

Točna numerička formulacija zakrivljenog grednog elementa

Blaž Gotovac, Renata Sesartić, Vedrana Kozulić

Ključne riječi

zakrivljeni gredni element, formulacija, bazna funkcija, Hermiteovi polinomi, savijanje, posmik, uzdužna sila

Key words

curved girder element, formulation, base function, Hermite polynomials, bending, shear, longitudinal force

Mots clés

élément courbe de poutre, formulation, fonction de base, polynôme d'Hermite, flexion, cisaillement, force longitudinale

Ключевые слова

загнутый балочный элемент, цифровая формуляция, базовая функция, полиномы Эрмита, изгиб, продольная сила

Schlüsselworte

gekrümmtes Balkenelement, Formulierung, Basisfunktion, Hermite's Polynome, Biegung, Schub, Längskraft

B. Gotovac, R. Sesartić, V. Kozulić

Izvorni znanstveni rad

Točna numerička formulacija zakrivljenog grednog elementa

U radu je prikazana numerička formulacija zakrivljenog grednog elementa u ravnini zasnovana na baznim funkcijama koje uključuju zajednički utjecaj savijanja, smicanja i uzdužnih sila. Pokazana je, također, originalna preobrazba algebarsko-trigonometrijskih baznih funkcija u Hermiteove polinome kada zakrivljeni element poprima pravocrtni oblik. Kreirani numerički model testiran je na nekoliko elementarnih primjera, a također i na jednom kompleksnijem konstrukcijskom sklopu.

B. Gotovac, R. Sesartić, V. Kozulić

Original scientific paper

Exact formulation of a curved girder element

The numerical formulation of a girder element curved in plane, derived from base functions which include the joint influence of bending, shear and longitudinal forces, is presented in the paper. An original transformation of algebraic-trigonometric base functions into Hermite polynomials, when the curved element assumes a rectilinear form, is also presented. The numerical model has been tested on several elements, and also on a more complex structural assembly.

B. Gotovac, R. Sesartić, V. Kozulić

Ouvrage scientifique original

Formulation exacte d'un élément de poutre courbe

La formulation numérique d'un élément de poutre courbe dans le plan, dérivée des fonctions de base qui incluent l'influence conjuguée de la flexion, du cisaillement et des forces longitudinales, est présentée dans l'ouvrage. Une transformation originale des fonctions de base algébriques-trigonométriques en polynômes d'Hermite, quand l'élément courbe assume une forme rectiligne, est également présentée. Le modèle numérique a été analysé sur un nombre d'éléments, et aussi sur un assemblage structurel plus complexe.

Б. Готовач, Р. Сесартич, В. Козулич

Оригинальная научная работа

Точная цифровая формулировка искривленного балочного элемента

В работе приведена цифровая формуляция загнутого балочного элемента в плоскости, основывающаяся на базовых функциях, включающих совместное влияние изгиба, сдвига и продольных сил. Показано также оригинальное преобразование алгебро-тригонометрических базовых функций в полиномы Эрмита, когда загнутого элемент принимает прямолинейную форму. Проведена проверка созданной цифровой модели на нескольких элементарных примерах, а также на одной более сложной конструкции.

B. Gotovac, R. Sesartić, V. Kozulić

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

Genauere Formulierung des gekrümmten Balkenelements

Im Artikel ist eine genaue numerische Formulierung des in Ebene gekrümmten Balkenelements dargestellt, begründet auf den Basisfunktionen die den gemeinsamen Einfluss von Biegung, Schub und Längskräfte eingliedern. Gezeigt ist, ebenfalls, die originelle Umbildung der algebraisch-trigonometrischen Basisfunktionen in Hermite's Polynome wenn das gekrümmte Element eine geradlinige Form annimmt. Das kreierte numerische Modell wurde an einigen elementaren Beispielen getestet, und ebenfalls an einem komplexerem konstruktiven Gefüge.

