

Zoran Ivanović*

UDK 338.91:338.94:332.6
Izvorni znanstveni rad

FAKTORSKI MODELI U FUNKCIJI PROCJENE PRIHODA VRIJEDNOSNICA

Proces ostvarivanja prihoda koji povezuje prihode od vrijednosnica s kretanjima jednog ili više zajedničkih faktora moguće je iskazati faktorskim modelom. Moderna portfolio teorija faktorskim modelima procjene omogućuje investitoru, odnosno procjenitelju mogućnosti, optimalnu procjenu prihoda pojedine vrijednosnice.

Uvod

Cilj je moderne portfolio teorije osigurati način na koji investitor može identificirati svoj optimalni portfolio u slučaju kada postoji beskonačan broj mogućnosti. Korištenje takvog sistema koji obuhvaća očekivane prihode i standardne devijacije pokazuje da investitor mora procijeniti očekivani prihod i standardnu devijaciju za svaku vrijednosnicu koja se promatra, kako bi se uključila u portfolio zajedno sa svim kovarijancama između vrijednosnica. Tim procjenama investitor može izvesti zakrivljeni skup efikasnosti financijskog ulaganja. Tada u određenom razdoblju investitor može, uz izvjestan stupanj rizika prepoznati tangentni portfolio i može utvrditi mjesto linearnog skupa efikasnosti. Na kraju investitor može nastaviti investirati u takav tangentni portfolio, te posuđivati i iznajmljivati po niskorizičnim stopama, gdje će iznos plasiranja i pozajmljivanja ovisiti o sklonosti investitora ostvarenju rizičnog prihoda.

Faktorski modeli i procesi ostvarivanja prihoda

Zadatak za identificiranje zakrivljenog skupa efikasnosti financijskog ulaganja znatno se pojednostavnjuje uvođenjem procesa ostvarivanja prihoda, koji predstavlja statistički model koji opisuje kako se ostvaruje prihod na vrijednosnice. Jedan od

* Z. Ivanović, redoviti profesor Fakulteta za turistički i hotelski menadžment, Opatija. Članak primljen u uredništvo: 28. 10. 2000.

oblika procesa ostvarivanja prihoda naziva se modelom tržišta, koji ističe da je prihod od vrijednosnica funkcija profita na tržišni indeks. Faktorski modeli predstavljaju još jedan od oblika procesa stvaranja prihoda od vrijednosnica.

Faktorski modeli

Faktorski modeli ili indeksni modeli pretpostavljaju da je prihod od vrijednosnica osjetljiv na kretanja različitih faktora ili indeksa. Model tržišta pretpostavlja da postoji samo jedan faktor - prihod na tržišni indeks. Pokušavajući točno procijeniti očekivane prihode, varijance i kovarijance za vrijednosnice, višefaktorski modeli upotrebljiviji su od modela tržišta. Oni posjeduju taj potencijal zbog toga što prihodi od vrijednosnica nisu osjetljivi samo na promjene tržišnog indeksa. To znači da vjerojatno postoji više od jednog faktora u ekonomiji koji utječe na ostvarenje prihoda od vrijednosnica.

Kao proces ostvarivanja prihoda, faktorski model pokušava obuhvatiti najvažnije ekonomske sile koje sistematski mijenjaju cijene svih vrijednosnica. Pretpostavka da će prihodi od dvije vrijednosnice biti međusobno povezani, tj. da će se mijenjati zajedno, samo zajedničkim reakcijama na jedan ili više faktora određenih implicitno u modelu, postoji u samom faktorskom modelu. Bilo koji aspekt prihoda od vrijednosnica koji nije objašnjen u faktorskom modelu smatra se jedinstvenim ili specifičnim za tu vrijednosnicu i zato je nepovezan s jedinstvenim elementima prihoda od drugih vrijednosnica.

Kao rezultat, faktorski model je koristan alat u službi portfolio menadžmenta. On može osigurati informacije koje su potrebne da bi se izračunali očekivani prihodi, varijance i kovarijance za svaku vrijednosnicu, a što i jest prijeko potreban uvjet za utvrđivanje zakrivljenog skupa efikasnosti financijskog ulaganja. Isto tako može biti korišten za opisivanje osjetljivosti portfolia na kretanje unutar faktora.

Primjena

U praksi se svi investitori koriste faktorskim modelima, bilo da to rade eksplicitno ili implicitno.¹ Nemoguće je posebno razmatrati međusobne veze između svake dvije vrijednosnice. Problem računanja kovarijanci između vrijednosnica numerički se eksponencijalno povećava s brojem analiziranih vrijednosnica.

Konceptualno, razmišljanje o zapletenoj mreži varijanci i kovarijanci vrijednosnica postaje zbunjujuće već kada se broj vrijednosnica povećava iznad samo nekoliko, a kamoli kad se povećava za stotine ili tisuće komada. Čak su i superbrza računala, sa sposobnošću procesiranja ogromnog broja podataka izložena velikom naporu kad moraju konstruirati skup efikasnosti za veliki broj vrijednosnica.

¹ Vidjeti: Timothy J. Callagher and Joseph D. Andrew, Jr.: "Financial Management - Principles and Practice", Prentice Hall, Ind., New Jersey, 1997.

Odvajanje je zato važan korak u prepoznavanju zakrivljenog skupa efikasnosti financijskog ulaganja. Faktorski modeli daju potrebnu razinu odvajanja. Oni investitorima osiguravaju okvir za prepoznavanje važnih faktora, kako u ekonomiji, tako i na samom tržištu. Isto tako, oni mogu ustanoviti i veličinu na koju će različite vrijednosnice i portfolia reagirati promjenama u tim faktorima.

Dano vjerovanje da jedan ili više faktora utječu na prihod od vrijednosnica postavlja za cilj analize vrijednosnica utvrđivanje tih faktora i utvrđivanje osjetljivosti prihoda od vrijednosnica na promjene tih faktora.² Taj se odnos formalno naziva faktorskim modelom prihoda od vrijednosnica.

Jednofaktorski modeli

Neki investitori smatraju da proces ostvarivanja prihoda od vrijednosnica uključuje samo jedan faktor. Na primjer, oni mogu tvrditi da prihodi od vrijednosnica odgovaraju predviđenoj stopi rasta bruto domaćeg proizvoda (GDP). Tablica 1. i slika 1. pokazuju jedan od načina na koji se može osigurati sadržaj za takve stavove.

