

Professionelle Arbeit

Angenommen am 10.12.2008.

MARCO HAMANN

# Zum axonometrischen Umriss einer Kugel

## On Axonometric Projection of the Contour of a Sphere

### ABSTRACT

The present article refers to a question that arose during the lecture of descriptive geometry for undergraduate students in the fields of geodesy and cartography: If the axonometric projection of the contour of a sphere is constructed with the help of the cutting method (L. ECKHART, 1937), the pairs of contour points with regard to the cutting directions of two non-associated auxiliary projections determine two in general non conjugate diameters and their conjugate directions of the ellipse of contour. Conversely an ellipse is in general overdetermined by two given diameters and their conjugate directions. The theorem of PASCAL can be deduced from the figure of construction whereby the construction of the ellipse of contour is considered from a planar point of view.

**Key words:** Axonometric projection of a sphere, ellipse of contour, theorem of PASCAL, conic

**MSC 2000:** 51N05, 51A05

## O konturi kugle u aksonometriji

### SAŽETAK

Ovaj se članak bavi pitanjem koje se javlja u nastavi nacrtne geometrije za studente preddiplomskog studija u području geodezije i kartografije: Ako se aksonometrijska slika konture kugle konstruira pomoću metode presjeka (L. ECKHART, 1937), tada parovi konturnih točaka, promatrani s obzirom na smjerove presjeka dviju nepridruženih pomoćnih projekcija, određuju općenito dva nekonjugirana promjera konturne elipse i njima konjugirane smjerove. Obratno, elipsa je općenito određena s dva zadana promjera i njima konjugiranim smjerovima. Promatra li se konstrukcija konturne elipse s ravninskog aspekta, iz ovog se načina konstrukcije može izvesti PASCALOV teorem.

**Gljučne riječi:** aksonometrija kugle, konturna elipsa, PASCALOV teorem, konika

## 1 Einleitung

Die Konstruktion des axonometrischen Umriss einer Kugel gehört zu den klassischen Aufgaben in Darstellender Geometrie in der Ausbildung von Studentinnen und Studenten der Architektur sowie in einigen ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen. Sie wird üblicherweise mit Hilfe des nach L. ECKHART (1937) benannten Einschnideverfahrens durchgeführt: Der (scheinbare) Umriss  $k^\alpha$  einer Kugel  $\Phi$  ist dabei axonometrisches Bild jenes Großkreises  $k \subset \Phi$ , dessen Trägerebene orthogonal zur Projektionsrichtung  $s$  liegt. Er ist ein Kreis respektive eine Ellipse, je nachdem, ob  $s$  orthogonal zur Bildebene  $\pi$  steht oder nicht. Wird o. B. d. A. der Mittelpunkt  $M$  von  $\Phi$  als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems  $(O; E_x, E_y, E_z)$  gewählt, so schneidet  $k$  die in den Koordinatenebenen liegenden Großkreise  $k_i := \pi_i \cap \Phi$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in den Gegenpunkten  $K_i, \bar{K}_i$ . Sind beispielsweise Grund- und Aufrissfigur von  $\Phi$  als Einschnidehilfsrisse gegeben, so lassen sich die Paare  $(K_1^\alpha, \bar{K}_1^\alpha)$  bzw.  $(K_2^\alpha, \bar{K}_2^\alpha)$  von Konturpunkten unter Verwendung perspektiver Affinitäten zwischen dem Einschnidegrundriss bzw. -aufriss und dem axonometrischen Grundriss bzw. -Aufriss konstruieren. Die Tangenten an  $k^\alpha$  in

$K_1^\alpha, \bar{K}_1^\alpha$  respektive  $K_2^\alpha, \bar{K}_2^\alpha$  sind durch die Einschniderichtungen  $s'$  bzw.  $s''$  bestimmt, vgl. etwa [1].

Von  $k^\alpha$  sind hierdurch zwei Durchmesser  $[K_1^\alpha, \bar{K}_1^\alpha]$  und  $[K_2^\alpha, \bar{K}_2^\alpha]$  mit den Paaren  $s'$ - bzw.  $s''$ -paralleler Tangenten in den Durchmesserendpunkten und damit ein Tangentenparallelogramm gegeben. Die beiden Durchmesser von  $k^\alpha$  sind dabei im Allgemeinen nicht konjugiert. Die Umrissellipse  $k^\alpha$  wird in [1] mithilfe einer geeignet gewählten perspektiven Affinität  $\phi$  aus einem Kreis  $k^k = \phi^{-1}(k^\alpha)$  konstruiert, deren Achse  $a$  mit einer Seite des Tangentenparallelogramms zusammenfällt (Abb. 1), vgl. [1]: Es sei o. B. d. A.  $a = t_1^\alpha$  mit  $t_1^\alpha := K_1^\alpha \parallel s'$  gewählt. Damit besitzen  $k^k$  und  $k^\alpha$  das gemeinsame Linienelement  $(K_1^\alpha, t_1^\alpha) = (K_1^k, t_1^k)$ . Zur Bestimmung des Mittelpunktes  $O^k$  von  $k^k$  und damit eines Angabepaares  $(O^k, O^\alpha)$  von  $\phi$  ist zu beachten, dass die Diagonalen eines Tangentenparallelogramms einer Ellipse Richtungen konjugierter Durchmesser sind. Der Mittelpunkt  $O^k$  ergibt sich danach in zweideutiger Weise aus dem Schnitt der Geraden  $n := K_1^k \perp t_1^k$  mit dem Thaleskreis  $k_0$  über der zu  $t_1^\alpha$  gehörenden Seite des Tangentenparallelogramms.

