*Ante Puljić*
*Ilko Vrankić**

UDK 330.138.11
Izvorni znanstveni rad

# NOVO RUHO KONKAVNOSTI FUNKCIJE IZDATAKA I FUNKCIJE TROŠKOVA

*Autori se u ovom članku bave svojstvom konkavnosti analitički identičnih funkcija izdataka i troškova. Pošto su ukazali na dosadašnji nedostatak intuitivno prihvatljivog objašnjenja da su funkcija izdataka i funkcija troškova konkavne, prva u cijenama dobara, a druga u cijenama faktora proizvodnje, autori daju posve novi i znatno uvjerljiviji dokaz konkavnosti.*

## Uvod

U teoriji ponašanja potrošača i u teoriji ponašanja proizvođača pojavljuju se problemi minimiziranja izdataka za zadanu razinu korisnosti i minimiziranja troškova za zadanu razinu proizvodnje. Ta su dva problema analitički identična. Minimalne izdatke kao funkciju cijena dobara i razine korisnosti nazivamo funkcijom izdataka, a minimalne troškove kao funkciju cijena faktora i razine proizvodnje nazivamo funkcijom troškova. Pod uobičajenim pretpostavkama, funkcija izdataka i funkcija troškova neprekidne su, striktno rastuće i neograničene odozgo, prva u razini korisnosti i druga u razini proizvodnje, neopadajuće, linearno homogene, konkavne i neprekidno diferencijabilne, prva u cijenama dobara i druga u cijenama faktora. U literaturi se obično ističe da sva navedena svojstva, osim svojstva konkavnosti, imaju intuitivno prihvatljiva objašnjenja. Stoga je cilj ovog rada dati intuitivno prihvatljivo objašnjenje za svojstvo konkavnosti i formalno dokazati da konkavnost doista proizlazi iz tako izoštrene intuicije.

---

* A. Puljić, redoviti profesor i I. Vrankić, znanstveni novak, oboje na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Članak primljen u uredništvo: 8. 7. 2003.

## Funkcija izdataka i funkcija troškova

Pretpostavljamo da je funkcija korisnosti, $u : R_+^n \to R$, koja opisuje preferencije potrošača, neprekidna, strogo rastuća i striktno kvazikonkavna na $R_+^n$, i neprekidno diferencijabilna na $R_{++}^n$ i $\nabla u(x) >> 0$, $\forall x >> 0$. Uz zadane cijene dobara, $p >> 0$ i dohodak, $M > 0$, potrošač izabire košaru dobara koja maksimizira njegovu funkciju korisnosti:

$$\begin{aligned} &\max_{x \in R_+^n} u(x) \\ &px \le M \end{aligned} \qquad (1)$$

Rješenje je problema (1) vektor Marshallovih funkcija potražnje, $x^M(p,M)$, jedinstveno. Promjena cijene nekog dobra općenito dovest će do izbora neke druge košare zbog učinka supstitucije (skuplja dobra potrošač zamjenjuje jeftinijima) i učinka dohotka (premda se nominalni dohodak potrošača nije promijenio, promijenilo se njegovo realno bogatstvo). Da bismo uz pomoć jednadžbe Slutskog izrazili ta dva učinka, moramo, uz zadane cijene, minimizirati izdatke za zadanu razinu korisnosti, u:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in R_+^n} px \\ &u(x) \ge u, \end{aligned} \qquad (2)$$

gdje je $p >> 0$, $u \in U = \{u(x) | x \in R_+^n\}$.

Jedinstveno je rješenje problema (2) vektor Hicksovih funkcija potražnje, $x^H(p,u)$, a $e(p,u) \equiv p \cdot x^H(p,u)$ funkcija izdataka. Prema teoremu o maksimumu te su funkcije neprekidne na $R_{++}^n \times U$. Svojstvo neprekidnosti funkcije izdataka u skladu je s intuitivnom predodžbom da male promjene cijena dobara i mala promjena razine korisnosti ne mogu dovesti do velike promjene veličine izdataka.

Slično, pretpostavljamo da je funkcija proizvodnje, $f : R_+^n \to R_+$, neprekidna, strogo rastuća i striktno kvazikonkavna na $R_+^n$, i neprekidno diferencijabilna na $R_{++}^n$, i $\nabla f(x) >> 0$, $\forall x >> 0$, i $f(0) = 0$.