Autori: Prof. dr. sc. **Blaž Gotovac**, dipl. ing. građ.; mr. sc. **Renata Sesartić**, dipl. ing. građ.; prof. dr. sc. **Vedrana Kozulić**, dipl. ing. građ., Sveučilište u Splitu Građevinsko arhitektonski fakultet, Split

1 Uvod

Zakrivljeni gredni nosači uvelike se pojavljuju u građevinarstvu, bilo kao samostalni konstrukcijski elementi [1, 2, 3], bilo kao dijelovi neke složenije građevine. Analitička se rješenja za zakrivljene gredne nosače mogu dobiti samo za jednostavnije slučajeve metodama teorije elastičnosti [1], dok je za složenije slučajeve moguće doći do rješenja jedino uporabom numeričkih metoda. Jedna je od najčešće primjenjivanih metoda konačnih elemenata. Većina radova koji se bave analizom zakrivljenih grednih nosača upotrebljava algebarske polinome kao bazne funkcije. U radu [4] usvojeni su kubni polinomi za bazne funkcije pomaka. Kombinacija linearne, kvadratne i kubne bazne funkcije za komponente pomaka usvojena je u radu [5]. Nastojanje da se ublaže učinci posmika i učinci membrane analizirani su u radovima [6, 7]. Tročvorni zakrivljeni konačni elementi kojima se smanjuje utjecaj učinka membrane na zakrivljenim nosačima opisani su u radovima [8, 9]. Ponašanje zakrivljenih nosača pri djelovanju posmičnih naprezanja opisano je u radu [10], a dvočvorni zakrivljeni element kod kojeg je polje pomaka opisano s kubnim baznim funkcijama analiziran je u radu [11]. Uvođenjem trigonometrijskih baznih funkcija na Timoshenkovoj gredi [12, 13] postiglo se smanjenje broja konačnih elemenata.

Fenomeni posmičnog i membranskog "lockinga"¹ uklonjeni su uporabom 6 čvornih zakrivljenih elemenata u radu [14]. Tročvorni zakrivljeni gredni elementi opisani trigonometrijskim baznim funkcijama kojima je postignuto ublažavanje fenomena posmičnog i membranskog učinka pogoršanja konvergencije (eng. "locking") opisani su u radu [15]. U radu [16] definirane su egzaktno bazne funkcije za dvočvorne štapne elemente konstantne zakrivljenosti te je prikazana točna matrica krutosti konačnog elementa.

Cilj ovog rada jest stvoriti numerički model zakrivljenoga grednoga konačnog elementa za proračun linijskih konstrukcija koji bi u numeričkom smislu bio ekvivalentan pravocrtnom dvočvornom konačnom elementu koji se zasniva na Hermiteovim polinomima kao baznim funkcijama.

Promatra se zakrivljeni štap u ravnini konstantnoga poprečnog presjeka pod djelovanjem statičkog opterećenja u ravnini luka. Na izdvojenom diferencijalnom dijelu zakrivljenog štapa izvedene su u točki 2 diferencijalne jednadžbe ravnoteže zakrivljenoga grednoga elementa. U

diferencijalne jednadžbe ravnoteže uvedeni su izrazi za unutrašnje sile izražene pomakom te je dobiven sustav od triju diferencijalnih jednadžbi drugoga reda koje uz odgovarajuće rubne uvjete u potpunosti opisuju problem. Istovremeno problem je opisan i funkcionalom potencijalne energije te je standardnim postupkom njegove minimizacije dobivena matrica krutosti lučnoga konačnog elementa. U točki 3, zahtjevnim postupkom sprežanja sustava triju diferencijalnih jednadžbi drugog reda u jednu jednadžbu šestog reda dobiven je opći oblik elastične linije zakrivljenog štapa izražene pomoću uzdužnog pomaka. Izvedene su egzaktno algebarsko-trigonometrijske bazne funkcije na grednom elementu konstantne zakrivljenosti. Primjenom tih baznih funkcija za prikaz polja pomaka, u točki 4 izvedena je egzaktna matrica krutosti zakrivljenog elementa u kojoj su potpuno eliminirani učinak posmika i učinak membrane (eng. *shear and membrane locking effects*). Primjenjujući zakrivljene gredne elemente s egzaktnim baznim funkcijama, razvijen je numerički model kojim se za lukove opterećene statičkim opterećenjem u čvorovima dobivaju točni rezultati neovisno o broju konačnih elemenata u proračunu.