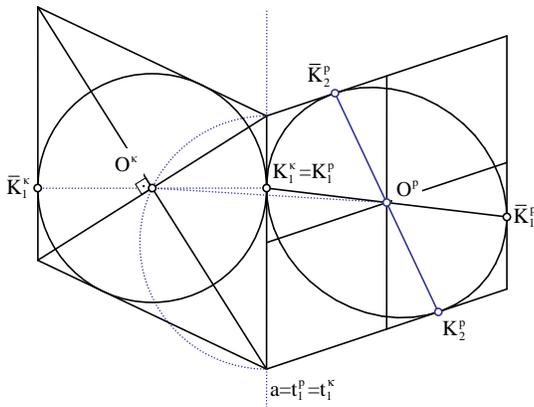


Abbildung 1: Perspektiv Affinität

Bemerkt werden soll, dass das zweite Paar von Kontaktpunkten  $(K_2^\alpha, \bar{K}_2^\alpha)$  für die Festlegung von  $\phi(a, (O^k, O^\alpha))$  mit  $\phi(k^k) = k^\alpha$  nicht benötigt wird. Lediglich die Tangenten in  $K_2^\alpha, \bar{K}_2^\alpha$  als Seiten des Tangentenparallelogramms gehen in die Konstruktion ein, vgl. [1]. Hieraus ist erkennbar, dass die Ellipse  $k^\alpha$  durch Angabe der tangentialen Linienelemente  $(K_j^\alpha, t_j^\alpha), (\bar{K}_j^\alpha, \bar{t}_j^\alpha)$  ( $j = 1, 2$ ) in den Endpunkten zweier Durchmesser grundsätzlich überbestimmt ist. Umgekehrt können die Punkte  $K_2^\alpha, \bar{K}_2^\alpha$  auf  $t_2^\alpha, \bar{t}_2^\alpha$  bei vorgegebener Figur  $(K_1^\alpha, \bar{K}_1^\alpha, t_j^\alpha, \bar{t}_j^\alpha)$  nicht beliebig gewählt werden.

Wird nun obige Konstruktion der Umrissellipse  $k^\alpha$  als planare Aufgabe aufgefasst, so scheint die Ableitung jener Bedingung aufschlussreich, wonach die überzähligen Punkte  $K_2^\alpha, \bar{K}_2^\alpha$  auf  $k^\alpha$  liegen. In Folge dieser ergibt sich die Frage, in welchen Fällen durch Angabe zweier verschiedener Durchmesser  $[L_1, \bar{L}_1]$  und  $[L_2, \bar{L}_2]$  mit den zugehörigen Paaren paralleler Tangenten in den Durchmesserendpunkten eine Ellipse, allgemein ein Kegelschnitt, bestimmt ist. Der Fall eines Paares konjugierter Durchmesser, durch den bekanntlich eine Ellipse festgelegt ist, ist hierin einzubetten.

Es ist zu vermuten, dass speziell die zweite Frage bereits Gegenstand ausführlicher Untersuchungen war. Ihre Beantwortung erfolgt an dieser Stelle vielmehr aus didaktischen Überlegungen im Zusammenhang mit der ersten.

## 2 Der Satz von PASCAL

Bekanntlich ist ein projektiver Kegelschnitt  $c$  durch fünf Punkte  $P_l$  ( $l = 1, \dots, 5$ ) der Ebene festgelegt. Sind nicht drei Punkte  $P_{l_1}, P_{l_2}, P_{l_3}$  ( $l_1, l_2, l_3 \in \{1, \dots, 5\}, l_1 \neq l_2 \neq l_3 \neq l_1$ ) kollinear, so ist der Kegelschnitt nicht entartet. Nach dem Satz von PASCAL liegt ein weiterer Punkt  $P$  genau dann auf  $c$ , wenn die Schnittpunkte  $R := P_1P_2 \cap P_4P_5$ ,  $S := P_2P_3 \cap P_5P$  und  $T := P_3P_4 \cap PP_1$  von Gegenseiten des Sechsecks  $P_1 \dots P_5P$  kollinear liegen (Abb. 2).