Općenito se može reći da proizvođač, uz zadane cijene proizvoda, p, i zadane cijene faktora, w, želi maksimizirati profit:

$$\begin{aligned} &\max_{(x,y) \ge 0} py - wx \\ &f(x) \ge y \end{aligned} \qquad (3)$$

Ako je zadana i razina proizvodnje, onda je prirodno da proizvođač nastoji od konstantnog ukupnog prihoda, py, odbiti što je moguće manji iznos troškova, wx. Stoga je očito da se problem maksimizacije profita za zadanu proizvodnju, pri zadanoj cijeni proizvoda i zadanim cijenama faktora proizvodnje, svodi na problem minimizacije troškova za zadanu proizvodnju. Proizvođač sada nastoji naći onu kombinaciju faktora proizvodnje koja minimizira troškove za zadanu razinu proizvodnje:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in R_+^n} wx \\ &f(x) \geq y \end{aligned} \qquad (4)$$

gdje je $w >> 0$, $y \in F = \left\{ f(x) \middle| x \in R_+^n \right\}$.

Problem (4) analitički je identičan s problemom (2). Jedinstveno rješenje problema (4), x(w,y), vektor je uvjetnih funkcija potražnje za faktorima, a $c(w,y) \equiv w \cdot x(w,y)$ funkcija troškova. Prema teoremu o maksimumu, te su funkcije neprekidne na $R_{++}^n \times R_+$. Svojstvo neprekidnosti funkcije troškova, slično kao i svojstvo neprekidnosti funkcije izdataka, u skladu je s intuitivnom predodžbom da male promjene cijena faktora i mala promjena razine proizvodnje ne mogu dovesti do velike promjene veličine troškova. Sada se problem proizvođača (3) svodi na pronalaženje one razine proizvodnje pri kojoj je razlika između ukupnog prihoda, py, i ukupnog troška, c(w,y), maksimalna:

$$\max_{y \in F} py - c(w,y) \qquad (5)$$

Ta je razlika, zapravo, njegov profit.

Očito je, dakle, da se problem minimiziranja izdataka za zadanu razinu korisnosti (2) i problem minimiziranja troškova za zadanu razinu proizvodnje (4) prirodno pojavljuju u teoriji ponašanja potrošača i u teoriji ponašanja proizvođača. Pretpostavimo sada da su za zadanu razinu korisnosti i zadanu razinu proizvodnje veće od minimalnih, cijene dobara u prvom slučaju i cijene faktora u drugom slučaju takve da su rješenja problema (2), $x^H(p,u)$ i rješenje problema (4), *x(w,y)* striktno pozitivna i neprekidno diferencijabilna u tim cijenama. Budući da u ograničenju problema (2) i u ograničenju problema (4) zbog strogog rasta funkcije korisnosti i strogog rasta funkcije proizvodnje znak nejednakosti možemo zamijeniti znakom jednakosti, ispunili smo pretpostavke teorema ovojnice, pa možemo govoriti ne samo o neprekidnosti, već i o diferencijabilnosti funkcije izdataka, odnosno funkcije troškova. Promotrimo pripadajuće Lagrangeove funkcije ovih problema:

$$L^H = px + \lambda^H \left[ u - u(x) \right] \tag{6}$$

$$L = wx + \lambda \left[ y - f(x) \right] \tag{7}$$

Primjenom teorema ovojnice iz (6), odnosno (7), slijedi:

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = \frac{\partial L}{\partial p_i}\bigg|_{(x^H(p,u),\lambda^H(p,u))} = x_i^H(p,u) \quad , \ \mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{n} \tag{8}$$

$$\frac{\partial c(w,y)}{\partial w_i} = \frac{\partial L}{\partial w_i}\bigg|_{(x(w,y),\lambda(w,y))} = x_i(w,y) \quad , \ \mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{n} \tag{9}$$

Rezultati (8) i (9), poznati pod nazivom Shepardova lema, samo su na prvi pogled iznenađujući. No, oni nam, zapravo, samo kažu da jedinično povećanje cijene nekog dobra, odnosno cijene nekog faktora, povećava izdatke, odnosno troškove, za iznos koji je približno jednak broju jedinica dobra, odnosno broju jedinica faktora, prije same promjene cijena, u optimumu. Iz navedenog slijedi da su funkcija izdataka i funkcija troškova strogo rastuće funkcije, prva u cijenama dobara, druga u cijenama faktora, zbog pretpostavke da trošimo pozitivan iznos svakog dobra, odnosno pozitivan iznos svakog faktora. Naravno da će u tom slučaju povećanje cijene nekog dobra, odnosno povećanje cijene nekog faktora, uzrokovati veće izdatke, odnosno veći utrošak.