U točki 5 analizirana je veza između egzaktnih algebarsko-trigonometrijskih baznih funkcija za zakrivljeni gredni element i Hermiteovih polinoma kao baznih funkcija pravocrtnoga konačnog elementa.

Za ilustraciju numeričkog modela za zakrivljene gredne nosače analizirani su numerički primjeri u točki 6. Odabrano je nekoliko primjera jednostavnih zakrivljenih konstrukcija opterećenih koncentriranim silama i kontinuiranim opterećenjem te jedan primjer složene konstrukcije i opterećenja. Numerička rješenja zakrivljenim konačnim elementima za sve promatrane primjere uspoređena su s rješenjima koja su dobivena pomoću dvočvornih pravocrtnih konačnih elemenata, uporabom konvencionalnih računalnih programa [17].

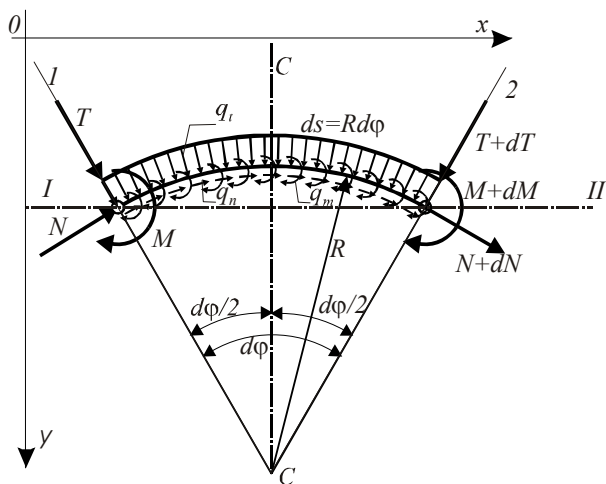
2 Matematički model zakrivljenoga grednoga nosača

Promatra se prizmatični gredni nosivi element u ravnini konstantnog polumjera zakrivljenosti. Također, odabrana su linearno elastična svojstva materijala uz pretpostavku malih pomaka i malih deformacija. Kako bi se zadatak mogao opisati pomoću uvjeta ravnoteže (sustav od triju diferencijalnih jednadžbi ravnoteže drugog reda uz pripadajuće rubne uvjete) te pomoću funkcionala potencijalne energije, potrebno je pokazati međusobne veze pomaka, deformacija i naprezanja te opterećenja i pomaka. Cilj je pokazati postupak najboljeg izbora baznih funkcija približnog rješenja za minimizaciju funkcionala potencijalne energije odnosno određivanje stabilne statičke ravnoteže.

¹ „Locking“ je učinak smanjenja brzine konvergencije numeričkog procesa grubih mreža konačnih elemenata u ovisnosti o kritičnom parametru (npr. kada debljina ploče d teži nuli).

2.1 Jednadžbe ravnoteže diferencijalnog dijela zakrivljenog elementa

Promatra se prizmatični štap u ravnini konstantne zakrivljenosti. Štap je opterećen raspodijeljenim uzdužnim opterećenjem q_n , poprečnim opterećenjem q_t , te raspodijeljenim momentom q_m prema slici 1.



Slika 1. Diferencijalni dio štapa

Os štapa i nakon deformiranja ostaje ravninska krivulja koja se nalazi u ravnini djelovanja vanjskih sila.

