*Zoran Ivanović**

UDK 338.91:338.94:332.6
Izvorni znanstveni rad

STRATEGIJA ARBITRAŽNOG ODREĐIVANJA CIJENA VRIJEDNOSNICA

Model arbitražnog određivanja cijena kao takav stvara manji broj pretpostavki o investitorovim preferencijama nego što to čini model vrednovanja kapitalne imovine. Jedna je glavna pretpostavka arbitražnog modela činjenica da će svaki investitor kada ima mogućnost povećati povrat svog portfolija bez povećanja rizika, to i učiniti.

Uvod

Glavni model vrednovanja kapitalne imovine predstavlja model ravnoteže koji nastoji dati odgovor na jedno od pitanja, a pitanje glasi: "zašto različiti vrijednosni papiri imaju različite očekivane stope povrata?". Taj pozitivan ekonomski model određivanja cijene imovine polazi od pretpostavke da vrijednosni papiri imaju različitu očekivanu stopu povrata, jer imaju i različiti stupanj kolebljivosti. No, postoji i alternativni model određivanja cijene imovine, a to je arbitražno određivanje cijene vrijednosnica, koji je na određeni način nešto jednostavniji model od modela vrednovanja kapitalne imovine.

Model vrednovanja kapitalne imovine zahtijeva velik broj pretpostavki, kao na primjer, pretpostavlja se da svaki investitor izabire svoj optimalni portfolijo, koristeći se različitim krivuljama koje se zasnivaju na očekivanim povratima portfolija i na njihovim standardnim devijacijama. Nasuprot tome, arbitražnim određivanjem cijene vrijednosnica polazi se od manje pretpostavki. Jedna je glavna pretpostavka arbitražnog modela činjenica da će svaki investitor, kada ima mogućnost povećati povrat svog portfolija bez povećanja rizika, to i učiniti. Mehanizam takvog djelovanja uključuje uporabu arbitražnog portfolija.

* Z. Ivanović, redoviti profesor Fakulteta za turistički i hotelski menadžment, Opatija. Članak primljen u uredništvu: 28. 10. 2000.

Modeli faktora

Model arbitražnog određivanja cijena započinje stvaranjem pretpostavke da su povrati vrijednosnih papira povezani s nepoznatim brojem nepoznatih faktora. Da bi takvu postavku pojednostavnili, potrebno je zamisliti da postoji samo jedan faktor i da je taj faktor očekivana stopa povećanja industrijske proizvodnje. U tom je slučaju povrat vrijednosnih papira povezan sa sljedećim jednofaktorskim modelom:[1]

$$r_i = a_i + b_i F_1 + e_i \tag{1}$$

gdje je
r_i = stopa povrata za vrijednosni papir i
F_1 = vrijednost faktora, koji je u ovom slučaju očekivana stopa rasta industrijske proizvodnje
e_i = uobičajena granica greške.

U ovoj jednakosti element b_i iskazuje osjetljivost vrijednosnog papira i na faktor.[2]

Zamislimo da investitor posjeduje tri dionička paketa i tekuću tržišnu vrijednost svoje imovine u svakoj od 4.000.000 novčanih jedinica. U tom je slučaju, investitorova investirajuća vrijednost W_0 jednaka 12.000.000 novčanih jedinica. Smatra se da ta tri dionička paketa imaju ovakav očekivani povrat i osjetljivost:

i	r_i	b_i
Dionički paket 1	15%	0.9
Dionički paket 2	21%	3.0
Dionički paket 3	12%	1.8

Predstavljaju li ovi očekivani povrati i osjetljivost faktora situaciju ravnoteže? Ako ne, što će se dogoditi sa cijenama dioničkih paketa i s očekivanim povratima da bi se uspostavila ravnoteža?

Princip arbitraže

Skupovi skupljača poštanskih maraka postali su uobičajni događaji. Skupljači se sastaju, da bi međusobno razmjenjivali poštanske marke po pregovaračkim cijenama. Pretpostavimo da osoba A obilazi takva okupljanja, gdje upoznaje osobu

[1] Gary Chamberlain & Michael Rothschild: "Arbitrage, Factor Structure and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets," Econometrica, No. 5., 1998., str. 1281-1304.

[2] Također je poznat i kao atribut vrijednosnog papira i.

S koja želi prodati određenu poštansku marku za 400 novčanih jedinica. Daljim istraživanjem konvencije, otkriva osobu B koji nudi 500 novčanih jedinica za istu poštansku marku. Prepoznajući financijsku mogućnost, osoba A pristaje prodati poštansku markicu osobi B, koja joj daje 500 novčanih jedinica u gotovini. Ona žuri natrag do osobe S kojoj daje 400 novčanih jedinica, uzima markicu i vraća se natrag osobi B koja posjeduje poštansku markicu. Osoba A zadržava profit od 100 novčanih jedinica od te dvije transakcije i dalje kreće u potragu za drugim mogućnostima. Osoba A je bila uključena u oblik arbitraže.

Arbitraža je zarada od bezrizičnog profita preuzimanjem prednosti od različitog određivanja cijena za istu fizičku imovinu ili vrijednosni papir.[3] Kao široko primijenjena investicijska taktika, arbitraža obično donosi sa sobom prodaju vrijednosnog papira po relativno visokoj cijeni i istovremenu kupnju istog vrijednosnog papira (ili njezinog funkcionalnog ekvivalenta) po relativno niskoj cijeni.

Arbitražna aktivnost kritični je element modernih, efikasnih tržišta vrijednosnih papira. Budući da su arbitražni profiti po definiciji bezrizični, svi su investitori stimulirani iskoristiti njihove prednosti kad se god one pojave. Sigurno, neki investitori imaju veće mogućnosti i sklonost za uključivanje u arbitražu od drugih. No, potrebno je relativno malo tih aktivnih investitora da bi se iskoristile arbitražne situacije i da bi se, kupnjom i prodavanjem dionica, eliminirale takve mogućnosti ostvarenja profita.