Proporcionalna promjena cijena svih dobara, odnosno faktora, neće utjecati na izbor košare dobara koja minimizira izdatke za zadanu korisnost, odnosno na izbor kombinacije faktora koja minimizira troškove za zadanu razinu proizvodnje. Stoga će takva promjena cijena dovesti do upravno proporcionalne promjene veličine izdataka, odnosno troškova. Znači da je funkcija izdataka, odnosno funkcija troškova linearno homogena u cijenama dobara, odnosno u cijenama faktora.

Budući da je najnižu razinu korisnosti, min U, odnosno najnižu razinu proizvodnje nula, moguće ostvariti ne upotrebljavajući nijedno dobro, odnosno nijedan faktor, u tom slučaju nećemo imati nikakvih izdataka, odnosno troškova.

Dakle,

$$e(p, \min U) = 0, \forall p >> 0 \ , \tag{10}$$

odnosno

$$c(w,0) = 0, \forall w >> 0 \ . \tag{11}$$

Funkcija izdataka, odnosno funkcija troškova, strogo su rastuće, prva u razini korisnosti, druga u razini proizvodnje. Ta je činjenica u skladu s intuitivnom predodžbom da je za veću razinu korisnosti, odnosno za veću razinu proizvodnje, potrebno više i platiti. Dalje, za proizvoljne je, ali zadane cijene dobara, odnosno faktora, funkcija izdataka, odnosno funkcija troškova neograničena u razini korisnosti, odnosno u razini proizvodnje. U suprotnom bismo fiksnom količinom novca mogli ostvariti bilo koju razinu korisnosti, odnosno proizvodnje, znači mogli bismo kupiti koliko god želimo bilo kojeg dobra, odnosno faktora, a to je nemoguće.

## Konkavnost funkcije izdataka i funkcije troškova

Ako se, u slučaju dvaju dobara ne mijenjaju ni cijena drugog dobra, $p_2 = p_2^0$, ni razina zadovoljstva, $u > \min U$, tada izdatke potrošača, $e(p_1, p_2^0, u)$, možemo promatrati kao funkciju samo cijene prvoga dobra, $p_1$. Slično tome, ako se u slučaju dvaju faktora proizvodnje ne mijenjaju ni cijena drugog faktora, $w_2 = w_2^0$, ni razina proizvodnje, y > 0, tada troškove proizvođača, $c(w_1, w_2^0, y)$, možemo promatrati kao funkciju samo cijene prvog faktora proizvodnje, $w_1$. Graf funkcije izdataka $e(p_1, p_2^0, u)$ moguće je predočiti u koordinatnom sustavu $p_1Oe$ i graf funkcije troškova $c(w_1, w_2^0, y)$ u koordinatnom sustavu $w_1Oc$. Da je tako formulirana funkcija izdataka $e(p_1, p_2^0, u)$ konkavna u cijeni prvog dobra, $p_1$, i da je tako formulirana funkcija troškova $c(w_1, w_2^0, y)$ konkavna u cijeni prvog faktora proizvodnje, $w_1$, možemo zaključiti ako grafove tih funkcija usporedimo s grafovima tangenti koje prolaze proizvoljno izabranim točkama, u slučaju funkcije izdataka proizvoljno izabranom točkom $\left(p_1^0, e(p_1^0, p_2^0, u)\right)$ i u slučaju funkcije troškova proizvoljno izabranom točkom $\left(w_1^0, c(w_1^0, w_2^0, y)\right)$.