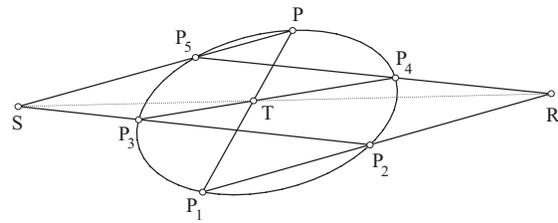


Abbildung 2: Satz von PASCAL

Wird diese Aussage ins Duale übertragen, so gehört eine weitere Gerade  $p$  einem durch fünf Geraden  $p_l$  ( $l = 1, \dots, 5$ ) bestimmten Klassenkegelschnitt  $c^*$  genau dann an, wenn die Verbindungsgeraden  $r := p_1p_2 \vee p_4p_5$ ,  $s := p_2p_3 \vee p_5p$  und  $t := p_3p_4 \vee pp_1$  von Gegenseiten des Sechsecks  $p_1 \dots p_5p$  kopunktal liegen. Werden schließlich in der Angabe  $(K_1^\alpha, \bar{K}_1^\alpha, t_j^\alpha, \bar{t}_j^\alpha)$  die Linienelemente  $(K_1^\alpha, t_1^\alpha), (\bar{K}_1^\alpha, \bar{t}_1^\alpha)$  sowie  $t_2^\alpha$  als infinitesimal benachbarte Tangenten an  $k^\alpha$  gedeutet, so lassen sich die Berührungspunkte auf  $t_2^\alpha$  und  $\bar{t}_2^\alpha$  nachträglich konstruieren. Für  $K_2^\alpha \in t_2^\alpha$  ergibt sich beispielsweise

$$r = t_1^\alpha t_2^\alpha \vee \bar{K}_1^\alpha, t = t_2^\alpha \bar{t}_1^\alpha \vee K_1^\alpha, s = rt \parallel t_1^\alpha, K_2^\alpha = st_2^\alpha.$$

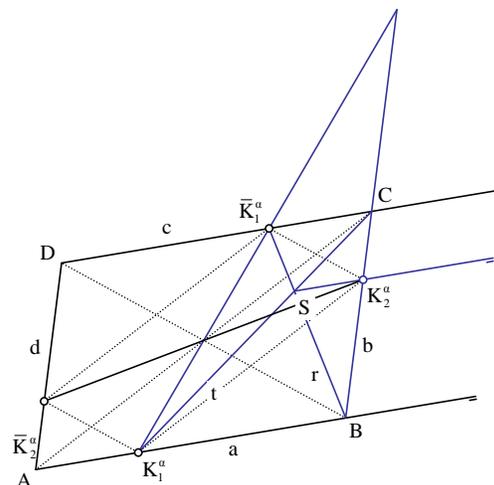


Abbildung 3: Konstruktion des Berührungspunktes

Die Konstruktion von  $K_2^\alpha \in t_2^\alpha$  ist in Abb. 3 visualisiert. Sie veranschaulicht ferner den Satz von PASCAL, welcher der Konstruktion zugrunde liegt. Entsprechendes gilt für die Konstruktion des Punktes  $\bar{K}_2^\alpha$ . Er lässt sich außerdem über die Punktsymmetrie zu  $\bar{K}_2^\alpha$  bezüglich  $O^\alpha$  bestimmen.

Wegen  $t_j^\alpha \parallel \bar{t}_j^\alpha$  ergeben sich in der Figur von Abb. 3 Strahlensatzfiguren mit den Scheiteln  $S := rt$  und  $B := t_1^\alpha t_2^\alpha$ . Über diese kann ein Vergleich von Teilverhältnissen vorgenommen werden, die den Tripeln von Punkten zugeordnet sind, welche auf den Seiten des Tangentenparallelogramms liegen. Für deren Angabe werden die Ecken bzw. Seitenlängen des Parallelogramms entsprechend Abb. 3

mit  $A, B, C$  und  $D$  bzw.  $a, b, c$  und  $d$  bezeichnet. Für die übrigen Abschnitte werden die Schreibweisen  $\overline{BK_2^\alpha} = b_1$ ,  $\overline{K_2^\alpha C} = b_2$ ,  $\overline{CK_1^\alpha} = c_1$ ,  $\overline{K_1^\alpha D} = c_2$ , dergleichen  $a_1, a_2, d_1, d_2$  vereinbart. Es ergeben sich die nachstehenden Verhältnisgleichheiten.