Priroda je arbitraže jasna kada se govori o različitim cijenama pojedine vrijednosnice ali, "spremna arbitražna" mogućnost može obuhvatiti i slične vrijednosnice ili portfolija. Ta sličnost može biti definirana na mnogo načina. Jedan zanimljiv način jest izlaganje prožimajućim faktorima koji utječu na cijenu vrijednosnice.[4]

Model faktora ukazuje na to da će se vrijednosnice ili portfolija, s jednako-faktorskom osjetljivošću, ponašati na isti način osim kada postoji nefaktorski rizik. Stoga bi vrijednosni papiri ili portfolija s istom faktorskom osjetljivošću morali nuditi iste očekivane stope povrata. Ako to ne čine, tada postoji "spremna arbitražna" mogućnost. Investitori će iskoristiti prednosti tih mogućnosti, uzrokujući njihovu eliminaciju. To je osnovna logika na kojoj počiva model arbitražnog određivanja cijena vrijednosnica.

---

[3] Zoran Ivanović: "The Valuation of Riskless Securities", Ekonomické Rozhl'dy, No. 1, Bratislava, 2000.

[4] Neki od faktora mogu se indentificirati kao: stopa rasta industrijske proizvodnje, stopa inflacije (i očekivana i neočekivana), raskorak između dugoročnih i kratkoročnih kamatnih stopa, raskorak između nisko i visoko rangiranih obveznica, stopa rasta u agregatnoj potrošnji ekonomije, stopa povrata u odnosu na tržišni indeks, i sl.

Arbitražni portfolio

Prema modelu arbitražnog određivanja cijena vrijednosnica, investitor će pomno istražiti mogućnost formiranja arbitražnog portfolija da bi povećao očekivani povrat svojih tekućih portfolija bez povećanja rizika. No, što je zapravo portfolijo?[5] Ponajprije, portfolijo je to što se ne traže nikakva dodatna sredstva od investitora. Ako X_i označuje promjenu u investitorovom posjedovanju vrijednosnica *i* (i stoga i vrijednost vrijednosnica *i* u arbitražnom portfoliju), taj uvjet arbitražnog portfolija može se napisati kao:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \tag{2}$$

Kao drugo, arbitražni portfolijo nije osjetljiv ni na koji faktor. Zbog toga što je osjetljivost portfolija na faktor samo prosječna izvagana osjetljivost vrijednosnih papira u portfoliju na taj faktor, taj uvjet arbitražnog portfolija može biti zapisan kao:

$$b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 = 0 \tag{3a}$$

ili, u trenutnom primjeru:

$$0.9X_1 + 3.0X_2 + 1.8X_3 = 0 \tag{3b}$$

Na taj način, u ovom primjeru, arbitražni portfolijo neće biti osjetljiv na industrijsku proizvodnju.

Striktno govoreći, arbitražni portfolijo morao bi također imati nulti nefaktorski rizik.[6] No, model arbitražnog određivanja cijena vrijednosnica pretpostavlja da je takav rizik dovoljno mali da bi ga valjalo ignorirati. U toj terminologiji, arbitražni portfolijo ima "nulti faktor izlaganja".

U ovom trenutku mnogi potencijalni arbitražni portfoliji mogu se prepoznati. Ti su kandidati jednostavno portfoliji koji udovoljavaju uvijetima danim u jednakostima (2) i (3b). Potrebno je imati na umu da postoje tri nepoznanice (X_1, X_2, X_3) i dvije jednakosti u ovoj situaciji, a to znači da postoji konačan broj kombinacija vrijednosti za X_1, X_2, X_3 koje zadovoljavaju te dvije jednadžbe. Kao način nalaženja jedne kombinacije, uzmimo kao primjer arbitražnog određivanja vrijednosti 0.1 za X_1. Čineći tako rezultat dvije jednadžbe s tri nepoznanice je:

$$0.1 + X_2 + X_3 = 0 \tag{4a}$$
$$0.9X_1 + 3.0X_2 + 1.8X_3 = 0 \tag{4b}$$

---

[5] Vidjeti: Jack Clark Francis: "Investments-Analysis and Management", Fifth Edition, McGraw--Hill, New York, 1991.

[6] Stephen A. Ross: "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing," Journal of Economic Theory, No. 3, 1996., str. 341-360.

Rješenje jednadžbi (4a) i (4b) jest $X_2 = 0.75$ i $X_3 = -0.175$. Stoga je i potencijalni arbitražni portfolio onaj s ovim vrijednostima.

Da bismo utvrdili je li ova investicijska mogućnost uistinu arbitražni portfolijo, mora se utvrditi i njegov očekivani povrat. Ako je on pozitivan, tada će arbitražni portfolijo biti identificiran. Matematički, treći i posljednji uvjet za arbitražni portfolijo jest:

$$X_1\bar{r}_1 + X_2\bar{r}_2 + X_3\bar{r}_3 > 0 \tag{5a}$$

ili, u našem primjeru,

$$15X_1 + 21X_2 + 12X_3 > 0 \tag{5b}$$

Uporabom rješenja za ovu investicijsku mogućnost, može se vidjeti da očekivani povrat iznosi 0.975% [= (15% x 0.1) + (21% x0.75) + (12% x -0.75)]. Budući da je to pozitivan broj, arbitražni je portfolijo uistinu identificiran.

Upravo identificirani arbitražni portfolijo obuhvaća kupnju 1.200.000 novčanih jedinica dioničkog paketa 1 i 900.000 novčanih jedinica dioničkog paketa 2. Kako smo došli do tih brojeva? Rješenje dolazi od uzimanja trenutne tržišne vrijednosti portfolija (W_0= 12.000.000 novčanih jedinica) i njegovim multipliciranjem prema vrijednosti arbitražnog portfolija od $X_1 = 0.1$ i X_2= 0.075. Otkuda se dolazi do novca za tu kupnju? Novac dolazi od prodaje 2.100.000 novčanih jedinica dioničkog paketa 3.[7]

Sažeto, taj je arbitražni portfolijo privlačan investitoru koji teži većem povratu i nije usredotočen na nefaktorski rizik. To ne zahtijeva nikakva dodatna ulaganja, nema rizičnog faktora i ima pozitivno očekivano razdoblje povrata.