U skladu sa Shepardovom lemom, nagibi su tih tangenti

$$\frac{\partial e(p_1^0, p_2^0, u)}{\partial p_1} = x_1^H (p_1^0, p_2^0, u) \tag{12}$$

i

$$\frac{\partial c(w_1^0, w_2^0, y)}{\partial w_1} = x_1(w_1^0, w_2^0, y) \quad . \tag{13}$$

Stoga su njihove jednadžbe

$$e - e(p_1^0, p_2^0, u) = x_1^H(p_1^0, p_2^0, u)(p_1 - p_1^0) \tag{14}$$

i

$$c - c(w_1^0, w_2^0, y) = x_1(w_1^0, w_2^0, y)(w_1 - w_1^0) \quad . \tag{15}$$

Budući da su

$$e(p_1^0, p_2^0, u) = x_1^H(p_1^0, p_2^0, u) \cdot p_1^0 + x_2^H(p_1^0, p_2^0, u) \cdot p_2^0 \tag{16}$$

i

$$c(w_1^0, w_2^0, y) = x_1(w_1^0, w_2^0, y) \cdot w_1^0 + x_2(w_1^0, w_2^0, y) \cdot w_2^0 \tag{17}$$

iz (14) i (15) proizlazi

$$e = x_1^H(p_1^0, p_2^0, u) \cdot p_1 + x_2^H(p_1^0, p_2^0, u) \cdot p_2^0 \tag{18}$$

i

$$c = x_1(w_1^0, w_2^0, y) \cdot w_1 + x_2(w_1^0, w_2^0, y) \cdot w_2^0 \quad . \tag{19}$$

Kako potrošač za bilo koju cijenu prvog dobra, $p_1$, odnosno proizvođač za bilo koju cijenu prvog faktora, $w_1$, izabire onu košaru dobara, $x^H(p_1, p_2^0, u)$, odnosno kombinaciju faktora, $x(w_1, w_2^0, y)$, koja minimizira njegove izdatke, odnosno troškove, za zadanu razinu korisnosti, odnosno razinu proizvodnje, košara $x^H(p_1^0, p_2^0, u)$, odnosno kombinacija faktora $x(w_1^0, w_2^0, y)$, ne može biti jeftinija od one koju izabire potrošač, odnosno proizvođač:

$$p_1 x_1^x(p_1, p_2^0, u) + p_2^0 x_2^x(p_1, p_2^0, u) \leq p_1 x_1^x(p_1^0, p_2^0, u) + p_2^0 x_2^x(p_1^0, p_2^0, u)$$

$$e(p_1, p_2^0, u) \leq e, \tag{20}$$

odnosno

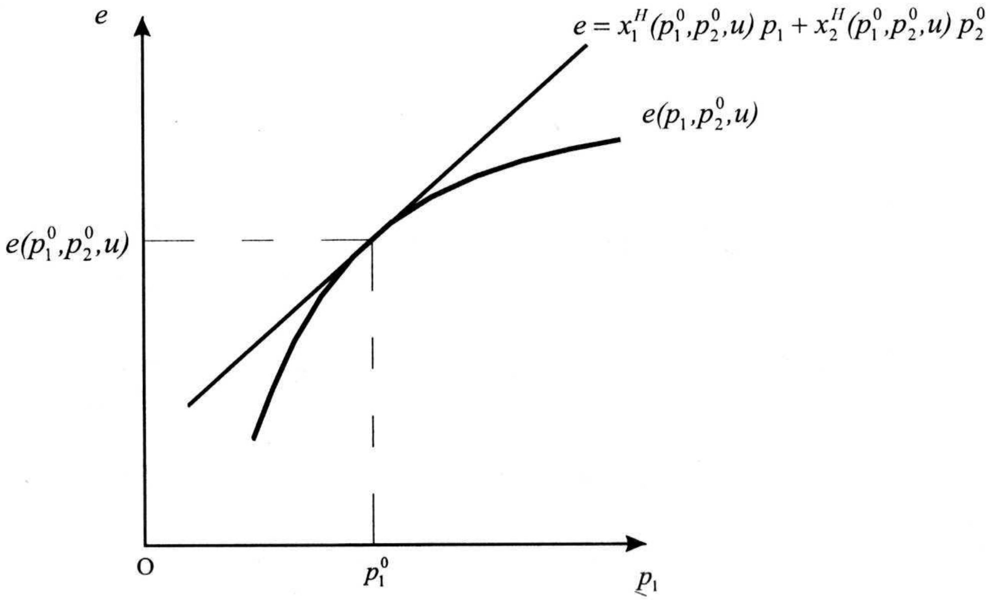
$$w_1 x_1(w_1, w_2^0, y) + w_2^0 x_2(w_1, w_2^0, y) \leq w_1 x_1(w_1^0, w_2^0, y) + w_2^0 x_2(w_1^0, w_2^0, y)$$