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\overline{SK_1^\alpha}}{\overline{SC}} = \frac{b_1}{b_2}, \quad \frac{c_2}{c} = \frac{b_1}{b}.$$

Fernerhin gelten die augenscheinlichen Gleichheiten  $a_2/a = c_2/c$  und  $b_1/b = d_1/d$ . Werden schließlich die Quotienten  $a_2/a, b_1/b, c_2/c$  und  $d_1/d$  als Teilverhältnisse aufgefasst, so gelten folgende Gleichheiten:

$$\begin{aligned} TV(K_1^\alpha; B, A) &= TV(\bar{K}_1^\alpha; D, C) \\ &= TV(K_2^\alpha; B, C) \\ &= TV(\bar{K}_2^\alpha; D, A). \end{aligned} \tag{1}$$

Die Gleichung  $TV(K_2^\alpha; B, C) = TV(K_1^\alpha; B, A)$  beschreibt eine notwendige und hinreichende Bedingung, wonach die Punkte  $K_2^\alpha, \bar{K}_2^\alpha$  auf der durch  $(K_1^\alpha, \bar{K}_1^\alpha, t_j^\alpha, \bar{t}_j^\alpha)$  festgelegten Ellipse  $k^\alpha$  liegen. Diese impliziert insbesondere, dass die Parallelitäten  $K_1^\alpha K_2^\alpha \parallel \bar{K}_1^\alpha \bar{K}_2^\alpha \parallel AC$  sowie  $K_1^\alpha \bar{K}_2^\alpha \parallel \bar{K}_1^\alpha K_2^\alpha \parallel BD$  gelten, die Verbindungsgeraden der Konturpunkte demnach parallel zu den Diagonalen des Tangentenparallelogramms, d. h. einem Paar konjugierter Richtungen, liegen. Die erhaltene Bedingung ist räumlich sofort einsichtig, da jenes zu den Durchmessern  $[K_1^\alpha, \bar{K}_1^\alpha]$  und  $[K_2^\alpha, \bar{K}_2^\alpha]$  von  $k^\alpha$  gehörende Tangentenparallelogramm  $ABCD$  axonometrisches Bild eines  $k$  umschließenden Rhombus ist, bezüglich dessen obige Teilverhältnisgleichheiten und damit die Orthogonalitäten  $K_1 K_2 \perp BD, \bar{K}_1 \bar{K}_2 \perp BD$ , des weiteren  $K_1 \bar{K}_2 \perp AC$  und  $\bar{K}_1 K_2 \perp AC$ , der Verbindungsgeraden entsprechender Berührungspunkte gelten. Die axonometrische Abbildung erhält Parallelitäten und Teilverhältnisse, so dass sich die Eigenschaften wie angegeben übertragen lassen. Daneben lässt sich die erhaltene Bedingung in gleicher Weise mithilfe der in Abschnitt 1 beschriebenen perspektiven Affinität  $\phi(a, (O^K, O^\alpha))$  zwischen  $k^\alpha$  und  $k^K$  bestätigen, da unter perspektiven Affinitäten Parallelitäten und Teilverhältnisse erhalten bleiben.

### 3 Die Konstruktion der Umrissellipse als planimetrische Aufgabe

Wird die Konstruktion der Ellipse  $k^\alpha$  unter Verwendung der Einschneidehilfsrisse, unabhängig ihrer räumlichen Deutbarkeit, als ebene Aufgabe aufgefasst, so ist die Frage zu beantworten, wodurch sich die in (1) genannten Teilverhältnisgleichheiten ergeben. Die Beantwortung scheint

insbesondere aufschlussreich, da die Lagen und Maßstäbe der Einschneidehilfsrisse in zwei Koordinatenebenen, bis auf den Fall paralleler Einschneiderichtungen, frei gewählt werden können.

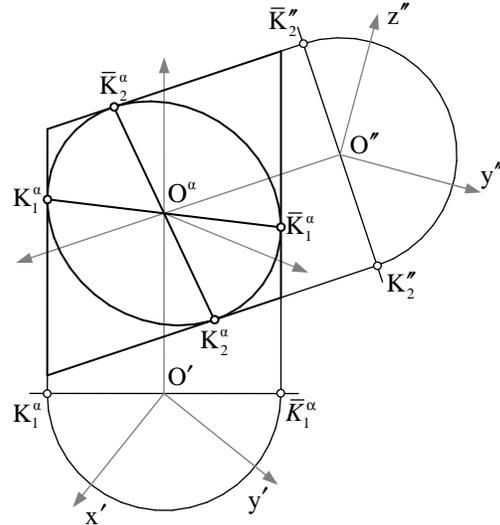


Abbildung 4: Konturpunkte

Dem Nachweis wird eine Konstruktionsfigur entsprechend Abb. 4 zugrunde gelegt, in welcher Grund- und Aufrissfigur von  $\Phi$  als Einschneidehilfsrisse sowie die Einschneiderichtungen  $s', s''$  bezüglich des Grund- respektive Aufriss gewählt werden. Die Paare von Konturpunkten  $(K_j, \bar{K}_j)$  bezüglich  $s', s''$  sind im jeweiligen Einschneidehilfsriss durch den Schnitt  $\{K_1', \bar{K}_1'\} = k_1 \cap (O' \perp s')$  bzw. durch  $\{K_2'', \bar{K}_2''\} = k_2 \cap (O'' \perp s'')$  festgelegt. Ihre axonometrischen Bilder  $(K_j^\alpha, \bar{K}_j^\alpha)$  lassen sich unter Verwendung der perspektiven Affinitäten  $\phi_1 : \pi_1'' \rightarrow \pi_1^\alpha$  und  $\phi_2 : \pi_2'' \rightarrow \pi_2^\alpha$  zwischen den Einschneidehilfsrisen und dem axonometrischen Grund- bzw. Aufriss konstruieren. Die Tangenten an  $k^\alpha$  in  $K_1^\alpha, \bar{K}_1^\alpha$  respektive  $K_2^\alpha, \bar{K}_2^\alpha$  sind durch die Einschneiderichtungen  $s'$  bzw.  $s''$  gegeben.

