to the need to meet the recurring consumption or investment, all segments of society run into the credit debts. Taking into consideration the possible insolvency of loan applicants in the period of loan amortization, it is necessary to recognize all aspects of credit financing before entering the debtor-creditor relationship and to choose the adequate redemption model. Aiming to promote decision-making in the sphere of credit policy, this paper analyzes the possible loan amortization strategies considering the way of redemption (prenumerando and postnumerando) and the frequency of annuity repayment. This sets the adequate theoretical frame and proves some logical procedures. In the end, the loan redemption model based on the compound decursive interest rate as an endogenous variable is particularly separated. The algorithm that can be applied while determining the desired interest rate by means of method of secants is stated within the analysis of this model. One of the particular intentions of this work was to point out to the possibility of using computer analysis in the choice of adequate loan redemption model.

Key words: loan redemption models, computer analysis, prenumerando and postnumerando redemption, annuity repayment, compound decursive interest rate, method of secants, algorithm