$$c(w_1, w_2^0, y) \leq c. \tag{21}$$

Iz (20), odnosno (21), vidimo da se graf funkcije $e(p_1, p_2^0, u)$, odnosno funkcije $c(w_1, w_2^0, y)$, nalazi ispod tangente koja prolazi točkom $(p_1^0, e(p_1^0, p_2^0, u))$, odnosno točkom $\left(w_1^0, c(w_1^0, w_2^0, y)\right)$. Stoga je funkcija $e(p_1, p_2^0, u)$, odnosno funkcija $c(w_1, w_2^0, y)$, konkavna u točki $p_1 = p_1^0$, odnosno u točki $w_1 = w_1^0$. No kako smo $p_1^0$, odnosno $w_1^0$, izabrali proizvoljno, navedene su funkcije konkavne na čitavoj svojoj domeni.

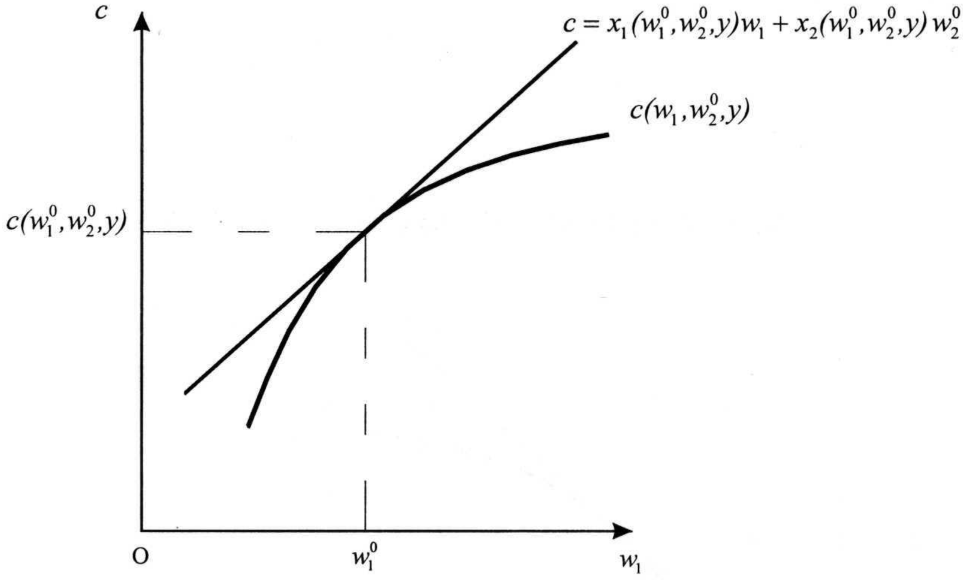
*Slika 1.*

KONKAVNOST FUNKCIJE IZDATAKA $e(p_1, p_2^0, u)$



*Slika 2.*

KONKAVNOST FUNKCIJE TROŠKOVA $c(w_1, w_2^0, y)$




Da bismo se općenito uvjerili da je funkcija izdataka konkavna u cijenama dobara, $p$, i da je funkcija troškova konkavna u cijenama faktora, $w$, pokazat ćemo da vrijedi

$$e(p,u) \leq e(p^0,u) + \nabla e(p^0,u)(p - p^0), \forall p^0, p, \qquad (22)$$

odnosno

$$c(w,y) \leq c(w^0,y) + \nabla c(w^0,y)(w - w^0), \forall w^0, w, \qquad (23)$$

čim je $u > \min U$, odnosno $y > 0$ (inače je konkavnost trivijalno ispunjena).

Budući da je

$$e(p^0,u) = p^0 x^H(p^0,u) \quad \text{i} \quad \nabla e(p^0,u) = x^H(p^0,u) \ ,$$

odnosno

$$c(w^0,y) = w^0 x(w^0,y) \quad \text{i} \quad \nabla c(w^0,y) = x(w^0,y)$$

slijedi

$$e(p^0,u)+\nabla e(p^0,u)(p-p^0)=p^0x^x(p^0,u)+x^x(p^0,u)(p-p^0)=$$

$$=px^H(p^0,u)\geq e(p,u) \quad ,$$

odnosno

$$c(w^0,y)+\nabla c(w^0,y)(w-w^0)=w^0x\ \ (w^0,y)+x\ \ (w^0,y)(w-w^0)=$$

$$=wx(w^0,y)\geq c(w,y) \, ,$$

čime smo pokazali da je funkcija izdataka konkavna u cijenama dobara, *p*, i da je funkcija troškova konkavna u cijenama faktora proizvodnje, *w*.