Um die Bedingung der Teilverhältnisgleichheit auf den Seiten des hierdurch festgelegten Tangentenparallelogramms zu überprüfen, scheint es sinnvoll, die  $(K_1', \bar{K}_1')$ ,  $(K_2'', \bar{K}_2'')$  bezüglich  $(K_j^\alpha, \bar{K}_j^\alpha)$  ergänzenden Hilfsrisse  $(K_1'', \bar{K}_1'')$ ,  $(K_2', \bar{K}_2')$  zu konstruieren. Hierfür kann benutzt werden, dass

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1|_{y'} : y' \rightarrow y'', \quad \phi_1^{-1} \circ \phi_2|_{y''} : y'' \rightarrow y'$$

teilverhältnistreu operieren.

Die Konturpunkte lassen sich durch Übertragen ihrer  $y$ -Koordinaten im jeweils anderen Riss bestimmen. Sind  $y'$ - und  $y''$ -Achse nicht parallel gewählt, so erlaubt die in Abb. 5 dargestellte Vorschrift die zeichnende Bestimmung

der Risse  $(K_1'', \bar{K}_1'')$  und  $(K_2', \bar{K}_2')$ . Sie folgt aus der Tatsache, dass die Schnittpunkte der jeweils  $x'$ -parallelen Geraden durch den Grundriss  $P'$  mit der  $z''$ -parallelen Geraden durch deren Aufriss  $P''$  für beliebige Punkte  $P$  kollinear liegen, vgl. [1].

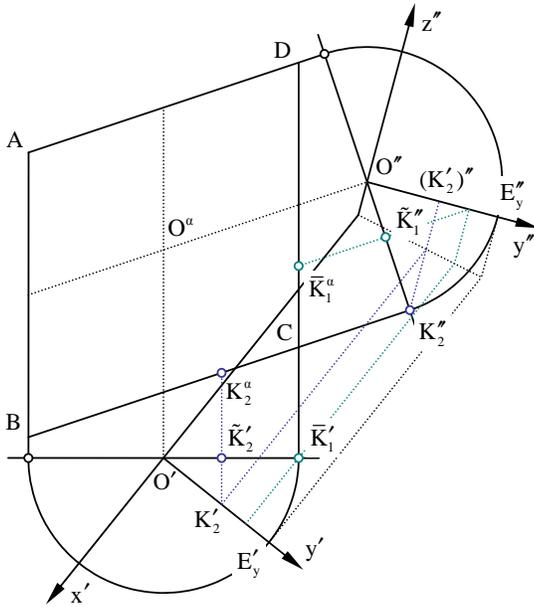


Abbildung 5: Übertragen von Teilverhältnissen

Hiernach folgen sodann die Gleichheiten der Teilverhältnisse  $TV((\bar{K}_1'')'; E_y', O')$  und  $TV(\bar{K}_1''; E_y'', O'')$  sowie  $TV((K_2')''; E_y'', O'')$  und  $TV(K_2'; E_y', O')$ , die jeweils dem Kosinus des Winkelmaß entsprechen, der zwischen der orientierten Geraden  $K_1' \bar{K}_1'$  bzw.  $K_2'' \bar{K}_2''$  und der positiven Richtung der  $y'$ -Achse bzw.  $y''$ -Achse eingeschlossen wird.

$$TV((\bar{K}_1'')'; E_y', O') = TV(\bar{K}_1''; E_y'', O'') = \cos \gamma$$

$$TV((K_2')''; E_y'', O'') = TV(K_2'; E_y', O') = \cos \varepsilon.$$

Werden nun  $\bar{K}_1''$  und  $K_2'$  in Richtung der Einschneiderichtungen  $s''$  bzw.  $s'$  projiziert, so ergeben sich die Punkte  $\bar{K}_1'' := (\bar{K}_1'' \| s'') \cap K_2'' \bar{K}_2''$  beziehungsweise  $\bar{K}_2' := (K_2' \| s') \cap K_1' \bar{K}_1'$ . Für die Punkte  $\bar{K}_1''$  und  $\bar{K}_2'$  gelten dann offenbar  $TV(\bar{K}_1''; K_2'', O'') = TV(\bar{K}_2'; \bar{K}_1', O') = \cos \gamma \cos \varepsilon$ , woraus schließlich die gesuchte Gleichheit folgt:

$$TV(\bar{K}_1^\alpha; C, D) = TV(K_2^\alpha; C, B). \tag{2}$$

### 4 Weitere Folgerungen aus der Anwendung des Satzes von PASCAL

Im letzten Abschnitt wurde planimetrisch begründet, dass die Konstruktion der Konturpunkte bezüglich der Einschneiderichtungen in Grund- und Aufriss tatsächlich zwei Durchmesser sowie die dazu konjugierten Richtungen einer Ellipse angibt. Diese ist durch Bedingung (2) wohldefiniert. Die Bedingungen (1) bzw. (2) sind hierbei affingometrische Folgerungen aus der Anwendung des Satzes von PASCAL, der zur projektiven Geometrie zu zählen ist. Da diese nicht ausschließlich auf Ellipsen zu beziehen sind bzw. sich vergleichbar für Hyperbeln formulieren lassen, scheint die Frage berechtigt, wie (1) geeignet zu spezifizieren sind. Darüber hinaus stellt sich die Frage, wie sich hierin durch Anwendung des Satzes von PASCAL auch der Fall einer Parabel einbetten lässt.

Bekanntlich lassen sich Ellipse, Parabel und Hyperbel in ihrer Lage bezüglich der uneigentlichen Geraden affingometrisch kennzeichnen. In den Abb. 6 und 7 sind die Fälle einer Hyperbel und Ellipse in einem projektiv abgeschlossenen affinen Raum (nach Anwendung einer Kollineation) schematisch dargestellt.