Slika 1. prikazuje diferencijalni dio zakrivljenog štapa izdvojen presjecima I i 2. U presjeku I djelovanje odbaćenog dijela štapa nadomješteno je unutrašnjim silama M , T i N , a u presjeku 2 unutrašnje su sile uvećane za diferencijalni prirast tih sila koji nastaje zbog opterećenja na diferencijalnom dijelu štapa.

Postavljanjem uvjeta ravnoteže diferencijalnog dijela zakrivljenoga grednog elementa dobivaju se sljedeće jednadžbe [18]:

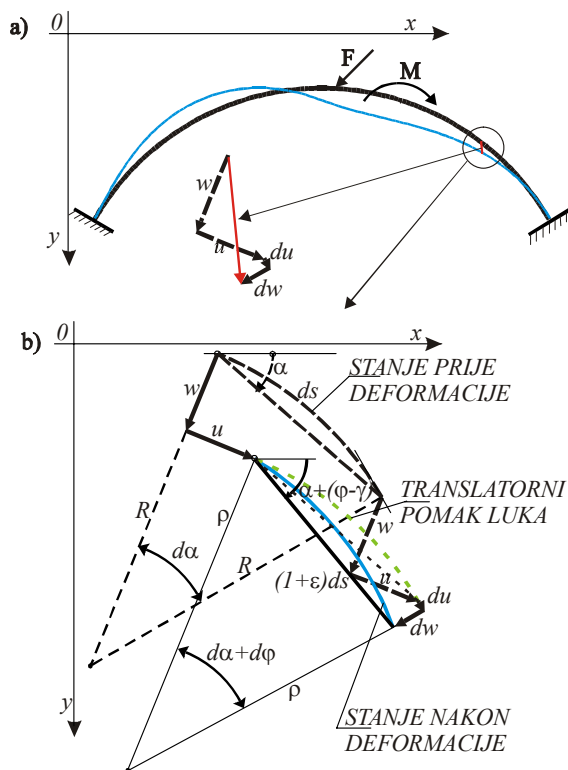
$$\begin{aligned} \frac{dN}{ds} - \frac{T}{R} - q_n &= 0, \\ \frac{dT}{ds} + \frac{N}{R} - q_t &= 0, \\ \frac{dM}{ds} + T - q_m &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

gdje N označava uzdužnu silu, T poprečnu silu, M moment savijanja u proizvoljnom poprečnom presjeku, a R polumjer zakrivljenosti elementa.

2.2 Veza između pomaka i deformacija

Na slici 2. prikazani su deformirani nosač pod vanjskim opterećenjem i mehanizam pomicanja diferencijalnog dijela luka duljine ds .

Projeciranjem diferencijalnog elementa luka prije i nakon deformacije na koordinatne osi x i y , dobivaju se dvije nelinearne jednadžbe. Za potrebe linearne analize



Slika 2. Pomak linije štapa

jednadžbe se mogu linearizirati, te se nakon potrebnih kombinacija i sređivanja [18] dobivaju veze komponenta pomaka i pripadajućih deformacija kako slijedi:

- uzdužna (tangencijalna) deformacija:

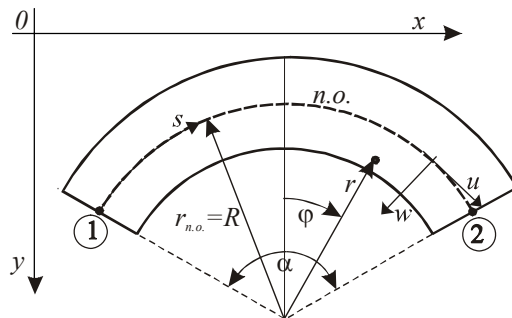
$$\varepsilon(s) = \frac{du}{ds}; \quad (2)$$