## Novo ruho konkavnosti funkcije izdataka i funkcije troškova

Premda smo se u prethodnom odjeljku uvjerili da su funkcija izdataka i funkcija troškova konkavne, prva u cijenama dobara, a druga u cijenama faktora, dokaz konkavnosti nije onoliko intuitivno uvjerljiv koliko su intuitivno uvjerljiva ostala svojstva tih funkcija. Stoga ćemo u ovom odjeljku dati posve novi i intuitivno znatno uvjerljiviji dokaz konkavnosti.

Suočen sa zadanim cijenama dobara, odnosno sa zadanim cijenama faktora, potrošač koji minimizira izdatke i proizvođač koji minimizira troškove troše određene svote novca, prvi da bi ostvario zadanu razinu korisnosti, a drugi da bi ostvario zadanu razinu proizvodnje. Pritom su košara dobara koja minimizira izdatke i kombinacija faktora koja minimizira troškove podjedno i košara dobara i kombinacija faktora koje, uz iste cijene i ne veće iznose od minimalnih izdataka, odnosno minimalnih troškova, maksimiziraju i korisnost i proizvodnju. Pitamo se može li potrošač ostvariti veću od zadane razine korisnosti nekom proizvoljnom konveksnom kombinacijom dvaju vektora cijena dobara i njima pripadajućih minimalnih izdataka nužnih za ostvarenje te razine korisnosti, odnosno može li proizvođač ostvariti veću od zadane razine proizvodnje nekom proizvoljnom konveksnom kombinacijom dvaju vektora cijena faktora i njima pripadajućih minimalnih troškova nužnih za ostvarenje te razine proizvodnje? Ako pokažemo da je odgovor na postavljeno pitanje negativan, onda ćemo na osnovi toga nalaza zaključiti da za zadanu razinu korisnosti, odnosno za zadanu razinu proizvodnje, pri proizvoljno izabranim konveksnim kombinacijama cijena dobara, odnosno faktora, moramo potrošiti barem onolike svote koliko iznose izabrana konveksna kombinacija izdataka, odnosno izabrana konveksna kombinacija troškova:

$$e(p^t,u) \geq te(p^1,u)+(1-t)e(p^2,u) \tag{24}$$

gdje su $u \in U,\ p^1, p^2 >> 0,\ t \in [0,1]$ proizvoljni, $p^t = tp^1 + (1-t)p^2$, odnosno

$$c(w^t,y) \geq tc(w^1,y)+(1-t)c(w^2,y) \tag{25}$$

gdje su $y \geq 0,\ w^1, w^2 >> 0,\ t \in [0,1]$ proizvoljni, $w^t = tw^1 + (1-t)w^2$.

Neka je

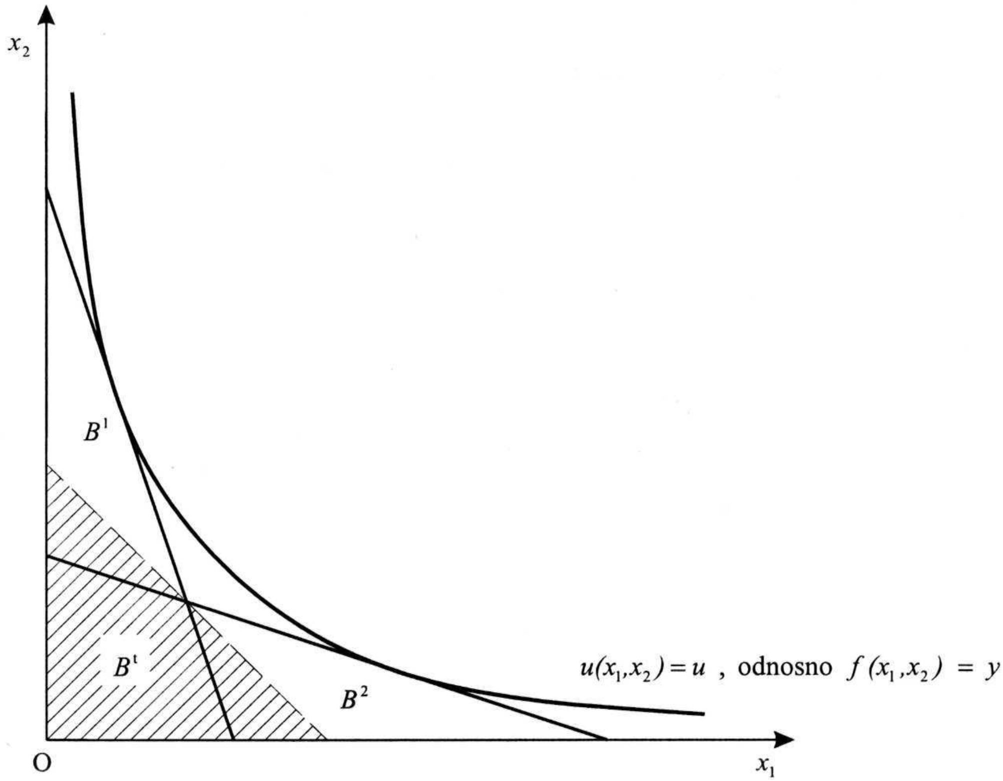
$$B^1 = \left\{x \,\middle|\, x \in R^n_+,\ p^1 x \leq e(p^1,u)\right\},$$
$$B^2 = \left\{x \,\middle|\, x \in R^n_+,\ p^2 x \leq e(p^2,u)\right\},$$
$$B^t = \left\{x \,\middle|\, x \in R^n_+,\ p^t x \leq te(p^1,u)+(1-t)e(p^2,u)\right\}, \tag{26}$$