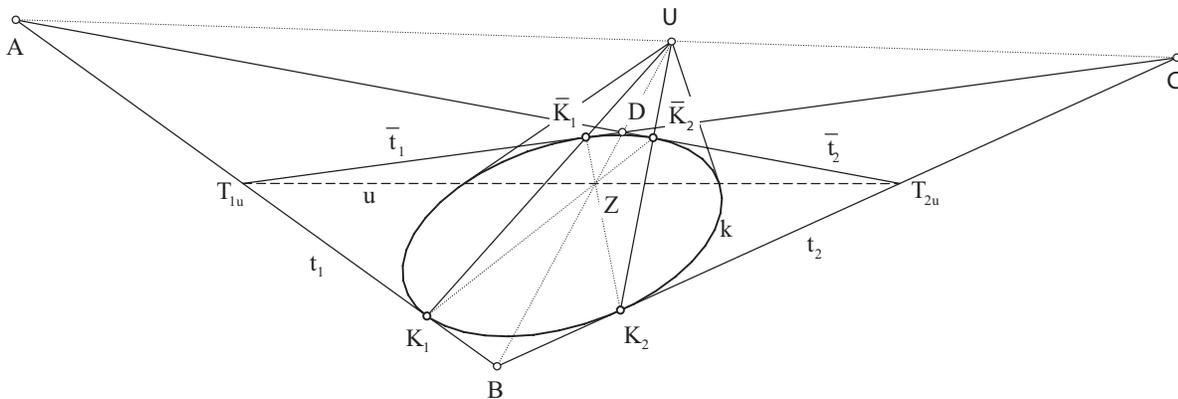


Abbildung 6: Hyperbel

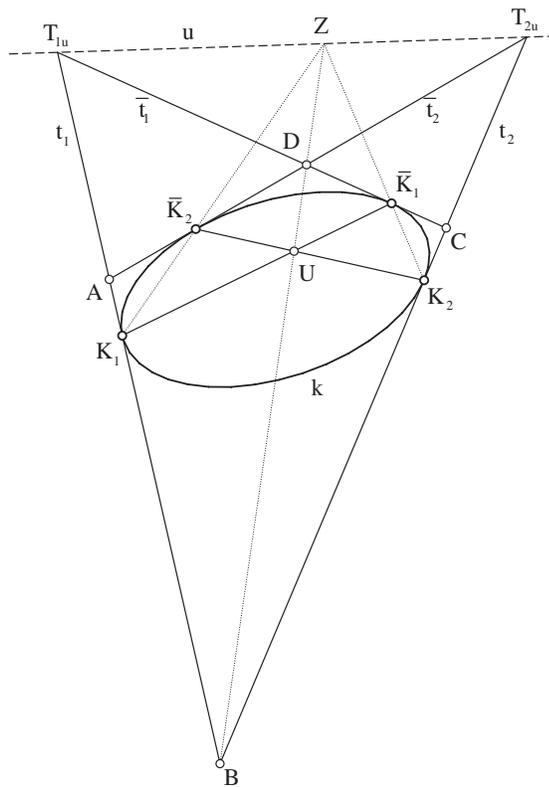


Abbildung 7: Ellipse

Die in Abschnitt 2 entwickelte Figur eines Tangentenparallelogramms lässt sich hierin kennzeichnen: Die von den uneigentlichen Punkten  $T_{ju}$  an den Kegelschnitt  $k$  gelegten Tangenten  $t_j, \bar{t}_j$  bilden ein Tangentenviereck. Die zu  $T_{ju}$  bezüglich  $k$  polaren Verbindungsgeraden  $K_j\bar{K}_j$  der Berührungspunkte inzidieren mit dem Pol  $U$  der uneigentlichen Geraden  $u$  bezüglich  $k$ , verlaufen demnach durch dessen Mittelpunkt und sind somit Durchmesser von  $k$ . Die von  $T_{ju}$  verschiedenen Schnittpunkte der Tangenten  $t_j, \bar{t}_j$  bilden das Viereck  $ABCD$ . Mit jeder der Seiten  $t_j, \bar{t}_j$  inzidieren damit genau zwei Eckpunkte von  $ABCD$  sowie jeweils genau einer der Punkte  $T_{ju}$ . Demnach sind auf den Geraden  $t_j, \bar{t}_j$  Punktequadrupel bestimmt.

Wegen der Polaritätsbeziehungen bezüglich  $k$  gelten ersichtlich  $U \in AC, BD$  sowie  $Z \in u$  mit  $Z := K_1\bar{K}_2 \cap \bar{K}_1K_2$ . Die Punktequadrupel auf  $t_j, \bar{t}_j$  lassen sich sodann vermöge der Geradenbüschel  $\mathcal{G}_U$  bzw.  $\mathcal{G}_Z$  perspektiv respektive projektiv aufeinander abbilden, wonach das Doppelverhältnis der Punktequadrupel erhalten bleibt. Da jeweils  $T_{ju} \mapsto T_{ju}$

bzw.  $T_{1u} \mapsto T_{2u}$  gelten, lassen sich aus

$$\begin{aligned} DV(K_1; B, A, T_{1u}) &= \pi_U DV(\bar{K}_1; D, C, T_{1u}) \\ &= \pi_Z DV(K_2; B, C, T_{2u}) \\ &= \pi_U DV(\bar{K}_2; D, A, T_{2u}) \end{aligned} \tag{3}$$

mit den Vereinbarungen  $DV(K_1; B, A, T_{1u}) =: TV(K_1; B, A)$  etc. die Teilverhältnisgleichheiten (1) erhalten. Im Unterschied zueinander trennen im Fall der Ellipse die Punktepaare  $(A, B)$  und  $(K_1, T_{1u})$  etc. einander, im Fall der Hyperbel jedoch nicht. Infolgedessen genügen die Werte der Doppelverhältnisse und mithin die entsprechenden Teilverhältnisse im Fall der Ellipse der Relation

$$0 < TV(K_1; B, A) < 1, \tag{4}$$

wogegen im Fall der Hyperbel

$$TV(K_1; B, A) > 1 \tag{5}$$

gilt. Des Weiteren ergibt sich für den Fall der konjugierten Lage der Durchmesser  $[K_1, \bar{K}_1]$  und  $[K_2, \bar{K}_2]$  einer Ellipse ein vollständiges Viereck, bezüglich dessen sich die in (3) genannten Punktequadrupel in harmonischer Lage befinden. Das Teilverhältnis  $TV(K_1; B, A)$  nimmt mit der getroffenen Vereinbarung den Wert  $1/2$  an, der sich als spezieller Teilverhältniswert in (4) ergibt.

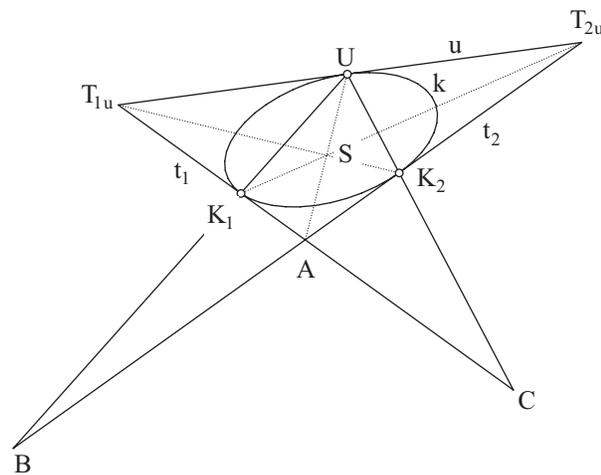


Abbildung 8: Parabel

Im Fall einer Parabel  $k$  ist die uneigentliche Gerade  $u$  Tangente der Kurve, weswegen der Pol  $U$  bezüglich  $k$  mit seiner Polaren  $u$  inzidiert. Es gilt also  $U \in u$ . Die Menge aller Geraden durch  $U$  bildet bekanntlich ein Parallelgeradenbüschel von Durchmessern, welches auch die Achse von  $k$  enthält. Es lässt sich entsprechend den vorangegangenen Fällen untersuchen, unter welcher Bedingung durch die Angabe zweier nichtparalleler Linienelemente  $(K_1, t_1)$

und  $(K_2, t_2)$  sowie einer Geradenrichtung  $d$  eine Parabel festgelegt ist, für welche  $(K_1, t_1)$  und  $(K_2, t_2)$  tangential liegen und  $d$  die Durchmesserriechung angibt.