- posmična deformacija (kut koji nastaje međusobnim klizanjem dvaju susjednih presjeka na razmaku ds) u smjeru normale:

$$\gamma(s) = \varphi(s) - \frac{dw}{ds}; \quad (3)$$

- uz pretpostavku da je kut γ konstantan duž diferencijalnog elementa ds , promjena zakrivljenosti lučnog nosača jest:

$$\kappa(s) = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (4)$$



Slika 3. Element luka u odabranim koordinatnim sustavima

Komponente deformacija u polarnim koordinatama za stanje ravninskog naprezanja [1] prilagođene odabranom koordinatnom sustavu na slici 3. jesu:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial w}{\partial r} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{w}{r} \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}\end{aligned}\quad (5)$$

Za linijski se nosač polumjer ne mijenja po visini grede (polumjer neutralne osi $r_{n.o.} \cong R$),

pa uz zamjenu $r\partial\varphi \rightarrow R \cdot d\varphi = ds$ izrazi (5) postaju:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= 0 \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{uu} &= \frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{R} \\ \gamma_{r\varphi} = \gamma &= \frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R}\end{aligned}\quad (6)$$

Sređivanjem izraza (6), koristeći uz prijašnje izraze (2), (3) i (4), konačno se mogu napisati izrazi za relativne deformacije zakrivljenoga grednog nosača u uzdužnom, poprečnom i rotacijskom smjeru:

$$\begin{aligned}\varepsilon_u = \varepsilon &= \frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{R} \\ \varepsilon_w = \gamma = \varphi &= \varphi - \frac{dw}{ds} = \varphi - \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R} \\ \varepsilon_\varphi = \kappa &= \frac{d\varphi}{ds}\end{aligned}\quad (7)$$

2.3 Veza pomaka i unutrašnjih sila – Zakon ponašanja

Progibna linija grednog elementa u opisanom se postupku traži metodom pomaka pa se prema tome sve relevantne veličine, uključujući i unutrašnje sile, moraju prikazati u ovisnosti o generaliziranim pomacima točaka neutralne linije po pravcu tangente, normale i u smjeru zaokreta presjeka oko osi okomite na ravninu modela.

Iz zadanih se svojstava materijala i geometrijskog oblika poprečnog presjeka može odrediti krutost presjeka EA , kGA i EI prema uzdužnom, poprečnom djelovanju i djelovanju na savijanje grede.

Množenjem navedenih karakteristika krutosti presjeka grede s pripadajućim deformacijama iz (7) dobivaju se unutarnje sile izražene deformiranjem (pomakom):

$$\begin{aligned}N &= -EA \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{R} \right) \\ T &= kGA \left(\varphi - \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R} \right) \\ M &= -EI \frac{d\varphi}{ds}\end{aligned}\quad (8)$$

2.4 Ravnotežno stanje lučnog nosača

Ravnoteža nosivog elementa može se opisati jednadžbama (1) u koje treba uvesti svojstva materijala, karakteristike poprečnog presjeka i relativne deformacije izražene pomacima uz uzimanje u obzir pripadajućih rubnih uvjeta. Drugi način uspostavljanja ravnoteže jest primjena varijacijskog postupka.

U prvom slučaju uvrštavanjem izraza (8) u jednadžbe (1) dobiva se sustav od triju diferencijalnih jednadžbi drugog reda:

$$\begin{aligned}\frac{EA}{R^2} \frac{d^2 u}{ds^2} - \frac{kGA}{R^2} u(s) - \frac{EA + kGA}{R^2} \frac{dw}{ds} + \frac{kGA}{R} \varphi(s) &= -q_n \\ \frac{EA + kGA}{R^2} \frac{du}{ds} + \frac{kGA}{R^2} \frac{d^2 w}{ds^2} - \frac{EA}{R^2} w(s) - \frac{kGA}{R} \frac{d\varphi}{ds} &= -q_t \\ \frac{kGA}{R} u(s) + \frac{kGA}{R} \frac{dw}{ds} + \frac{EI}{R^2} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} - kGA \varphi(s) &= -q_m\end{aligned}\quad (9)$$