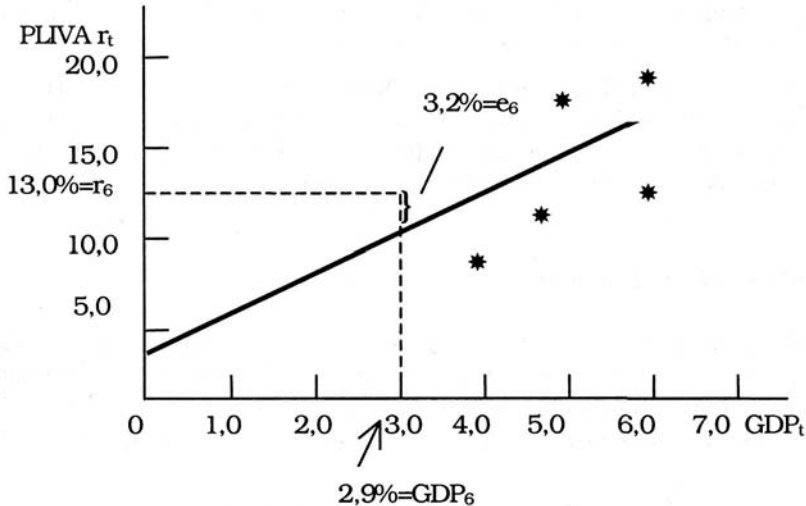
Tablica 1.

GODIŠNJI PRIHODI DIONICE PLIVA			
Godina	Stopa rasta GDP-a - %	Stopa inflacije %	Prihod od dionice PLIVA - %
1	5,7	1,1	14,3
2	6,4	4,4	19,2
3	7,9	4,4	23,4
4	7,0	4,6	15,6
5	5,1	6,1	9,2
6	2,9	3,1	13,0

² Vidjeti: Jack Clark Francis: "Investments-Analysis and Management", Fifth Edition, McGraw-Hill, New York, 1991.

Slika 1.

JEDNOFAKTORSKI MODELI



Na vodoravnoj osi slike 1. nalazi se predviđena stopa rasta BDP, a na okomitoj je osi prihod od dionica PLIVE. Svaka točka Grafikona predstavlja kombinaciju Plivnog prihoda i stope rasta BDP za određenu godinu, kao što je prikazano u tablici 1. Pravac je statistički podešen podacima, pri čemu je korištena tehnika koja se naziva jednostavnom regresijskom analizom.³ Taj pravac ima pozitivan nagib 2, koji upućuje na to da postoji pozitivan odnos između stope rasta BDP i prihoda PLIVE. Više stope rasta BDP povezane su s većim prihodima.

U jednadžbi je odnos između predviđene stope rasta BDP i prihoda PLIVE od dionica prikazan:

$$r_t = a + bBDP_t + e_t \quad (1)$$

gdje je:

r_t = prihod od dionice PLIVE u vremenu t

BDP_t = predviđena stopa rasta BDP u vremenu t

e_t = jedinstveni ili specifični prihod od dionice PLIVE u vremenu t

b = osjetljivost dionice PLIVE na predviđenu stopu rasta BDP

a = multi faktor BDP.

³ Jednostavna se odnosi na činjenicu da postoji samo jedna varijabla - BDP u ovom primjeru - na desnoj strani jednadžbe.

Na slici 1. multi faktor iznosi 4% za određeno razdoblje. To je prihod koji bi bio očekivan od PLIVE kada bi predviđena stopa rasta BDP bila jednaka nuli. Osjetljivost je PLIVE na predviđeni rast BDP b_2 i isti je kao i nagib pravca na Grafikonu 1. Ta vrijednost pokazuje da je predviđeni rast BDP povezan s većim prihodima od dionica. Ako je predviđeni rast BDP 5%, PLIVA bi morala ostvariti prihod od 14% [=4%+(2*5%)]. Ako bi predviđeni rast BDP bio viši 1% (tj. 6%), prihod od PLIVE morao bi biti 2% viši tj. 16%.

U ovom primjeru, predviđeni rast BDP u šestoj godini bio je 2.9%, pri čemu je prihod od PLIVE iznosio 13%. Zato je jedinstveni ili specifični prihod od dionice PLIVE (prikazan kao e_t) u toj godini iznosio +3.2%. To je utvrđeno oduzimanjem vrijednosti koja predstavlja predviđeni prihod od PLIVE, uz to da je predviđeni rast BDP 2.9%, od stvarnog prihoda PLIVE koji iznosi 13%. U tom bi slučaju PLIVA imala očekivani prihod 9.8% [=4+(2*2.9%)], što na kraju rezultira jedinstvenim prihodom od +3.2% (=13% - 9.8%).

Jednofaktorski model prikazan na slici 1. i jednadžbom (1) pripisuje prihod od PLIVE, u bilo kojem određenom vremenu, trima elementima, i to: (a) rezultat koji je zajednički u bilo kojem razdoblju (a), (b) rezultat koji se mijenja kroz vremenska razdoblja ovisno o predviđenoj stopi rasta BDP ($bBDP$), i (c) rezultat koji je specifičan za određeno promatrano razdoblje (e).

Ovaj primjer jednofaktorskog modela može biti uopćen u obliku jednadžbe za bilo koju vrijednosnicu i u razdoblju t :

$$r_{it} = a_i + b_i F_t + e_{it} \quad (2)$$

gdje je F predviđena vrijednost faktora u razdoblju t , a b_i je osjetljivost vrijednosnice i na taj faktor. Ako je predviđena vrijednost faktora jednaka 0, prihod od vrijednosnice biti će $a_i + e_{it}$, gdje e_{it} predstavlja slučajnu grešku. To znači da je to slučajna varijabla s očekivanom vrijednošću 0 i sa standardnom devijacijom σ_{ei} . Ta greška može se smatrati nečim sličnim ishodu koji se javlja kod, na primjer, okretaja ruleta.

Prema jednofaktorskom modelu, očekivani prihod od vrijednosnice i može biti zapisan:

$$r_i = a_i + b_i F \quad (3)$$

gdje F označuje očekivanu vrijednost faktora.

Uz pomoć jednofaktorskog modela može se isto tako pokazati da je varijanca bilo koje vrijednosnice i jednaka:

$$\sigma_i^2 = b_i^2 \sigma_F^2 + \sigma_{ei}^2 \quad (4)$$

gdje je σ_F^2 varijanca faktora F i σ_{ei}^2 varijanca slučajne greške e_i . Dakle, ako je varijanca faktora σ_F^2 jednaka iznosu od 3, a rezidualna varijanca σ_{ei}^2 iznosi 15,2, tada je prema ovoj jednadžbi Plivina varijanca jednaka:

$$\sigma_i = (2^2 * 3) + 15,2 = 27,2$$

Uz pomoć jednofaktorskog modela može biti prikazana i kovarijanca između bilo kojih dviju vrijednosnica i i j u ovom obliku:

$$\sigma_{ij} = b_i b_j \sigma_F^2 \quad (5)$$

U primjeru dionica PLIVE, jednadžba (5) može se koristiti za procjenu kovarijanca između dionice PLIVE i neke hipotetske vrijednosnice, kao npr. dionice bilo koje korporacije. Pretpostavljajući da je faktor osjetljivosti bilo koje kompanije 4,0, kovarijanca između dionice PLIVE i bilo koje druge bit će jednaka: $\sigma_{ij} = 2 * 4 * 3 = 24$

Jednadžbe (4) i (5) zasnovane su na dvjema kritičkim pretpostavkama. Prva je pretpostavka da su slučajna greška i faktor nepovezani. To znači da rezultat faktora nema nikakve veze s rezultatom slučajne greške.