Položaj investitora

Na ovoj točki gledanja investitor može procijeniti svoj položaj sa jednog od dva ekvivalentna stajališta: (1) zadržavanjem i starog i arbitražnog portfolija ili (2) zadržavanjem novog portfolija. Uzmimo u obzir, primjerice, vrijednost dioničkog paketa 1. Vrijednost starog portfolija bila je 0.33 i vrijednost arbitražnog portfolija bila je 0.10, s time da je suma tih dviju vrijednosti bila jednaka 0.43. Potrebno je imati na umu i da je novčana vrijednost držanja dioničkog paketa 1 u novom portfoliju narasla na 5.200.000 novčanih jedinica (= 4.000.000 + 1.200.000), pa je njegova vrijednost 0.43 novčane jedinice (=5.200.000/12.000.000), ekvivalent sumi vrijednosti starog i arbitražnog portfolija.

Slično, očekivani povrat za portfolijo jednak je sumi očekivanih povrata starog i arbitražnog portfolija, ili 16.975% (= 16% + 0.975%). Ekvivalentno tome,

---

[7] Imajmo na umu da je X_3W_0 = -.175 x 12.000.000 = -2.100.000 novčanih jedinica.

očekivani povrat novog portfolija može se izračunati uporabom vrijednosti novog portfolija i očekivanim povratom dioničkog paketa ili 16.975% [= (0.43 x 15%) + (0.41 x 21%) + (0.16 x 12%)].

Osjetljivost novog portfolija iznosi 1.9 [= (0.43 x .9) + (0.41 x 3.0) + (0.16 x 1.8)]. To je isto kao i suma osjetljivosti starog i arbitražnog portfolija (= 1.9 + 0.0).

A što je s rizikom novog portfolija? Pretpostavimo da je standardna devijacija starog portfolija bila 11%. Varijanca arbitražnog portfolija bit će mala zbog toga što je jedini izvor rizika nefaktorski rizik. Slično tome, varijanca novog portfolija razlikovat će se od starog samo kao rezultat promjena u njegovom nefaktorskom riziku. Stoga se može zaključiti da će rizik novog portfolija biti približno 11%. Tablica 1 sažima ta promatranja.

Tablica 1.

UTJECAJ ARBITRAŽNOG PORTFOLIJA NA POLOŽAJ INVESTITORA

	Stari portfolijo	Arbitražni portfolijo	Novi portfolijo
Vrijednosti			
X_1	0.333	0.100	0.433
X_2	0.333	0.075	0.408
X_3	0.333	-0.175	0.158
Značajke			
r_p	16.000%	0.975%	16.975%
b_p	1.900	0.000	1.900
σ_p	11.000%	mali	oko 11.000%

Efekti određivanja cijena

Što su posljedice kupnje dioničkog paketa 1 i 2 i prodaje paketa 3? Kad bi svi to radili, tržišne bi cijene bile pogođene time i, stoga bi se njihovi očekivani povrati prilagodili tome. Specifično, cijene dioničkih paketa 1 i 2 rast će zbog povećanog pritiska kupnje. Sa druge strane, to će uzrokovati pad njihovih očekivanih stopa povrata. I obratno, ako je pritisak kupnje na dioničkom paketu 3, to će uzrokovati pad cijene paketa i rast njegove stope povrata.

To se može vidjeti ispitivanjem jednadžbe za procjenu očekivane stope povrata dioničkog paketa:

$$\bar{r}_i = \frac{\bar{P}}{P_0} - 1 \tag{6}$$

gdje je P_0 tekuća cijena dioničkog paketa i $\bar{P}_0$ je očekivana cijena dioničkog paketa na svršetku razdoblja. Kupnjom dioničkog paketa kao što je paket 1 ili 2, povećat će se njegova tekuća cijena P_0 i to će rezultirati padom očekivane stope povrata $\bar{r}$. I obrnuto, prodajom dioničkog paketa kao što je paket 3, smanjit će se njegova cijena i rezultat će biti porast njegovog očekivanog povrata.

Ta kupoprodajna aktivnost nastavit će se sve dok sve arbitražne mogućnosti ne budu značajno smanjene ili eliminirane. U tom će trenutku postojati približno linearni odnos između očekivane stope povrata i osjetljivosti veličine:

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_i \tag{7}$$

gdje su i λ_0 i λ_1 konstante. Ta je jednadžba jednadžba određivanja cijena imovine po modelu arbitražnog određivanja cijena vrijednosnica kada su stope povrata određene jednim faktorom. Ta je jednadžba pravocrtna, što znači da će u ravnotežnoj točki postojati linearni odnos između očekivanih povrata i osjetljivosti.

U primjeru, jedna moguća ravnotežna točka može imati $\lambda_0 = 8$ i $\lambda_1 = 4$. Iz toga proizlazi jednadžba određivanja cijena, koja je jednaka:

$$\bar{r}_i = 8 + 4b_i \tag{8}$$

To će rezultirati ovim ravnotežnim razinama očekivanih stopa povrata za dioničke pakete 1, 2 i 3:

$$\bar{r}_1 = 8 + (4x0.9) = 11.6\%$$
$$\bar{r}_2 = 8 + (4x4.0) = 20.0\%$$
$$\bar{r}_3 = 8 + (4x1.8) = 15.2\%$$

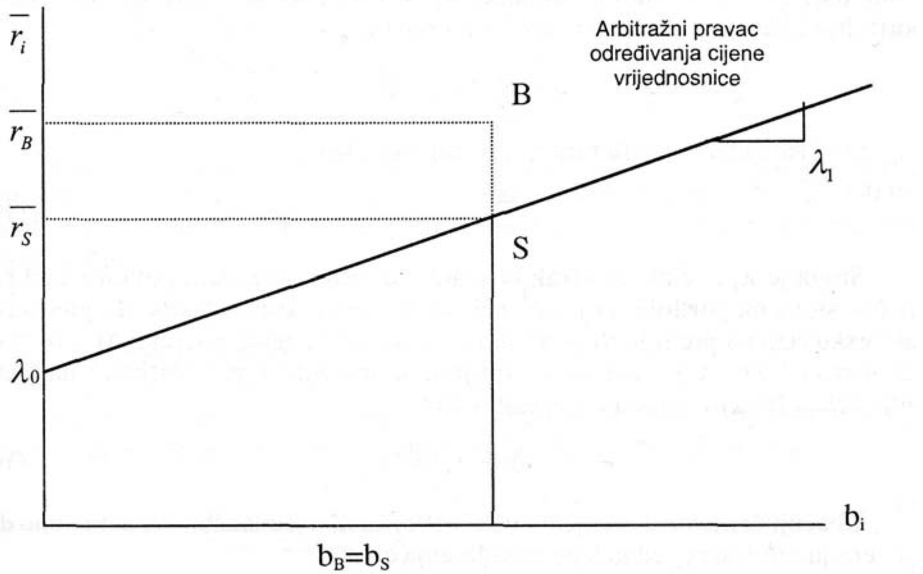
Kao rezultat toga, očekivani povrati za dioničke pakete 1 i 2 past će sa 15% i 21%, na 11.6%, odnosno na 20%, zbog povećanja pritiska kupnje. Nasuprot tome, povećani pritisak prodaje uzrokovat će da očekivani povrat za dionički paket 3 naraste sa 12% na 15.2%. U krajnjoj liniji, očekivana je stopa povrata za bilo koju vrijednosnicu, u ravnotežnoj točki, linearna funkcija osjetljivosti vrijednosnice na faktor b_i.