Uz sustav (9) potrebno je zadati konkretne rubne uvjete kako bi zadatak bio jednoznačno opisan. Svakoj jednadžbi pripadaju po dva rubna uvjeta koja se odabiru od moguća četiri. U prvoj su jednadžbi mogući rubni uvjeti pomak po pravcu tangente ili uzdužne sile na krajevima grede. U drugoj su jednadžbi uvjeti radijalni pomak ili poprečna sila, i u trećoj kut zaokreta ili moment savijanja. Općenito, rubni se uvjeti mogu napisati u obliku:

$$\begin{aligned}u(0) = \alpha_1, \quad u(a) = \alpha_2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_0 = \beta_1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_a = \beta_2, \\ w(0) = \alpha_3, \quad w(a) = \alpha_4, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_0 = \beta_3, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_a = \beta_4, \\ \varphi(0) = \alpha_5, \quad \varphi(a) = \alpha_6, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|_0 = \beta_5, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|_a = \beta_6.\end{aligned}\quad (10)$$

gdje a označuje duljinu lučnog nosača, α_i i β_i , $i = 1, \dots, 6$ su zadane vrijednosti.

Ako su svi zadani rubni uvjeti dinamički, treba definirati ravnotežni položaj elementa kao krutog tijela jer se deformiranje odvija oko tog položaja, što u matematičkoj interpretaciji znači da je nužno zadati barem jedan kinematički rubni uvjet, a to je u konkretnom slučaju pomak težišta i zaokret oko težišta promatranoga grednog elementa.

U drugom slučaju stanje ravnoteže može se opisati varijacijskim postupkom pomoću principa virtualnog rada ili pomoću principa minimuma potencijalne energije. U daljnjem se postupku rabi funkcional potencijalne energije koji za element volumena deformabilnog opterećenog tijela ima opći oblik:

$$dE_p = \frac{1}{2} D \cdot \varepsilon^2 dV \quad (11)$$

ili za gredni element:

$$E_p = \int_s \frac{N^2 ds}{2EA} + \int_s \frac{T^2 ds}{2kGA} + \int_s \frac{M^2 ds}{2EI} \quad (12)$$

gdje je $ds = R \cdot d\Phi$ diferencijalna duljina luka grede.

Uz uvrštavanje izraza za unutrašnje sile (8), potencijalna energija izražena pomakom jest:

$$E_p = \frac{1}{2EA} \int_s \left[-EA \left(\frac{du}{ds} - \frac{w}{R} \right) \right]^2 ds + \frac{1}{2kGA} \int_s \left[kGA \left(\varphi - \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R} \right) \right]^2 ds + \frac{1}{2EI} \int_s \left[-EI \frac{d\varphi}{ds} \right]^2 ds \quad (13)$$

Minimum potencijalne energije (13) jednoznačno određuje položaj stabilne statičke ravnoteže grede potpuno analogno sustavu (9) s rubnim uvjetima (10). Međutim, u (13) nema rubnih uvjeta i nema opterećenja.

Za razliku od modela (9) – (10), u funkcional se mora uvrstiti neka odabrana funkcija traženog rješenja koja mora zadovoljavati kinematičke rubne uvjete, dok dinamičke ne mora (oni će biti zadovoljeni na razini točnosti rješenja). Ni opterećenje se ne zadaje na eksplicitan način kao u sustavu (9) – (10), već se zadaje u integralnom obliku odnosno kao skalarni umnožak funkcije rješenja i funkcije zadanog opterećenja. Taj je postupak poznat pod pojmom ekvivalentnih čvornih sila ili sila pune upetosti. Osnovno je pitanje kako pogoditi nepoznato rješenje, odnosno kako konstruirati bazne funkcije vektora rješenja.