Druga je pretpostavka da su slučajne greške bilo kojih dviju vrijednosnica nepovezane. To znači da rezultat slučajne greške jedne vrijednosnice nema nikakve veze s rezultatom slučajne greške neke druge vrijednosnice. Drugim riječima, prihodi dviju vrijednosnica bit će povezani, tj. mijenjat će se zajedno samo kroz zajedničke reakcije na faktor. Ako je jedna od tih dviju pretpostavki nevažna, onda je model aproksimativan i drugačiji će faktorski model (možda jedan s više faktora) teoretski biti točniji model od procesa ostvarivanja prihoda.

Dva najvažnija obilježja jednofaktorskog modela

Prvo, pretpostavka da svi prihodi od vrijednosnica odgovaraju jednom zajedničkom faktoru uveliko pojednostavnjuje zadatak utvrđivanja tangentskog portfolia. Za utvrđivanje sastava tangentskog portfolia investitor mora procijeniti sve očekivane prihode, varijance i kovarijanca. To se može napraviti s jednofaktorskim modelom procjenjujući a_i , b_i i σ_{ei} za svaku od N rizičnih vrijednosnica.

Potrebne su i očekivane vrijednosti faktora F i njegova devijacija σ_F . S tim procjenama, jednadžbe (3), (4) i (5) mogu se koristiti za izračunavanje očekivanih prihoda, varijanci i kovarijanca za vrijednosnice. Koristeći se tim vrijednostima, može se izvesti zakrivljeni skup efikasnosti financijskog ulaganja. Na kraju se može odrediti tangentsko portfolio za dane bezrizične stope.⁴

Zajednička reakcija vrijednosnica na faktor eliminira potrebu za direktnim procjenjivanjem kovarijanca vrijednosnica. Te su kovarijanca sadržane u osjetljivosti vrijednosnice prema faktoru i varijanci faktora.

Drugo zanimljivo obilježje jednofaktorskog modela vezano je uz razliku, koja vodi uprosječivanju tržišnog rizika i smanjenju jedinstvenog rizika.⁵ To je obilježje

⁴ Zoran Ivanović: "The Valuation of Riskless Securities", Ekonomické Rozhl'dy, No. 1, Bratislava, 2000.

⁵ "U najširem smislu riječi rizik se može definirati kao mogućnost financijskog gubitka", Vladimir Veselica: "Financijski sustav u ekonomiji", Inženjerski biro, Zagreb, 1995., str. 445.

točno za svaki jednofaktorski model, osim što se umjesto tržišni i jedinstveni rizik, mogu koristiti i pojmovi, kao na primjer, faktorski i nefaktorski rizik. U jednadžbi (4) prva varijabla na desnoj strani ($b_i^2 \sigma_F^2$) predstavlja faktorski rizik vrijednosnica, a druga varijabla (σ_{ei}^2) predstavlja nefaktorski rizik vrijednosnica.

Uz pomoć jednofaktorskog modela, varijanca portfolia može se prikazati:

$$\sigma_P^2 = b_P^2 \sigma_F^2 + \sigma_{eP}^2 \quad (6a)$$

gdje:

$$b_P = \sum_{i=1}^N X_i b_i \quad (6b)$$

$$\sigma_{eP}^2 = \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_{ei}^2 \quad (6c)$$

Jednadžba (6a) pokazuje da se ukupan rizik bilo kojeg portfolia može promatrati kao da postoje dvije komponente slične dvjema komponentama ukupnog rizika individualne vrijednosnice prikazane u jednadžbi (4). Prvi i drugi član na desnoj strani jednadžbe (6a) faktor su rizika i nefaktor rizika portfolia.

Kako portfolio postaje razgranatiji, što znači da sadrži više vrijednosnica, svaka će se proporcija X_i smanjivati. Dapače, to neće uzrokovati ni znatnije smanjenje niti znatnije povećanje b_P , osim ako se to pokušalo napraviti promišljeno, i to dodajući vrijednosnicama vrijednosti b_i koje su ili relativno niske ili visoke. Kako jednadžba (6b) pokazuje, to je zato što je b_P jednostavno izmjereni prosjek osjetljivosti vrijednosnica b_i s vrijednostima X_i koje služe kao mjere. Odavde razlika vodi u prosječivanju faktora rizika.

Kako portfolio postaje razgranatiji, postoji razlog da se očekuje smanjenje (σ_{eP}^2 nefaktora rizika). To se može pokazati pregledavajući jednadžbu (6c). Pretpostavljajući da je iznos uložen u svaku vrijednosnicu jednak, ova jednadžba može biti ponovo napisana, ali zamjenjujući X_i sa $1/N$:

$$\sigma_{eP}^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \right)^2 \sigma_{ei}^2 = \left(\frac{1}{N} \right) \left[\frac{\sigma_{e1}^2 + \sigma_{e2}^2 + \dots + \sigma_{eN}^2}{N} \right]$$

Vrijednost u uglatoj zagradi jest prosječni nefaktor rizika za individualne vrijednosnice. Ali nefaktor rizika portfolia samo je jedna N -tina te vrijednosti, zbog toga što se element $1/N$ pojavljuje izvan zagrade. Što se portfolio još više razgranava, broj vrijednosnica u njemu se povećava. To znači da $1/N$ postaje manji, a to onda smanjuje nefaktor rizika portfolia. Pojednostavnjeno rečeno, razlika smanjuje nefaktor rizika.

Višefaktorski modeli

Dvofaktorski modeli

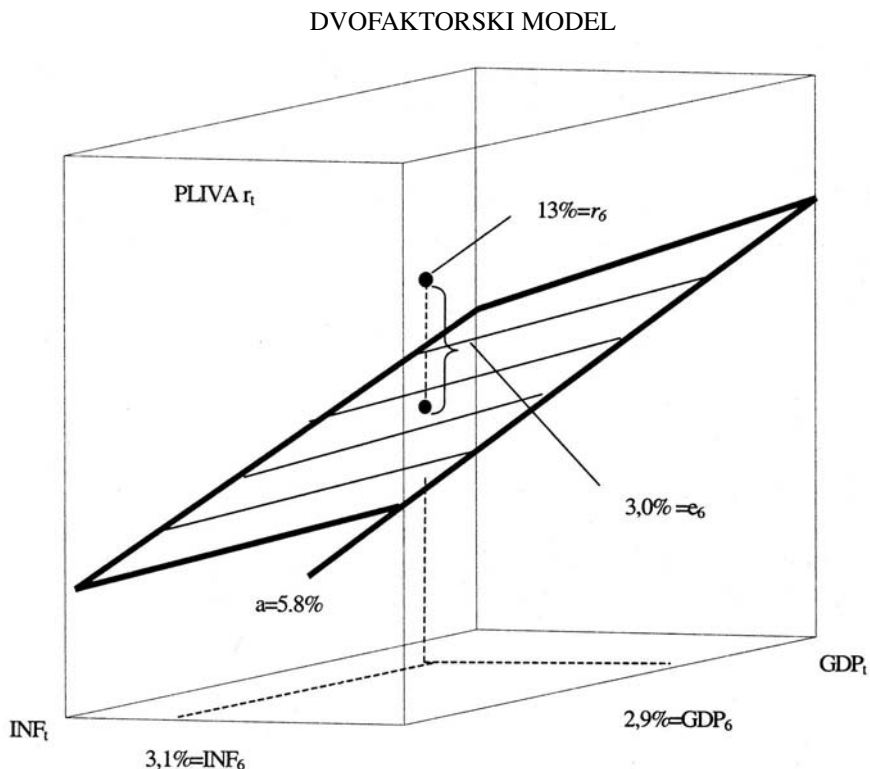
Umjesto jednofaktorskog modela, višefaktorski model prihoda vrijednosnica koji promatra ove različite utjecaje može biti točniji. Kao primjer višefaktorskog modela, promotrimo dvofaktorski model. To znači da pretpostavljamo da proces ostvarivanja prihoda sadrži dva faktora.