Nach Anwendung des Satzes von PASCAL entsprechend Abb. 8 ergeben sich hierfür vollständige Vierecke, deren Ecken neben  $U$ ,  $K_1$ , bzw.  $K_2$  die Punkte  $A := t_1 t_2$ ,  $T_{2u}$  bzw.  $T_{1u}$  bilden. Die Nebenecken sind durch  $(S, T_{1u}, B)$  bzw.  $(S, T_{2u}, C)$  mit  $B := (K_1 \parallel d) \cap t_2$  und  $C := (K_2 \parallel d) \cap t_1$  gegeben. Da in einem vollständigen Viereck bekanntlich die Nebenecken von den Schnittpunkten ihrer Verbindungsgeraden mit den Seiten durch die dritte Nebenecke harmonisch getrennt werden, gilt dies unter Verwendung einer geeigneten Perspektivität auch für die zugeordneten Punktepaare auf  $t_j$ . Wird erneut vereinbart, dass  $DV(K_1; C, A, T_{1u}) = TV(K_1; C, A)$  und entsprechend  $DV(K_2; B, A, T_{2u}) = TV(K_2; B, A)$  gelten, so folgt einsichtig

$$TV(K_1; C, A) = TV(K_2; B, A) = 2. \quad (6)$$

## 5 Eine Konstruktion der Umrissellipse

Ziel dieses abschließenden Abschnittes ist es, eine punkt- und tangentialweise Konstruktion des axonometrischen Umriss  $k^\alpha$  einer Kugel  $\Phi$  vorzuschlagen, der durch die Konturpunkte  $K_1^\alpha$ ,  $\bar{K}_1^\alpha$  und  $K_2^\alpha$ ,  $\bar{K}_2^\alpha$  bezüglich der Einschneiderichtungen  $s'$  und  $s''$  gegeben ist. Alternativ kann eine Ellipse  $k$  nach Abschnitt 3 durch zwei Durchmesser  $[K_1, \bar{K}_1]$  und  $[K_2, \bar{K}_2]$  sowie die dazu konjugierten Richtungen gegeben sein, falls zusätzlich Bedingung (2) erfüllt ist.

Wird über dem Durchmesser eines Kreises ein beliebiges Aufsatzdreieck errichtet, so liegen die Höhenfußpunkte auf den vom Durchmesser verschiedenen Seiten nach Umkehrung des Satz von THALES auf dem Kreis. Übertragen auf Ellipsen als perspektiv affine Bilder von Kreisen lässt sich eine punktweise Konstruktion von  $k$  vorschlagen, vgl. [2] (Abb. 9): O.B.d.A ist eine Gerade  $q$  in zu  $[K_1, \bar{K}_1]$  konjugierter Richtung gewählt, die  $[K_1, \bar{K}_1]$  innen schneidet. Mit  $T := K_1 K_2 \cap q$  und  $H := \bar{K}_1 K_2 \cap q$  folgt entsprechend  $P := T \bar{K}_1 \cap K_1 H$  mit  $P \in k$ . Da die Strecke  $[H, T]$  von den

Tangenten an  $k$  in  $P$  und  $K_2$  in ihrem Mittelpunkt  $M_{12}$  geteilt wird, lässt sich auch die Tangente  $t_P$  an  $k$  in  $P$  konstruieren. Es gilt:  $t_P = M_{12}P$ . Die Ellipse  $k$  kann mithin auch als Ortskurve der Punkte  $P$  bzw. als Enveloppe der Tangentenschar erzeugt werden.

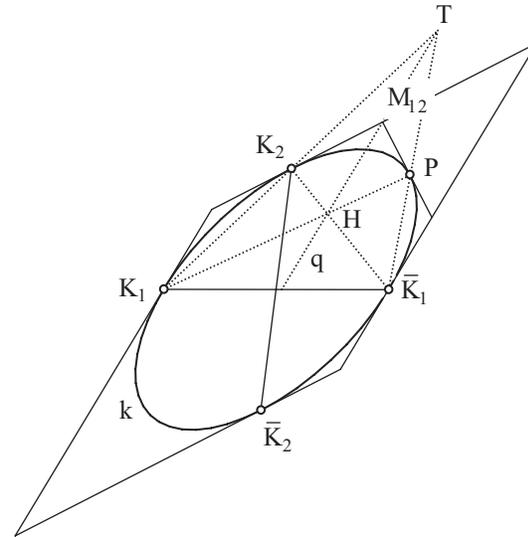


Abbildung 9: Ellipse als Ortskurve

## Literatur

- [1] BRAUNER, H.: *Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie*. Springer-Verlag Wien, Fachbuchverlag Leipzig, 1986.
- [2] JEGER, M.: *Konstruktive Abbildungsgeometrie*. Rüber Verlag, 1964.

**Marco Hamann**

Technical University of Dresden

e-mail: Marco.Hamann@tu-dresden.de