Kod pravocrtnih grednih elemenata zadatak je riješen određivanjem progibne linije za neopterećeni element i dobiveni su Hermiteovi polinomi trećeg stupnja prvog reda kao najbolje bazne funkcije. Potom je doprinos posmika naknadno uključen [19, 20].

U ovom se radu izlaže analogan postupak za lučni nosivi element. Očito je da je u odnosu na pravocrtni element postupak znatno složeniji jer treba riješiti sljedeće glavne korake, uključujući istodobno doprinose uzdužnoga, poprečnog i opterećenja momentima savijanja:

- (i) sprežavanje sustava triju jednažbi drugog reda (9) u jednu jednažbu šestog reda po jednoj od komponenta pomaka u , w ili φ ,
- (ii) uspostavljanje veza kinematičkih rubnih uvjeta iz sustava (10) i baznih funkcija vektora rješenja koje se uvrštavaju u funkcional (13),
- (iii) rješavanje problema zadavanja opterećenja, odnosno određivanje ekvivalentnih čvornih sila – sila pune upetosti.

2.5 Matrična formulacija zakrivljenoga grednog elementa

U metodi pomaka, nepoznanice problema su pomaci koji se dobiju rješavanjem sustava:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (14)$$

gdje je:

\mathbf{K} – matrica koeficijenata

\mathbf{u} – vektor svih pomaka krajeva grednog elementa

\mathbf{F} – vektor opterećenja

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_p \quad (15)$$

\mathbf{F}_a – čvorne sile na krajevima grednog nosača nastale od aktivnog dijela opterećenja

\mathbf{F}_p – reakcije u pridržanim smjerovima oslonaca (pasivni dio opterećenja)

Vektor pomaka \mathbf{u} može se napisati kao:

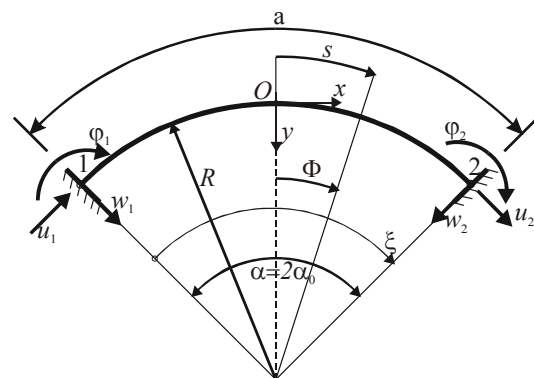
$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}^e \quad (16)$$

gdje je \mathbf{N} matrica baznih funkcija, a $\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}$ vektor

pomaka krajnjih točaka elementa.

Vektor pomaka bilo koje točke na osi lučnog nosača zbog pomaka kraja nosača s indeksom "k" (slika 4.) može se napisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} u(\xi) \\ w(\xi) \\ \varphi(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{uu}^k(\xi) & N_{wu}^k(\xi) & N_{\varphi u}^k(\xi) \\ N_{uw}^k(\xi) & N_{ww}^k(\xi) & N_{\varphi w}^k(\xi) \\ N_{u\varphi}^k(\xi) & N_{w\varphi}^k(\xi) & N_{\varphi\varphi}^k(\xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \\ \varphi_k \end{bmatrix}; \quad k=1,2. \quad (17)$$



Slika 4. Promatrani zakrivljeni gredni element

U proizvoljnoj točki lučnog nosača vektor deformacija ima oblik:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_u \\ \varepsilon_w \\ \varepsilon_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{R} \\ -\frac{u}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} + \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Deformacije na konačnom elementu mogu se izraziti s pomoću pomaka čvorova elementa:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}^e \quad (19)$$

gdje \mathbf{B} predstavlja matricu deformiranja (pomaka) konačnog elementa:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2]. \quad (20)$$