U obliku jednadžbe dvofaktorski model u razdoblju t može se iskazati kao:

$$r_{it} = a_i + b_{i1}F_{1t} + b_{i2}F_{2t} + e_{it} \quad (7)$$

gdje su F_{1t} i F_{2t} dva faktora koji znatno utječu na prihode vrijednosnica i b_{i1} i b_{i2} , dakle osjetljivost je vrijednosnica i na ta dva faktora. Isto je kao kod jednofaktorskog modela e_{it} slučajna greška, a a_i je očekivani prihod vrijednosnice i ako svaki od faktora ima vrijednost 0.

Slika 2.



Slika 2. prikazuje ilustraciju dionice korporacije PLIVA na čiji prihod utječu očekivanja koja se tiču rasta stope BDP i stope inflacije. Kao što je bio slučaj u jednofaktorskom primjeru, gdje je svaka točka na slici 2. odgovarala određenoj godini, ovdje je svaka točka kombinacija prihoda PLIVE, stope inflacije i rasta stope BDP u toj godini kao što je prikazano u tablici 1. Sve te razbacane točke okupljene su dvodimenzionalnom ravninom, koristeći se statističkom tehnikom višestruke regresijske analize.⁶ Ravnina za danu vrijednosnicu opisana je prilagodbom jednadžbe (7):

$$r_t = a + b_1GDP_t + b_2INF_t + e_t$$

Nagib ravnine u smjeru stope rasta BDP (b_1) predstavlja osjetljivost vrijednosnice PLIVE na promjene u rastu BDP. Nagib ravnine u smjeru stope inflacije (b_2) predstavlja osjetljivost vrijednosnice PLIVE na promjene stope inflacije. Osjetljivost b_1 i b_2 u ovom su primjeru i pozitivne i negativne i poprimaju vrijednosti od 2.2 do - 0.7. To pokazuje da bi se, kako se predviđeni rast BDP ili inflacije povećava, prihod PLIVE morao povećavati ili smanjivati.

Nulti je faktor u Grafikonu (2) 5.8% i on pokazuje očekivani prihod PLIVE, ako su rast BDP i inflacije jednaki nuli. Na kraju, u danoj godini udaljenost između stvarne točke PLIVE i ravnine pokazuje jedinstveni prihod (e_{it}), odnosno to je dio prihoda PLIVE koji nije dodan ni rastu BDP, niti inflaciji. Na primjer, ako je BDP porastao 2.9%, a inflacija 3.1%, PLIVIN prihod u šestoj godini bit će 10% [=5.8%+(2.2*2.9%)-(7*3.1%)]. Jedinstveni prihod, u toj godini jednak je +3% [=13%-10%].

Četiri parametra valja procijeniti za svaku vrijednosnicu u dvofaktorskom modelu, i to: a_i , b_{i1} , b_{i2} i standardnu devijaciju slučajne greške σ_{ei} . Za svaki od faktora, dvaju parametara valja procijeniti. Ti su parametri očekivane vrijednosti svakog faktora (\bar{F}_1 i \bar{F}_2) i varijance svakog faktora (σ_{F1}^2 i σ_{F2}^2). Isto se tako mora procijeniti i kovarijanca između faktora $COV(F_1, F_2)$.

S tim procjenama, predviđeni prihod za bilo koju vrijednosnicu i može biti izražen primjerom ove formule:

$$\bar{r}_i = a_i + b_{i1}\bar{F}_1 + b_{i2}\bar{F}_2 \quad (8)$$

Na primjer, očekivani prihod PLIVE jednak je 8.9% [=5.8%+(2.2*3%)-(0.7*5%)] uz uvjet da su predviđena povećanja BDP i inflacije 3% i 5%.

Prema dvofaktorskom modelu, varijanca za bilo koju vrijednosnicu i jest:

$$\sigma_i^2 = b_{i1}^2\sigma_{F1}^2 + b_{i2}^2\sigma_{F2}^2 + 2b_{i1}b_{i2}COV(F_1, F_2) + \sigma_{ei}^2 \quad (9)$$

⁶ John E. Hanke and Arthur G. Reirsch: "Understanding Business Statistics", Irwin, Homewood, Il., Boston, 1991, str. 325.

Ako su u ovom primjeru varijance prvog faktora ($\sigma_{F_1}^2$) i drugog faktora ($\sigma_{F_2}^2$) jednake 3 i 2.9, onda je njihova kovarijanca [$\text{COV}(F_1, F_2)$] jednaka 0.65, a varijanca PLIVE iznosi $32.1[(2.2^2 \cdot 3) + (-0.7^2 \cdot 2.9) + (2 \cdot 2.2 \cdot -0.7 \cdot 0.65) + 18.2]$ sve dok su dvije osjetljivosti i slučajna greška varijance 2.2, -0.7 i naravno, 18.2.

Slično se, prema dvofaktorskom modelu kovarijanca između bilo kojih dviju vrijednosnica i i j može izraziti ovako:

$$\sigma_{ij} = b_{i1}b_{j1} \sigma_{F_1}^2 + b_{i2}b_{j2} \sigma_{F_2}^2 + (b_{i1}b_{j2} + b_{i2}b_{j1}) \text{COV}(F_1, F_2) \quad (10)$$

Tako je, nastavljajući s primjerom, procijenjeno da kovarijanca između vrijednosnice PLIVE i neke druge iznosi $39.9 \{=(2.2 \cdot 6 \cdot 3) + (-0.7 \cdot -5 \cdot 2.9) + [(2.2 \cdot -5) + (-0.7 \cdot 6)] \cdot 0.65\}$ zbog osjetljivosti bilo koje vrijednosnice na dva faktora iznosi 6 i -5.

Kao i s jednofaktorskim modelom, jednom kada su očekivani prihodi, varijance i kovarijanca određene, investitor može, koristeći se tim jednadžbama primijeniti matematički postupak optimiziranja kako bi izveo zakrivljeni skup efikasnosti financijskog ulaganja. Tada se za danu bezrizičnu stopu može prepoznati tangenti portfolio nakon kojeg investitor može odrediti svoj optimalni portfolio vrijednosnica.