odnosno

$$B^1 = \left\{x \,\middle|\, x \in R^n_+, w^1 x \leq c(w^1,y)\right\},$$
$$B^2 = \left\{x \,\middle|\, x \in R^n_+, w^2 x \leq c(w^2,y)\right\},$$
$$B^t = \left\{x \,\middle|\, x \in R^n_+, w^t x \leq tc(w^1,y)+(1-t)c(w^2,y)\right\}, \tag{27}$$

U slučaju se dvaju dobara budžetski prostori mogu predočiti slikom:

*Slika 3.*




Nijedna košara dobara iz budžetskog prostora, odnosno nijedna kombinacija faktora iz prostora ostvarivih kombinacija, određenog netrivijalnom konveksnom kombinacijom neproporcionalnih vektora cijena i pripadnih minimalnih izdataka, odnosno troškova, ne pripada krivulji indiferencije, odnosno izokvanti.

Pokažimo da je skup $B^t$ sadržan u uniji skupova $B^1$ i $B^2$ ,

$$B^t \subset B^1 \cup B^2 \qquad (28)$$

Pretpostavimo $x \notin B^1 \cup B^2$. Slijedi

$$x \notin B^1, p^1 x > e(p^1, u), \text{ odnosno } w^1 x > c(w^1, y)$$
$$x \notin B^2, p^2 x > e(p^2, u), \text{ odnosno } w^2 x > c(w^2, y)$$

Kako je barem jedan od brojeva t, 1-t različit od nule, vrijedi

$$tp^1 x + (1-t) p^2 x > te(p^1, u) + (1-t) e(p^2, u),$$
$$p^t x > te(p^1, u) + (1-t) e(p^2, u),$$

odnosno

$$tw^1 x + (1-t) w^2 x > tc(w^1, y) + (1-t) c(w^2, y),$$
$$w^t x > tc(w^1, y) + (1-t) c(w^2, y).$$

Dakle, $x \notin B^t$, čime smo pokazali da vrijedi (28).
Iz (28) slijedi

$$\max_{x \in B^t} u(x) \leq \max\left\{ \max_{x \in B^1} u(x), \max_{x \in B^2} u(x) \right\} = \max\{u, u\} = u, \quad (29)$$

odnosno

$$\max_{x \in B^t} f(x) \leq \max\left\{ \max_{x \in B^1} f(x), \max_{x \in B^2} f(x) \right\} = \max\{y, y\} = y, \quad (30)$$

Vidimo da budžetski prostor i prostor ostvarivih kombinacija faktora, $B^t$, ne omogućuju potrošaču da ostvari višu razinu korisnosti ni proizvođaču da postigne višu razinu proizvodnje. Stoga potrošačev iznos izdataka za tu razinu korisnosti, pri cijenama dobara $p^t$, mora biti barem $te(p^1, u) + (1-t) e(p^2, u)$, a proizvođačev iznos troškova za tu razinu proizvodnje, pri cijenama faktora $w^t$, $tc(w^1, y) + (1-t) c(w^2, y)$.