Grafička ilustracija

Slika 1. ilustrira jednadžbu određivanja cijene imovine iz jednadžbe (7). Bilo koja vrijednosnica koja ima faktorsku osjetljivost i očekivani povrat koji leži izvan pravca neće imati određenu cijenu prema modelu arbitražnog određivanja cijena vrijednosnica i predstavljat će investitore koji imaju mogućnost formiranja arbitražnog portfolija. Vrijednosnica *B* je primjer. Ako investitor kupi vrijednosnicu *B* i proda vrijednosnicu *S* za jednaku svotu, tada će investitor formirati arbitražni portfolijo. Kako je to moguće?

Slika 1.

PRAVAC ODREĐIVANJA CIJENE VRIJEDNOSNICE
PREMA ARBITRAŽNOM MODELU



Prvo, prodajom količine vrijednosnica *S,* da bi se platio dobar položaj vrijednosnica *B,* investitor neće morati angažirati nikakva nova financijska sredstva. Drugo, budući da vrijednosnice *S* i *B* imaju istu osjetljivost na faktor, prodaja vrijednosnica *S* i kupnja vrijednosnica *B* konstituirat će portfolijo bez osjetljivosti na faktor. Naposljetku, arbitražni portfolijo imat će pozitivan očekivani povrat zbog toga što je očekivani povrat vrijednosnica *B* veći od očekivanog povrata vrijednosnica *S*. Kao rezultat investitorove kupnje vrijednosnica *B,* njihova će cijena rasti i, u skladu s time, očekivani će povrat padati dok se ne smjesti na pravcu modela arbitražnog određivanja cijene imovine.

Interpretacija jednadžbe arbitražnog određivanja cijena

Kako se mogu interpretirati konstante λ_0 i λ_1 koje se pojavljuju u jednadžbi arbitražnog određivanja cijena (7)? Pretpostavljajući da postoji bezrizična imovina, takva će imovina imati stopu povrata koja je konstanta. Stoga ta imovina neće biti osjetljiva na faktor. Iz jednadžbe (7) može se vidjeti da je $\bar{r}_i = \lambda_0$ za bilo koju imovinu $b_i = 0$. U slučaju bezrizične imovine, također je poznato da iz $\bar{r}_i = r_f$ proizlazi da je $\lambda_0 = r_f$. Stoga vrijednost λ_0 u jednadžbi (7) mora biti r_f , dopuštajući jednadžbi da bude napisana i ovako:

$$\bar{r}_i = r_f + \lambda_1 b_i \tag{9}$$

U terminima λ_1, njegova vrijednost može se sagledati, uzimajući u obzir portfolijo čistog faktora (ili igru čistog faktora) označen sa p^*, a koji ima jediničnu osjetljivost na faktor, što znači $b_{p^*} = 1.0$.[8] Prema jednadžbi (9), takav će portfolijo imati sljedeći očekivanu stopu povrata:

$$\bar{r}_{p^*} = r_f + \lambda_1 \tag{10a}$$

Ova jednadžba također može biti zapisana kao:

$$\bar{r}_{p^*} - r_f = \lambda_1 \tag{10b}$$

Stoga je λ_1 očekivani višak povrata, odnosno očekivani povrat iznad bezrizične stope na portfolio koji ima jediničnu osjetljivost na faktor. To predstavlja faktorsku rizičnu premiju ili premiju faktorski-očekivanog povrata. Ako $\delta_1 = \bar{r}_{p^*}$ označava očekivani povrat na portfolijo koji ima jediničnu osjetljivost na faktor, jednadžba (10b) može se još napisati i kao:

$$\delta_1 - r_f = \lambda_1 \tag{10c}$$

Ubacujući lijevu stranu jednadžbe (10c) za λ_1 u jednadžbu (9) dobivamo drugu verziju arbitražne jednadžbe određivanja cijena:

$$\bar{r}_i = r_f + (\delta_1 - r_f) b_i \tag{11}$$

U ovom primjeru, budući da je rf = 8% i $\lambda_1 = \delta_1 - r_f = 4\%$, slijedi da je = 12%. To znači da očekivani povrat na portfolijo koji ima jediničnu osjetljivost na prvi faktor iznosi 12%.

Da bi generalizirali arbitražnu jednadžbu određivanja cijena, slučaj u kojem povrati po vrijednosnicama ovise o više faktora valja pomno ispitati. To je i učinjeno, uzimajući u obzir model sa dva faktora i proširenjem analize na *k* faktora, gdje je $k>2$.

Model sa dva faktora

U slučaju dvaju faktora, koji su označeni kao F_1 i F_2 , i uz predviđenu industrijsku proizvodnju i inflaciju, svaka će vrijednosnica imati dvije osjetljivosti b_{i1}

[8] Ako postoje i drugi faktori, portfolijo bi bio sastavljen kao da nije osjetljiv na njih.

i b_{i2} . Stoga se povrati po vrijednosnom papiru mogu prikazati narednim modelom faktora:

$$r_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + e_i \tag{12}$$

Četiri dionička paketa imaju ovakav očekivani povrat i osjetljivost:

i	$\overline{r}_i$	b_{i1}	b_{i2}
Dionički paket 1	15%	0.9	2.0
Dionički paket 2	21%	3.0	1.5
Dionički paket 3	12%	1.8	0.7
Dionički paket 4	8%	2.0	3.2

U takvim je okolnostima potrebno razmotriti optimalnost ulaganja u pojedine vrijednosne papire koja se pruža investitoru koji posjeduje 20.000.000 novčanih jedinica i koji želi inestirati po 5.000.000 novčanih jedinica u svaki dioničarski paket.