Sve što je prije rečeno o jednofaktorskom modelu i efektima, pokazuje da se razlike mogu isto tako primijeniti i ovdje, a to je: (a) da razlika vodi uprosječivanju faktora rizika, (b) da razlika može znatno smanjiti nefaktor rizika i (c) da će za dobro "razgranat" portfolio nefaktor rizika biti beznačajan.

Kao u jednofaktorskom modelu, osjetljivost je portfolia na neki određeni faktor u višefaktorskom modelu izmjereni prosjek osjetljivosti vrijednosnica, gdje su mjere jednake proporcijama koje su uložene u vrijednosnice. To se može iskazati, ako počemo od činjenice da je prihod portfolia izmjereni prosjek prihoda od vrijednosnica koje ga sačinjavaju, navedenim obrascem:

$$r_{pt} = \sum_{i=1}^N X_i r_{it} \quad (11)$$

Supstitucijom desne strane jednadžbe (7) s r_{it} , na desnoj strani jednadžbe (11) dobivamo:

$$\begin{aligned} r_{pt} &= \sum_{i=1}^N X_i (a_i + b_{i1} F_{1t} + b_{i2} F_{2t} + e_{it}) = \\ & \left[\sum_{i=1}^N X_i a_i \right] + \left[\sum_{i=1}^N X_i b_{i1} F_{1t} \right] + \left[\sum_{i=1}^N X_i b_{i2} F_{2t} \right] + \left[\sum_{i=1}^N X_i e_{it} \right] \\ &= a_p + b_{p1} F_{1t} + b_{p2} F_{2t} + e_{pt} \end{aligned} \quad (12)$$

gdje:

$$a_p \sum_{i=1}^N X_i a_i \quad b_{p1} \sum_{i=1}^N X_i b_{i1} \quad b_{p2} \sum_{i=1}^N X_i b_{i2} \quad e_{pt} \sum_{i=1}^N X_i e_{it}$$

Valja znati da su osjetljivost portfolia b_{p1} i b_{p2} izmjereni prosjeci individualnih osjetljivosti b_{i1} i b_{i2} .

Faktorski modeli sektora

Cijene vrijednosnica u istom granskom sektoru često se mijenjaju zajedno kao reakcija na promjene očekivanja u tome sektoru. Neki investitori to priznaju i koriste se posebnom vrstom višefaktorskog modela koji se naziva faktorskim modelom sektora. Da bi se stvorio faktorski model sektora, svaka vrijednosnica koja se uzima u obzir mora biti dodijeljena nekom sektoru. U faktorskom modelu dvaju sektora postoje dva sektora i svaka vrijednosnica mora biti dodijeljena jednom od njih.

Na primjer, neka se sektor-faktor1 sastoji od svih industrijskih korporacija, a sektor-faktor2 od svih neindustrijskih korporacija, tada se za F_1 i F_2 može smatrati da predstavljaju prihode industrijskih i neindustrijskih dionica.

S tim faktorskim modelom dva sektora, proces ostvarivanja prihoda od vrijednosnica istog je oblika kao i kod dvofaktorskog modela u jednadžbi (7) osim što u faktorskom modelu dva sektora F_1 i F_2 označuju sektor-faktor1 i 2. Dalje, bilo koja vrijednosnica pripada ili sektor-faktoru1 ili sektor-faktoru2, ali ne obima. Vrijednost nule daje se članu osjetljivosti što odgovara onom sektor-faktoru kojem nije dodijeljena ta vrijednosnica. To znači da su b_{i1} i b_{i2} postavljene kao nule ovisno o sektoru-faktoru kojem nije dodijeljena vrijednosnica i . Vrijednost drugog člana osjetljivosti mora se procijeniti.⁷

Za ilustraciju promotrimo korporaciju "GM" i "DAL". Faktorski model dvaju sektora za GM (vrijeme t je izostavljeno da bi se olakšao prikaz) bio bi:

$$r_{GM} = a_{GM} + b_{GM1} F_1 + b_{GM2} F_2 + e_{GM} \quad (13)$$

Bilo kako, zbog toga što GM pripada sektor-faktoru1, kao industrijska vrijednosnica, koeficijentu b_{GM} je dodijeljena vrijednost 0. Nakon što je to dodijeljeno, jednadžba se smanjila na ovaj oblik:

$$r_{GM} = a_{GM} + b_{GM1} F_1 + e_{GM} \quad (14)$$

⁷ Da bi stvar pojednostavnili, neki analitičari jednostavno tom faktoru daju vrijednost 1.

Odatle se moraju procijeniti samo vrijednosti a_{GM} , b_{GM1} i σ_{eGM} za GM za faktorski model dva sektora. U usporedbi s dvofaktorskim modelom, vrijednosti a_{GM} , b_{GM1} , b_{GM2} i σ_{eGM} moraju se procijeniti.

Slično tome, korporacija DAL pripada neindustrijskom sektoru i ona će imati ovakav faktorski model dvaju sektora:

$$r_{DAL} = a_{DAL} + b_{DAL1}F_1 + b_{DAL2}F_2 + e_{DAL} \quad (15)$$

što bi se smanjilo na:

$$r_{DAL} = a_{GM} + b_{DAL2}F_2 + e_{DAL} \quad (16)$$

kada bi b_{DAL1} dobio vrijednost 0. Odatle se samo vrijednosti a_{DAL} , b_{DAL2} i σ_{eDAL} moraju procijeniti u faktorskom modelu dvaju sektora.

Općenito, četiri parametra valja procijeniti za svaku vrijednosnicu u dvofaktorskom modelu (a_i , b_{i1} , b_{i2} i σ_{ei}), a u faktorskom modelu dvaju sektora valja procijeniti samo tri parametra (a_i , σ_{ei} i /ili b_{i1} ili b_{i2}). Tim procjenama, zajedno s procjenama F_1 , F_2 , σ_{F1} i σ_{F2} , investitor se može koristiti jednadžbama (8) i (9), da bi procijenio očekivani prihod i varijancu za svaku vrijednosnicu. Parovi kovarijanca mogu se procijeniti, koristeći se jednadžbom (10). To će onemogućiti investitora da izvede zakrivljeni skup efikasnosti financijskog ulaganja iz kojeg se može odrediti tangentni portfolio za danu bezrizičnu stopu.

Proširenje modela

Proširenje problema na više od dva faktora zahtijeva napuštanje dijagrama jer se analiza povećava na više od tri dimenzije, ali, dapače, koncepti ostaju isti. Ako ima k faktora, višefaktorski model se može iskazati kao:

$$r_{it} = a_i + b_{i1}F_{1t} + b_{i2}F_{2t} + \dots + b_{ik}F_{kt} + e_{it} \quad (17)$$

gdje svaka vrijednosnica ima k osjetljivosti, jedna za svaki od k faktora.