Očito je, dakle, da funkcija izdataka (24) mora biti konkavna u cijenama dobara, $p$, i da funkcija troškova (25) mora biti konkavna u cijenama faktora proizvodnje, $w$.

## Zaključak

Potrošačev problem minimiziranja izdataka za zadanu razinu korisnosti matematički je identičan s proizvođačevim problemom minimiziranja troškova za postizanje zadane razine proizvodnje. Stoga funkcija izdataka i funkcija troškova imaju jednaka matematička svojstva: neprekidne su; striktno rastuće i neograničene odozgo, prva u razini korisnosti, a druga u razini proizvodnje; neopadajuće, linearno homogene, konkavne i diferencijabilne, prva u cijenama dobara, a druga u cijenama faktora proizvodnje.

U literaturi se često ističe da je, između svih navedenih svojstava, svojstvo konkavnosti funkcija izdataka i troškova intuitivno najmanje očito. Stoga se u članku nudi ne samo intuitivno prihvatljivije objašnjenje konkavnosti navedenih funkcija od dosadašnjih objašnjenja, već i dokaz konkavnosti na osnovi tog intuitivnog objašnjenja.

Kada su vektor cijena dobara $p^1$ i zadana razina korisnosti $u$, potrošač samo jednom košarom dobara, $x^1$, kao jedinstvenim rješenjem, minimizira izdatke koji iznose $e^1 = e(p^1, u)$. Slično tome, kada je vektor cijena $p^2$, neproporcionalan s vektorom cijena $p^1$, i zadana ista razina korisnosti $u$, potrošač samo jednom košarom dobara, $x^2$, različitom od košare $x^1$, kao jedinstvenim rješenjem, minimizira izdatke i oni iznose $e^2 = e(p^2, u)$. Proizvoljna netrivijalna konveksna kombinacija vektora cijena $p^1$ i $p^2$, jeste treći vektor cijena, $p^t$, koji sa pripadajućom konveksnom kombinacijom izdataka $e^1$ i $e^2$, $e^t$, daje budžetsku hiperravninu $p^t x = e^t$ koja ne dodiruje hiperplohu indiferencije. Stoga u novoj situaciji za kupnju košare dobara koja minimizira izdatke za zadanu razinu korisnosti potrošač mora izdati veću svotu od $e^t$.

Isto tako, kada je vektor cijena faktora proizvodnje $w^1$ i zadana razina proizvodnje y, proizvođač samo jednom kombinacijom faktora, $x^1$, kao jedinstvenim rješenjem, minimizira troškove koji iznose $c^1 = c(w^1, y)$. Slično tome, kada je vektor cijena $w^2$, neproporcionalan s vektorom cijena $w^1$, i zadana ista razina proizvodnje $y$, proizvođač samo jednom kombinacijom faktora, $x^2$, različitom od kombinacije faktora $x^1$, kao jedinstvenim rješenjem, minimizira troškove i oni iznose $c^2 = c(w^2, y)$. Proizvoljna netrivijalna konveksna kombinacija vektora cijena $w^1$ i $w^2$, jest treći vektor cijena, $w^t$, koji s pripadajućom konveksnom kombinacijom troškova $c^1$ i $c^2$, $c^t$, daje izotroškovnu hiperravninu koja ne dodiruje hiperizokvantu. Stoga u novoj situaciji za kupnju kombinacije faktora koja minimizira troškove za zadanu razinu proizvodnje proizvođač mora izdati veću svotu od $c^t$.

## LITERATURA

1. Geoffrey A. Jehle and Philip J. Reny, 1998: *˝Advanced Microeconomic Theory˝*, Reading, Mass, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
2. Hal R. Varian, 1992: *˝Microeconomic Analysis˝*, Third Edition, Norton.
3. Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston and Jerry R. Green, 1995: *˝Microeconomic Theory˝*, Oxford University Press, Inc.

## NEW INSIGHT INTO THE CONCAVITY OF EXPENDITURE AND COST FUNCTIONS

### Summary

The authors focus on the concavity of - analytically identical - expenditure and cost functions. After pointing to the fact that intuitively acceptable explanation of the concavity of both expenditure and cost functions, the first one in prices of goods and the second one in prices of production factors, has been lacking from the literature, the authors offer a new and more plausible proof of concavity.