Arbitražni portfolijo

Odgovor na ovo pitanje, moguće je ispitati formiranjem arbitražnog portfolija, koji prije svega mora biti promatran preko jednadžbi koje slijede:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 \tag{13}$$

$$0.9X_1 + 3X_2 + 1.8X_3 + 2X_4 = 0 \tag{14}$$

$$2X_1 + 1.5X_2 + .7X_3 + 3.2X_4 = 0 \tag{15}$$

To znači da arbitražni portfolijo mora uključiti dodatno angažiranje sredstava investitora i mora imati nultu osjetljivost na svaki faktor.

Potrebno je imati na umu da postoje tri jednadžbe koje valja zadovoljiti i da svaka jednadžba obuhvaća četiri nepoznanice. Jedno rješenje može se naći izjednačivanjem X_1 s 0.1 (arbitražno izabrana svota) i rješavanjem preostalih vrijednosti. Ako to učinimo, rezultat su ove vrijednosti:

$$X_2 = 0.088,\ \ X_3 = \text{-}0.108 \text{ i } \ X_4 = \text{-}0.08.$$

Te vrijednosti predstavljaju potencijalni arbitražni portfolijo. Ono što ostaje za ispitati jest vidjeti ima li taj portfolijo pozitivan očekivani povrat. Izračunavanjem očekivanog povrata portfolija dobiva se da jest on jednak 1.41% [= (0.1 x 15%) + (0.088 x 21%) + (-0.108 x 12%) + (-0.08 x 8%)]. Na taj je način arbitražni portfolijo identificiran.

Taj arbitražni portfolijo obuhvaća kupnju dioničkih paketa 1 i 2, što se financira prodajom dioničkih paketa 3 i 4. Sa druge strane, to znači da će očekivani povrati dioničkih paketa 1 i 2 pasti, a povrati paketa 3 i 4 će narasti. Investitori će nastaviti stvarati takve arbitražne portfolije sve dok se ne dostigne ravnoteža. To znači da će se ravnoteža postići kada svi portfoliji koji zadovoljavaju uvjete iz jednadžbi (13), (14) i (15) postignu očekivanu stopu povrata koja je jednaka nuli. To će se dogoditi kada nastane linearni odnos između očekivanih povrata i osjetljivosti kako slijedi:

$$\overline{r_i} = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} \tag{16}$$

Kao i u jednadžbi (7), ovo je linearna jednadžba, samo sada ima tri dimenzije $\overline{r_i}$, b_{i1} i b_{i2} . Stoga je u odnosu s jednadžbom na dvodimenzionaloj razini.

U primjeru, jedna je od mogućih ravnotežnih točaka gdje je $\lambda_0 = 8$, $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = -2$. Stoga je jednadžba određivanja cijena jednaka:

$$\overline{r_i} = 8 + 4b_{i1} + 2b_{i2} \tag{17}$$

Kao rezultat toga, četiri dionička paketa imaju ove razine ravnoteže očekivanih stopa povrata:

$$\overline{r_1} = 8 + (4 \text{ x} 0 .9) - (2 \text{ x } 2) = \ 7.6\%$$
$$\overline{r_2} = 8 + (4 \text{ x } 3) - (2 \text{ x } 1.5) = 17.0\%$$
$$\overline{r_3} = 8 + (4 \text{ x } 1.8) - (2 \text{ x } 0.7) = 13.8\%$$
$$\overline{r_4} = 8 + (4 \text{ x } 2) - (2 \text{ x } 3.2) = \ 9.6\%.$$

Očekivani povrati dioničkih paketa 1 i 2 pali su sa 15% i 21%, a očekivani su povrati paketa 3 i 4 narasli sa 12%, odnosno 8%. Uz dani prodajno-kupovni pritisak koji je proizvelo investiranje u arbitražni portfolio, te promjene idu u predviđenom smjeru.

Jedna od posljedica jednadžbe (17) jest da će dionički paket s većom osjetljivošću na prvi faktor od drugog dioničkog paketa imati veći očekivani povrat ako dva dionička paketa također imaju istu osjetljivost na drugi faktor zbog toga što je $\lambda_1 > 0$. Nasuprot tome, budući da je $\lambda_2 < 0$, dionički će paket s većom osjetljivošću na drugi faktor imati niži očekivani povrat od drugog dioničkog paketa s nižom osjetljivošću na drugi faktor, omogućujući da oba dionička paketa imaju istu osjetljivost na prvi faktor. No, efekt od toga što dva dionička paketa imaju različite osjetljivosti na ta dva faktora može biti zbunjujući. Na primjer, dionički paket 4 ima niži očekivani povrat od dioničkog paketa 3, iako su obje njihove osjetljivosti veće. To se događa zbog toga što prednost veće osjetljivosti na prvi faktor ($b_{41} = 2.0 > b_{31} = 0.7$) nije dovoljna veličina da bi se ublažili nedostaci posjedovanja veće osjetljivosti na drugi faktor ($b_{42} = 3.2 > b_{32} = 0.7$).

Efekti određivanja cijena

Razvijanje jednofaktorske jednadžbe (7) arbitražnim određivanjem cijena u dvofaktorskoj situaciji relativno je jednostavno. Kao i ranije, λ_0 predstavlja bezrizičnu stopu povrata. To je zbog toga što bezrizična imovina nije osjetljiva ni na koji faktor, a to znači da su njezine vrijednosti *b*i1 i *b*i2 jednake nuli. Stoga slijedi da je $\lambda_0 = r_f$. Dakle, jednadžba (16) može se općenito pisati i kao:

$$\overline{r_i} = r_f + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} \tag{18}$$

U primjeru jednadžbe (16), može se vidjeti da je $r_f = 8\%$.