Moguće je oba faktora i sektor-faktor prikazati u jednadžbi (17). Na primjer, F_1 i F_2 mogu predstavljati BDP i inflaciju, kao u tablici 1., a F_3 i F_4 mogu predstavljati prihod od industrijskih i neindustrijskih dionica. Odavde bi svaka dionica imala tri osjetljivosti: b_{i1} , b_{i2} i b_{i3} za industrijske i b_{i1} , b_{i2} i b_{i4} za neindustrijske korporacije.

Procjena faktorskih modela

Iako se koriste mnoge metode za procjenu faktorskih modela, one se mogu, prema svome pristupu, grupirati na: (a) vremensko - serijski pristupi, (b) presječni pristupi i (c) faktorsko - analitički pristupi.

Vremensko-serijski pristupi

Vremensko-serijski pristupi možda su najintuitivniji investitorima, a polazi od pretpostavke da investitor unaprijed zna faktore koji utječu na prihod od vrijednosnica. Prepoznavanje relevantnih faktora tipično se nastavlja iz ekonomske analize korporacije o kojoj se radi. Aspekti makroekonomije, mikroekonomije, industrijske organizacije i osnovne analize vrijednosnica igrat će veliku ulogu u samome procesu.

Na primjer, kao što je prije raspravljano, za neke se određene makroekonomske varijable može očekivati da će znatno utjecati na prihode od vrijednosnica, uključujući takve stvari kao što su očekivani rast BDP, inflacija, kamatne stope i cijene nafte. S određenim tim faktorima, stvaralac modela skuplja informacije koje se odnose na vrijednosti faktora i prihoda od dionica od jednog do drugog vremenskog razdoblja. Koristeći se tim podacima, stvaralac modela može izračunati osjetljivost prihoda od vrijednosnica na faktore, nulte faktore vrijednosnica i jedinstvene prihode, jednako kao i standardnu devijaciju faktora i njihove korelacije. U takvom su pristupu točne vrijednosti faktora veoma bitne, ali u samoj praksi to može biti veoma teško.

Cijene vrijednosnica odražavaju investitorove procjene sadašnjih vrijednosti budućih izgleda korporacije. Cijena dionice PLIVE ovisit će u bilo kojem vremenu o projektiranoj stopi rasta BDP, o projektiranoj stopi inflacije i o drugim faktorima.

Ako se investitorove projekcije o tim osnovnim ekonomskim stanjima promijene, promijenit će se i cijena dionice PLIVE, a to zbog toga što na prihod od dionice znatno utječe promjena njezine cijene, jer se očekuje da će prihodi od dionica biti znatno više povezani s promjenama očekivanih budućih vrijednosti osnovnih ekonomskih varijabli, nego što će biti povezani s aktualnim promjenama koje se pojavljuju povremeno.

Na primjer, može se dogoditi da velik porast inflacije koji je bio očekivan neće imati utjecaja na cijenu dionice kompanije, koje je zarada veoma osjetljiva na inflaciju, ali ako je suglasno očekivanje bilo za nisku stopu inflacije, tada bi naredno veliko povećanje imalo veći utjecaj na cijenu dionice te korporacije.

Zbog tog je razloga poželjno, kada je to moguće, izabrati faktore koji mjere promjene u očekivanjima radije nego u realizacijama, iako kasniji uključuju promjene koje su očekivane i one koje nisu. Jedan od načina za postizanje toga cilja jest osloniti se na varijable koje uključuju promjene tržišnih cijena. Odatle, razlika između prihoda dva portfolia - od kojih se jedan sastoji od dionica za koje

se smatra da na njih ne utječe inflacija i drugi koji se sastoji od dionica na koje inflacija utječe - može se koristiti kao faktor koji mjeri revizije u očekivanjima inflacije. Oni koji konstruiraju faktorske modele, koristeći se vremensko-serijskim pristupom, često se oslanjaju na tržišno zasnovane surrogate za promjene u predviđanjima osnovnih ekonomskih varijabli u toj problematici.

Presječni pristupi

Presječni pristupi manje su intuitivni od vremensko-serijskih pristupa, ali mogu biti isto tako koristan alat. Stvaratelj modela počinje s procjenama osjetljivosti vrijednosnica na određene faktore. Tada se, u određenom vremenskom razdoblju, procjenjuju vrijednosti faktora koje su zasnovane na prihodima od vrijednosnica i na njihovim osjetljivostima na faktore. Taj se proces ponavlja za više vremenskih razdoblja, osiguravajući procjenu standardnih devijacija faktora i njihovih korelacija.

Potrebno je znati da je presječni pristup potpuno drugačiji od vremensko-serijskog pristupa. U kasnijem su pristupu vrijednosti faktora poznate, a osjetljivosti su procijenjene. Dalje, analiza se vodi za jednu vrijednosnicu u više vremenskih razdoblja, onda za drugu itd. U prošlom su pristupu osjetljivosti poznate, a vrijednosti su faktora procijenjene. Odgovarajući tome, osjetljivosti se ponekad u presječnom pristupu smatraju atributima. Zatim, analiza se dalje vodi za jedno vremensko razdoblje za grupu vrijednosnica, potom za drugo vremensko razdoblje za istu grupu, potom za treće itd. Primjeri jednofaktorskog i dvofaktorskog modela bit će prikazani da bi se ilustrirao presječni pristup.

Slika 3. osigurava hipotetički primjer odnosa između prihoda za neki broj različitih dionica u danom vremenskom razdoblju i jedne atribut-vrijednosnice - dividendni prinos (zarada) - za svaku dionicu. Svaka točka predstavlja jednu određenu dionicu, pokazujući njezin prihod i prinos od dividendi za vremensko razdoblje koje se evaluira. U ovom slučaju, dionice s višim prinosima od dividendi teže boljem - tj. imaju veće prihode - od onih s nižim prinosom od dividendi. Dok se slika 3. (primjer presječnog pristupa) zasniva na više dionica u jednom vremenskom razdoblju, slika 1. (primjer vremensko-serijskog pristupa) zasniva se na jednoj dionici za veći broj vremenskih razdoblja.

Da bi se izmjerio odnos pokazan u slici 3., ravna je crta prilagođena dijagramu pri čemu je korištena statistička tehnika jednostavne regresijske analize. Jednadžba linije u slici 3. jest:

$$r_{it} = 4 + 0.5b_{it} \quad (18) \quad \text{ili općenitije} \quad r_{it} = a_t + b_{it}F_t \quad (19)$$

gdje:

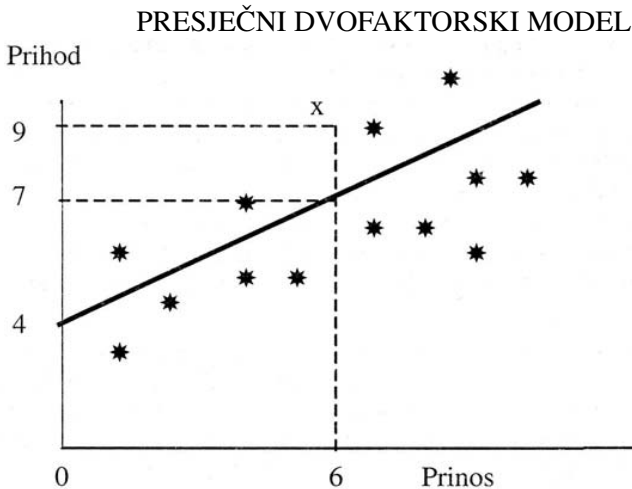
r_{it} = očekivani prihod dionice i u razdoblju t , dano je da faktor ima stvarnu vrijednost F_t

a_t = nulti faktor razdoblja t

b_{it} = prinos od dividendi dionice u razdoblju t

F_t = stvarna vrijednost faktora u razdoblju t

Slika 3.