Razmotrimo sada slučaj dobro diverzificiranog portfolija, koji ima jediničnu osjetljivost na prvi faktor i nultu osjetljivost na drugi faktor. Kao što smo prije spomenuli, takav je portfolijo poznat kao portfolijo čistog faktora ili igra čistog faktora, zbog toga što: ima jediničnu osjetljivost na jedan faktor, nema osjetljivosti na druge faktore i ima nulti nefaktorski rizik. Specifično, $b_1 = 1$ i $b_2 = 2$. Iz jednadžbe (18) može se vidjeti da je očekivani povrat na ovaj portfolijo, označen s δ_1 , jednak $r_f + \lambda_1$. Ako slijedi da je $\delta_1 - r_f = \lambda_1$, jednadžba (18) može biti napisana i kao:

$$\overline{r_i} = r_f + (\delta_1 - r_f) b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} \tag{19}$$

U primjeru danom u jednadžbi (16), može se vidjeti da je $\delta_1 - r_f = 4$. To znači da je $\delta_1 = 12$ zbog toga što je $r_f = 8$. Drugim riječima, portfolio, koji ima jediničnu osjetljivost na predviđenu industrijsku proizvodnju (prvi faktor) i nultu osjeljivost na predviđenu inflaciju (drugi faktor), imao bi očekivanu stopu povrata od 12% , ili 4% više od bezrizične stope od 8%.

Napokon, uzmimo u obzir portfolijo koji ima nultu osjetljivost na prvi faktor i jediničnu osjetljivost na drugi faktor, što znači da je $b_1 = 0$ i $b_2 = 1$. Iz jednadžbe (18) može se vidjeti da je očekivani povrat na taj portfolijo, označen s δ_2 , jednak $r_f + \lambda_2$. Prema tome, $\delta_2 - r_f = \lambda_2$, što omogućuje da jednadžbu (19) pišemo kao:

$$\overline{r_i} = r_f + (\delta_1 - r_f) b_{i1} + (\delta_2 - r_f) b_{i2} \tag{20}$$

U primjeru danom u jednadžbi (16), vidi se da je $\delta_2 - r_f = -2$. To znači da je $\delta_2 = 6$, zato što da je $r_f = 8$. Drugim riječima, portfolijo, koji ima nultu osjetljivost na predviđenu industrijsku proizvodnju (prvi faktor) i jediničnu osjetljivost na predviđenu inflaciju (drugi faktor), imao bi očekivani povrat od 6%, ili 2% manje od bezrizične stope od 8%.

Modeli s više faktora

Kada se povrati ostvaruju kroz model sa dva faktora umjesto s jednofaktorskim modelom, arbitražne jednadžbe određivanja cijena (7) i (11) jednostavno su proširene da bi obuhvatile dodatni faktor u jednadžbama (16) i (20). Što se događa s arbitražnim jednadžbama određivanja cijena kada se povrati ostvaruju kroz model s više faktora, gdje je broj faktora *k* veći od dva? Iz toga proizlazi da su osnovne jednadžbe određivanja cijena ponovo proširene.

U slučaju *k* faktora ($F_1, F_2, ..., F_k$) svaki vrijednosni papir ima *k* osjetljivosti ($b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{ik}$) u narednom *k*-faktorskom modelu:

$$\bar{r}_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + ... + b_{ik}F_k + e_i \qquad (21)$$

Prema tome, ovo sugerira da će vrijednosnim papirima biti određena cijena prema sljedećoj jednadžbi, koja je slična jednadžbama (7) i (16):

$$\bar{r}_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + ... + \lambda_k b_{ik} \qquad (22)$$

Kao i prije,radi se o linearnoj jednadžbi, osim što je sada u $k + 1$-oj dimenziji, s time da su dimenzije $r_i, b_{i1}, b_{i2}, ...,$ i b_{ik} .

Proširenje jednadžbi arbitražnog određivanja (11) i (20) određivanje cijena za ovu situaciju relativno je jednostavno. Kao i prije, predstavlja bezrizičnu stopu, jer da bezrizična imovina nije osjetljiva ni na koji faktor. Svaka vrijednost δ_j predstavlja očekivani povrat na portfolijo vrijednosnica, koji ima jediničnu osjetljivost na faktor *j* i nultu osjetljivost na sve ostale faktore. Kao rezultat toga, jednadžbe (11) i (20) mogu biti proširene kako slijedi:

$$\bar{r}_i = r_f + (\delta_1 - r_f)b_{i1} + (\delta_2 - r_f)b_{i2} + ... + (\delta_k - r_f)b_{ik} \qquad (23)$$

Stoga je očekivani povrat na vrijednosnice jednak bezrizičnoj stopi plus *k* premije rizika zasnovane na osjetljivosti vrijednosnica na *k* faktora.

Arbitražni model versus model vrednovanja kapitalne imovine

Za razliku od arbitražnog modela, model vrednovanja kapitalne imovine ne pretpostavlja da su povrati uzrokovani modelom faktora. No, to ne znači da je model vrednovanja nekonzistentan u odnosu na svijet u kojem su povrati uzrokovani modelom faktora. Uistinu, moguće je da postoji svijet gdje su povrati uzrokovani modelom faktora, gdje postoje i ostale pretpostavke arbitrežnog modela, ali gdje postoje i sve pretpostavke modela vrednovanja. Sada ćemo razmotriti takvu situaciju.

Modeli s jednim faktorom

Zamislimo što će se dogoditi ako su povrati uzrokovani jednofaktorskim modelom i ako je taj faktor tržišni portfolio. U takvoj će situaciji, δ_1 korespondirati s očekivanim povratom na tržišnom portfoliju, a b_i predstavljat će betu vrijednosnica *i* mjerenu u odnosu na tržišni portfolijo.[10] Stoga će se i model vrednovanja kapitalne imovine održati.