Okomiti član a_i upućuje na očekivani prihod od tipične dionice s prinosom od dividendi 0, po čemu se on i naziva nulnim faktorom kao u jednadžbi (1). Na slici 3. on je jednak 4%. Nagib od 0.5 pokazuje porast očekivanog prihoda za svaki postotak prinosa od dividendi. Dakle, on predstavlja stvarnu vrijednost faktora prinosa od dividende (F_i) u istom vremenskom razdoblju.

Iz ovog se primjera može vidjeti da se presječni pristup koristi osjetljivošću da bi osigurao procjene vrijednosti faktora, pa se stoga i nazivaju empiričkim faktorima. Budući da se vremensko-serijski pristup koristi poznatim vrijednostima faktora, da bi osigurao procjene osjetljivosti vrijednosnica, proizlazi da su ti faktori poznati kao osnovni (fundamentalni) faktori.

Stvarni prihod od bilo koje dane vrijednosnice može ležati iznad ili ispod linije zahvaljujući svom nefaktorskom prihodu. Potpuni opis odnosa za taj jedno-faktorski model jest:

$$r_{it} = 4 + 0.5b_{it} + e_{it} \quad (20)$$

gdje e_{it} predstavlja nefaktor prihoda u tijeku perioda t za vrijednosnicu i . Ako se iz Grafikona 3. za vrijednosnicu x iskazuje prihod od dividendi 6%, tada za nju očekivani prihod, u tijeku tog vremenskoga razdoblja, iznosi 7% [=4+(0.5*6)]. Zbog toga što je ona stvarno imala prihod 9%, njezin je nefaktor prihoda bio +2%=9%-7%. U razdobljima kao što su oni prikazani na slici 3. dionice s velikim prinosima težile su da nadmaše dionice s niskim prinosima. To pokazuje da je faktor prinosa F_i pozitivan u to vrijeme. Isto je tako moguće da će u nekom drugom vremenskom razdoblju dionice s niskim prinosima težiti da nadmaše dionice s visokim prinosima. Regresijska linija u odgovarajućem dijagramu biti će nagnuta prema dolje i faktor prinosa bit će negativan. U drugim vremenskim razdobljima neće biti odnosa između prinosa i prihoda, što će rezultirati ravnom regresijskom linijom i faktor prinosa biti će 0.

U nekim vremenskim razdobljima male dionice teže tome da nadmaše velike dionice, a u drugim je razdobljima to obrnuto. Stoga se mnogi presječni modeli koriste atributskom veličinom koja se često izračunava kao logaritam ukupne tržišne vrijednosti dioničke glavnice korporacije mjerene u milijunima, koja je izračunana tako da se cijena dionice korporacije pomnoži brojem dionica i da se taj rezultat podijeli s jednim milijunom. Tako bi 1-milijunska dionica dobila atributsku veličinu vrijednosti 0, 10-milijunska dionica atributsku veličinu 1, 100-milijunska dionica atributsku veličinu vrijednosti 2 itd. To se pravilo zasniva na empiričkom promatranju kako će utjecaj faktora veličine na vrijednosnicu s velikom ukupnom vrijednošću na tržištu biti dvostruko jači nego na onu vrijednosnicu s jednom desetinom te vrijednosti. Ili točnije, čini se da je utjecaj veličine linearan logaritmskim veličinama.

Da bi bio procijenjen faktor veličine u danom mjesecu, može se iskoristiti postupak koji se koristi u slici 3. za procjenjivanje faktora prinosa. Atributi veličine vrijednosnica mogu se prikazati na vodoravnoj osi, a njihovi prihodi u danom vremenskom razdoblju mogu se prikazati na okomitoj osi (kao u slici 3). Nagib dobijene regresijske linije osigurava procjenu faktora veličine za promatrano vremensko razdoblje.

Taj postupak ima neke nedostatke. Velike dionice teže tome da imaju velike prinose. Odatle se za razlike u prihodima između velikih i malih dionica može do određene razine zahvaliti razlikama u prinosisima, ne u veličini. Procijenjeni faktor veličine može dijelom biti odraz pravog faktora prinosa. Problem je simetričan u tome što procijenjeni faktor prinosa može isto tako biti dijelom odraz pravog faktora veličine.

Da bi se olakšao taj problem, prihodi se mogu istovremeno usporediti i s atributima veličine i atributima prinosa, koristeći se pritom statističkom tehnikom višestruke regresije. Slika 4. osigurava ilustraciju. Svaka je vrijednosnica predstavljena jednom točkom u trodimenzionalnom grafikonu, gdje je prihod tijekom nekog vremenskog razdoblja prikazan na okomitoj osi, prihod od dividendi prikazan je na jednoj od donjih osi, a veličina za to razdoblje na drugoj osi.

Višestruka regresijska analiza tipično se koristi da bi se podaci prilagodili ravnini. Primjer prikazan u slici 4. rezultira regresijskom jednadžbom:

$$r_{it} = 7 + 0.4b_{1t} - 0.3b_{2t} + e_{it} \quad (21)$$

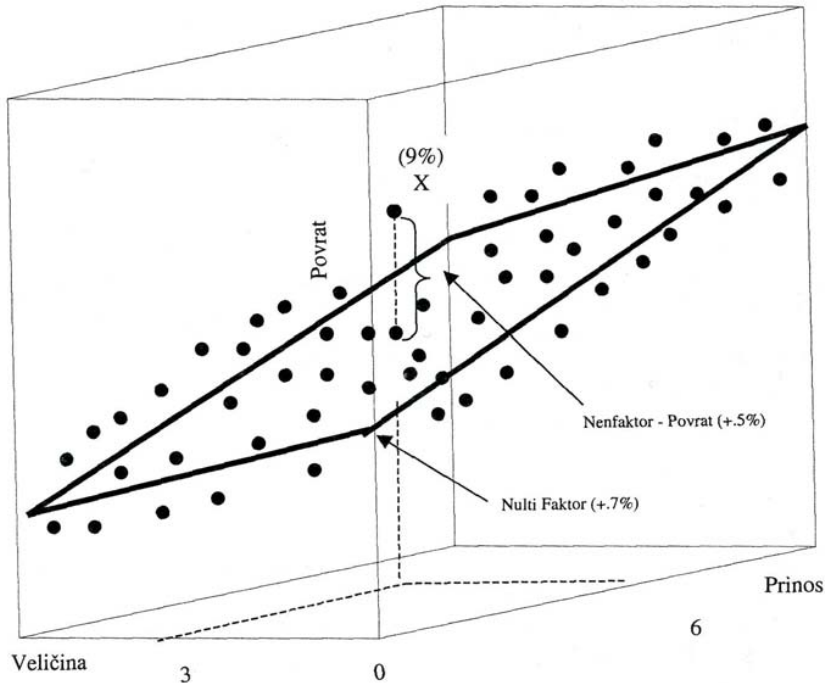
u kojoj b_{1t} i b_{2t} , naravno, označuju prihod od dividendi i veličinu dionice i u vremenskom razdoblju t . Općenito, regresijska jednadžba za dvofaktorski model, može se iskazati kao:

$$r_{it} = a_t + b_{1t}F_{1t} - b_{2t}F_{2t} + e_{it} \quad (22)$$

gdje a_t označuje nulti faktor u razdoblju t , a dva su faktora označeni sa F_{1t} i F_{2t} .