Što ako su povrati uzrokovani jednofaktorskim modelom i ako taj faktor nije tržišni portfolijo? Tada će δ_1 korespondirati s očekivanim povratom na portfolio s jediničnom osjetljivošću na faktor, a b_i će predstavljati osjetljivost vrijednosnica *i* mjerenu u odnosu na faktor, ali, ako se model vrednovanja kapitalne imovine također održi, tada je očekivani povrat vrijednosnica *i* povezan i s betom i osjetljivošću:

$$\bar{r}_i = r_f + (\bar{r}_M - r_f)\beta_{iM} \tag{24}$$

$$\bar{r}_i = r_f + (\delta_1 - r_f)b_i \tag{25}$$

To upućuje da koeficijent beta i osjetljivost moraju na neki način biti međusobno povezani; na koji su način povezani prikazano je u nastavku.

Beta koeficijenti i faktorske osjetljivosti

Kako očekivani povrati mogu biti u linearnom odnosu i s koeficijentima beta i s osjetljivostima? To će se dogoditi zbog toga što će koeficijent beta i osjetljivost biti međusobno povezani na ovaj način:

$$\beta_{iM} = \frac{COV(F_1, r_M)}{\sigma^2_M} b_i \tag{26}$$

gdje $COV(F_1, r_M)$ predstavlja kovarijancu između faktora i tržišnog portfolija, dok σ_M^2 označuje varijancu povrata na tržišni portfolijo. Budući da je veličina $COV(F_1, r_M)/\sigma_M^2$ konstanta i ne mijenja se od jedne vrijednosnice do druge, jednadžba (26) jednaka je tvrdnji da će β_{iM} biti jednak konstantnom vremenu b_i kada se jednadžbe (24) i (25) održe. Stoga ako je faktor industrijska proizvodnja, tada jednadžba (26) pokazuje da je beta svake vrijednosnice jednaka konstantnom vremenu osjetljivosti vrijednosnice na industrijsku proizvodnju. Konstanta će biti pozitivan broj ako su industrijska proizvodnja i povrati na tržišni portfolijo u pozitivnoj korelaciji, pa će i $COV(F_1, r_M)$ biti pozitivan. U supotnom, ako je konstanta negativna, zbog negativne korelacije, tada će i $COV(F_1, r_M)$ biti negativan.

[9] "Beta je jednostavno nagib karakterističnog pravca i opisuje funkcijsku vezu između natprosječnog prinosa pojedinačnog vrijednosnog papira i prinosa tržišnog portfolija." Vidjeti: Vladimir Veselica: "Financijski sustav u ekonomiji", Inženjerski biro, Zagreb, 1995., str. 416.

Premije faktorskog rizika

U nastavku razmatranja ove problematike, valja iskazati što se događa ako se u jednadžbu (24) uvrsti jednadžba (26):

$$\bar{r}_i = r_f + \left[\left(\bar{r}_M - r_f\right)\frac{COV\left(F_1, r_M\right)}{\sigma_M^2}\right]b_i \tag{27}$$

Usporedbom ove jednadžbe s jednadžbom (9) otkrivamo da se, ako se pretpostavke i arbitražni model (s jednim faktorom) i model vrednovanja održe, tada mora održati i naredni odnos:

$$\lambda_1 = \left(\bar{r}_M - r_f\right)\frac{COV\left(F_1, r_M\right)}{\sigma_M^2} \tag{28}$$

Sam po sebi, arbitražni model ne iskazuje ništa o veličini faktorske premije rizika λ_1. No, ako se model vrednovanja također održi, mogu biti ponuđene neke smjernice. Te su smjernice dane u jednadžbi (28), iz čega se vidi da se održavaju ako su pretpostavke i arbitražni model i model vrednovanja uzete kako su zadane.

Zamislimo da se faktor kreće s tržišnim portfolijom, što znači da je pozitivno povezan s tržišnim portfoliom, tako da je $COV\ (F_1, r_M)$ pozitivan. Budući da su σ_M^2 i $(\bar{r}_M - r_f)$ također pozitivni, slijedi da je desna strana jednadžbe (28) pozitivna i stoga je i pozitivan. Osim toga, budući da je λ_1 pozitivan, u jednadžbi (9) može se vidjeti da što je veća vrijednost b_i, to će biti i veća očekivana stopa povrata na vrijednosnice. Općenito, ako je faktor u pozitivnom odnosu s tržišnim portfolijom, tada će očekivani povrat vrijednosnica biti negativna funkcija osjetljivosti vrijednosnica na taj faktor.

Tržišni indeks kao faktor

Što se događa ako su povrati uzrokovani jednofaktorskim modelom i umjesto industrijske proizvodnje, faktor je povrat u odnosu na tržišni indeks? Pogledajmo slučaj kada su zadovoljena naredna dva uvjeta: (1) stopa povrata u odnosu na indeks i tržišni portfolijo u savršenoj je korelaciji i (2) varijanca stope povrata na tržišni portfolio i tržišni indeks jednaki su.

Prvo, koeficijent beta vrijednosnice bit će jednak njezinoj osjetljivosti. To se može uočiti sagledanjem jednadžbe (26). Uz dva upravo predočena uvjeta $COV\ (F_1, r_M) = \sigma_{F\,1}\sigma_M = \sigma_M^2$, tako da je $COV\ \ (F_1, r_M)/\sigma_M^2 = 1$, jednadžba (26) može se skratiti i na ovaj odnos, a to je: $\beta_{iM} = b_i$.

Drugo, λ_1 će pod tim uvjetima biti jednak $\bar{r}_M - r_f$. To se može vidjeti i ako se uzme u obzir da je $COV\ (F_1\ , r_M\ )\ /\sigma_M^2 = 1$, što također znači da se jednadžba (28) može skratiti na $\lambda_1 = \bar{r}_M - r_f$. Budući da se u jednadžbi (10c) kaže da je

$\delta_1 - r_f = \lambda_1$, to znači da je $\delta_1 = \bar{r}_M$. Stoga je očekivani povrat na portfolio koji ima jediničnu osjetljivost na povrat u odnosu na tržišni indeks jednak očekivanom povratu na tržišni portfolijo.

Drugim riječima, ako se može naći zamjena za tržišni portfolijo tako da prethodno dana dva uvjeta budu zadovoljena, tada će se model vrednovanja održati tamo gdje je uloga tržišnog portfolia na dobar način zamijenjena. No, budući da je tržišni portfolio nepoznat, ne može se sa sigurnošću znati zadovoljava li zamjena dva uvjeta.

Modeli s više faktora

Moguće je da se model vrednovanja održi, iako su povrati uzrokovani modelom s više faktora, kao što je to primjer i s modelom sa dva faktora. Ponovno, jednadžbe (24) i (25) mogu biti proširene tako da se pokaže da je očekivani povrat na vrijednosnice *i* povezan s njihovom betom i dvije osjetljivosti:

$$\bar{r}_i = r_f + \left(\bar{r}_M - r_f\right)\beta_{iM} \tag{29}$$

$$\bar{r}_i = r_f + \left(\delta_1 - r_f\right)b_{i1} + \left(\delta_2 - r_f\right)b_{i2} \tag{30}$$

U tom slučaju, jednadžba (26) može se proširiti kako bi pokazala da će bete biti u linearnom odnosu s osjetljivostima na ovaj način:

$$\beta_{iM} = \frac{COV\left(F_1, r_M\right)}{\sigma_M^2} b_{il} + \frac{COV\left(F_2, r_M\right)}{\sigma_M^2} b_{i2} \tag{31}$$

gdje su $COV(F_1, r_M)$ i $COV(F_2, r_M)$ kovarijance između prvog faktora i povrata na tržišni portfolio, odnosno kovarijance između drugog faktora i povrata na tržišni portfolio. Budući da su veličine / i / konstante, iz jednadžbe (31) može se vidjeti da će biti funkcija b_{i1} i b_{i2} kada su zadovoljene jednadžbe (29) i (30). To znači da će beta dioničkog paketa biti linearna kombinacija njezine osjetljivosti na dva faktora, odnosno, u ovom primjeru, da će veličina bete dioničkog kapitala biti ovisno o veličini njezine osjetljivosti na predviđenu industrijsku proizvodnju i inflaciju.

Pogledajmo što će se dogoditi ako se desna strana jednadžbe (31) zamijeni s na desnoj strani jednadžbe (29):

$$\bar{r}_i = r_f + \left(\bar{r}_M - r_f\right) = \left[\frac{COV\left(F_1, r_M\right)}{\sigma_M^2} b_{il} + \frac{COV\left(F_2, r_M\right)}{\sigma_M^2} b_{i2}\right] \tag{32a}$$

što također može biti napisano i kao:

$$\bar{r}_i = r_f + \left[\left(\bar{r}_M - r_f \right) = \frac{COV\left(F_1, r_M\right)}{\sigma_M^2} b_{i1} + \left(\bar{r}_M - r_f \right) \frac{COV\left(F_2, r_M\right)}{\sigma_M^2} b_{i2} \right] \quad (32b)$$

Usporedbom ove jednadžbe s jednadžbom (18) dolazimo do zaključka da ako se pretpostavke i arbitražni model (sa dva faktora) i model vrednovanja održi, tada vrijedi i odnos:

$$\lambda_1 = \left(\bar{r}_M - r_f \right) \frac{COV\left(F_1, r_M\right)}{\sigma_M^2} \quad (33a)$$

$$\lambda_2 = \left(\bar{r}_M - r_f \right) \frac{COV\left(F_2, r_M\right)}{\sigma_M^2} \quad (33b)$$

Stoga će veličine λ_1 i λ_2 biti ovisne i o tržišnoj premiji $(\bar{r}_M - r_f)$, pozitivnom broju i kovarijanci faktora s tržišnim portfolijom, koja može biti pozitivna ili negativna. To znači da će λ_1 i λ_2 imati pozitivne vrijednosti ako su faktori u pozitivnoj korelaciji s povratima na tržišni portfolijo. No, ako je bilo koji faktor u negativnoj korelaciji s povratima na tržišni portfolijo, tada je korespondirajuća vrijednost λ negativna (kao što je slučaj s λ_2 u našem primjeru).

Zaključak

Model arbitražnog određivanja cijena predstavlja model izračuna ravnotežne cijene vrijednosnica. Model kao takav stvara manji broj pretpostavki o investitorovim preferencijama nego što to čini model vrednovanja imovine. Arbitražni model polazi od pretpostavke da su povrati na vrijednosnice uzrokovani različitim faktorima.

Arbitražni portfolijo uključuje dugoročne i kratkoročne vrijednosne papire, pa kao takav mora imati neto tržišnu vrijednost koja je jednaka nuli, ne smije imati osjetljivost na bilo koji faktor i mora imati pozitivanu očekivanu stopu povrata.

Investitori ulažu u arbitražni portfolijo, podižući i smanjujući cijene dugoročnim vrijednosnim papirima, sve dok se sve arbitražne mogućnosti ne eliminiraju. Kada su sve arbitražne mogućnosti eliminirane, ravnotežno-očekivani povrat na vrijednosnice bit će linearna funkcija osjetljivosti na određene faktore.

Arbitražni model i model vrednovanja imovine ne moraju bezuvjetno biti oprečni jedan prema drugome. Ako se povrati na vrijednosnice ostvaruju modelom faktora i ako se model vrednovanja imovine održi, tada će koeficijent beta vrijednosnice ovisiti o osjetljivosti vrijednosnice na faktore i kovarijance između faktora i tržišnog portfolija.

LITERATURA:

1. *Chamberlain, G. & Rothschild, M.:* “Arbitrage, Factor Structure and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets,” Econometrica, No. 5, 1998.
2. *Francis, J. C.:* “Investments-Analysis and Management”, Fifth Edition, McGraw--Hill, New York, 1991.
3. *Ivanović, Z.:* “The Valuation of Riskless Securities”, Ekonomické Rozhl’dy, No. 1, Bratislava, 2000.
4. *Ross, A. S.:* “The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing,” Journal of Economic Theory, No. 3, 1996.
5. *Veselica, V.:* “Financijski sustav u ekonomiji”, Inženjerski biro, Zagreb, 1995.

STRATEGY OF ARBITRARY DETERMINATION OF SECURITIES PRICE

Summary

The model of arbitrary price determination represents alternative model for equilibrium securities price calculation. The model itself creates less assumptions about investor’s preferences than the model of capital property evaluation. A main assumption of arbitrary model lies in a fact that every investor will when it is possible to increase the return of its portfolio without risk increase, do this. The mechanism of such activity includes the use of arbitrary portfolio.