Slika 4.

PRESJEČNI DVOFAKTORSKI MODEL



Jednadžba ravnine prikazane u slici 4. jest:

$$r_{it} = 7 + 0.4b_{i1t} - 0.3b_{i2t} \quad (23) \quad \text{ili općenitije} \quad r_{it} = a_t + b_{i1t}F_{1t} - b_{i2t}F_{2t} \quad (24)$$

To znači da je multi faktor a_t 7%, što pokazuje da će dionica s prinosom od dividendi 0 i veličinom 0 (to znači vrijednost na tržištu je 1 milijun novčanih jedinica) imati očekivani prihod od 7%. Valja znati da su procijenjene vrijednosti faktora prinosa od dividendi (F_{1t}) i faktora veličine (F_{2t}) 0.4 i -0.3. Iz toga slijedi da su u tijeku toga razdoblja viši prinosi od dividendi i manje veličine zajedno bili povezani s većim prihodima.

Koristeći se jednadžbama (21) i (23), dana vrijednosnica x s prinosom od dividendi 6% i veličinom 3 imat će očekivani prihod od 8.5% [=7+(0.4*6)-(0.3*3)]. Sa stvarnim prihodom od 9% njezin je nefaktor rizika e_{it} iz toga +5% (=9%-8.5%) u tijeku tog vremenskoga razdoblja, kao što je prikazano na Grafikonu 4.

Obuhvaćanje veličine i prinosa od dividendi i korištenje višestruke regresijske analize može pomoći razvrstavanju utjecaja razlika u prinosima i veličinama na razlike u prihodima od vrijednosnica. Ne može se adekvatno nositi s utjecajima koji uopće nisu predstavljeni, niti se može garantirati da uključeni atributi jednostavno ne služe kao zamjene za druge, osnovnije faktore. Statistički testovi

moгу upućivati na mogućnost da varijable uključene u analizu predviđaju prošle prihode od vrijednosnica. Prosudba i sreća potrebne su da bi se identificirale varijable koje mogu pomoći u predviđanju budućih prihoda od vrijednosnica, rizika i kovarijanci. Za proširenje na više od dvije varijable potrebno je učiniti postupak koji je opisan u jednadžbama (21-24).

Faktorsko-analitički pristupi

U faktorsko-analitičkim pristupima stvaralac modela ne zna ni vrijednosti faktora, niti osjetljivost vrijednosnica na te faktore. Statistička tehnika koja se naziva analizom faktora koristi se za izvođenje broja faktora i osjetljivosti vrijednosnica jednostavno zasnovanih na skupu prošlih prihoda od vrijednosnica. Analiza faktora uzima prihode iz više vremenskih razdoblja na uzorku vrijednosnica i onda pokušava prepoznati jedan ili više statistički važnih faktora koji bi mogli stvoriti kovarijance prihoda promatranih u tome uzorku. Podaci o prihodima, u biti, govore onome tko stvara model o strukturi faktorskog modela. Nažalost, analiza faktora ne određuje koje ekonomske varijable faktori predstavljaju.

Ograničenja

Ne postoje razlozi zbog kojih se ne bi moglo pretpostaviti da će dobar faktorski model za jedno vremensko razdoblje biti dobar i za naredno razdoblje. Rizici i prihodi povezani s različitim faktorima i osjetljivostima vrijednosnica na faktore, mogu se mijenjati u tijeku vremena.

Bilo bi prikladno kad se nijedan od relevantnih faktora, a ni njihove magnitude, ne bi mijenjali kroz vrijeme. U tim okolnostima, mehanički bi se postupci mogli primijeniti na prihode od vrijednosnica i to na prošireno prošlo razdoblje, pa bi faktorski model uključivao i sve potrebne magnitude. Statistička metoda procjene morala bi se ublažiti, u smislu prosudbe stvaratelja modela da je smatra dinamičkom u okolini ulaganja.

Zaključak

Proces ostvarivanja prihoda koji povezuje prihode od vrijednosnica s kretanjima jednog ili više zajedničkih faktora moguće je iskazati faktorskim modelom.

Bilo koji aspekt prihoda od vrijednosnica, koji nije objašnjen faktorskim modelom smatra se jedinstvenim za vrijednosnicu, a kao takav je nepovezan s jedinstvenim elementom prihoda od drugih vrijednosnica.

Pretpostavka da prihodi od vrijednosnica odgovaraju zajedničkim faktorima uveliko pojednostavnjuje postupak izračunavanja zakrivljenog skupa efikasnosti financijskog ulaganja.

Osjetljivost portfolia na faktor predstavlja izmjereni prosjek osjetljivosti sadržanih vrijednosnica, gdje proporcije vrijednosnica u portfoliju služe kao mjere.

Procjenjivanje faktorskih modela moguće je iskazati trima osnovnim pristupima: vremensko-serijskim, presječnim i faktorsko-analitičnim pristupom.

LITERATURA:

1. *Callagher T.J. and Andrew, J.D. Jr.:* "Financial Management - Principles and Practice", Prentice Hall, Ind., New Jersey, 1997.
2. *Francis, J.C.:* "Investments-Analysis and Management", Fifth Edition, McGraw-Hill, New York, 1991.
3. *Hanke, J.E. and Reirsch, A.G.:* "Understanding Business Statistics", Irwin, Homewood, Il., Boston, 1991.
4. *Ivanović, Z.:* "The Valuation of Riskless Securities", Ekonomické Rozhl'dy, No. 1, Bratislava, 2000.
5. *Veselica, V.:* "Financijski sustav u ekonomiji", Inženjerski biro, Zagreb, 1995.

FACTOR MODELS IN THE FUNCTION OF SECURITIES INCOME ESTIMATE

Summary

In the case of infinite number of investment possibilities, the modern portfolio theory by means of factor models of estimate, enables to investor or valuer of possibility, the optimal income estimate of particular security. By such approach investor can carry out distorted set of efficiency of financial investment, and with a certain degree of risk identify tangential portfolio, which offers him optimal possibility of marketing or borrowing of financial resources. Presumption that securities incomes correspond to common factors, simplifies procedure of calculation of distorted set of efficiency of financial investment.