Uvrštavajući izraz (17) za doprinos polja pomaka koji nastaje od pomaka čvora k u jednadžbu (18), dobiva se matrica deformiranja (pomaka) \mathbf{B}_k u obliku:

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_{uu}^k}{\partial s} - \frac{1}{R} N_{uw}^k \right) & \left(\frac{\partial N_{wu}^k}{\partial s} - \frac{1}{R} N_{ww}^k \right) & \left(\frac{\partial N_{\varphi u}^k}{\partial s} - \frac{1}{R} N_{\varphi w}^k \right) \\ \left(-\frac{1}{R} N_{uu}^k - \frac{\partial N_{uw}^k}{\partial s} + N_{u\varphi}^k \right) & \left(-\frac{1}{R} N_{wu}^k - \frac{\partial N_{ww}^k}{\partial s} + N_{w\varphi}^k \right) & \left(-\frac{1}{R} N_{\varphi u}^k - \frac{\partial N_{\varphi w}^k}{\partial s} + N_{\varphi\varphi}^k \right) \\ \left(\frac{\partial N_{u\varphi}^k}{\partial s} \right) & \left(\frac{\partial N_{w\varphi}^k}{\partial s} \right) & \left(\frac{\partial N_{\varphi\varphi}^k}{\partial s} \right) \end{bmatrix}_k \quad (21)$$

$k = 1, 2.$

Veza između naprezanja i deformacija izražava se matricom elastičnih svojstava materijala \mathbf{D} kao:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & kGA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix}. \quad (22)$$

U konkretnom slučaju radi se o rezultatnom napreznju u poprečnom presjeku, odnosno o unutrašnjim silama N , T i M pa se može pisati:

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & kGA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_u \\ \varepsilon_w \\ \varepsilon_\varphi \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Standardnim postupkom minimizacije funkcionala potencijalne energije (13) dobiva se matrica krutosti konačnog elementa lučnog nosača u obliku:

$$\mathbf{K} = \int_s \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \, ds. \quad (24)$$

U vektoru pomaka od svih komponenata barem tri moraju biti zadane da bi zakrivljeni gredni element postao lučni nosač u ravnini. Preostale su komponente pomaci po pravcima stupnjeva slobode.

Opterećenje zadano na elementu između njegovih krajnjih točaka transformira se u ekvivalentne čvorne sile primjenom baznih funkcija. Na primjer, ekvivalentna uzdužna čvorna sila u čvoru 1 $F_a^{(u1)}$ dobila bi se izrazom:

$$F_a^{(u1)} = \int_s [N_{uu}^1 \cdot q_n + N_{uw}^1 \cdot q_t + N_{u\varphi}^1 \cdot q_m] \, ds. \quad (25)$$

Važno je dodati da se pri preslikavanju kuta zaokreta s normiranog područja na područje realne duljine kut zaokreta podijeli s duljinom elementa a . Matricna jednadžba ravnoteže ima konačni oblik:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \cdot a & k_{14} & k_{15} & k_{16} \cdot a \\ & k_{22} & k_{23} \cdot a & k_{24} & k_{25} & k_{26} \cdot a \\ & & k_{33} \cdot a^2 & k_{34} & k_{35} & k_{36} \cdot a^2 \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \cdot a \\ \text{simet.} & & & & k_{55} & k_{56} \cdot a \\ & & & & & k_{66} \cdot a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \Phi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ m_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ m_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

gdje je:

$$\Phi_i = \varphi_i / a, \quad m_i = M_i \cdot a, \quad i = 1, 2.$$

N_i , T_i i M_i $i = 1, 2$. unutrašnje sile u čvoru i .

3 Egzaktne bazne funkcije

Za proračun koeficijenata matrice krutosti posebno je važan izbor baznih funkcija. Odabrane bazne funkcije moraju zadovoljavati jednadžbe (9) i (10).

Pretvorbom sustava triju diferencijalnih jednadžbi drugog reda (9) u diferencijalnu jednadžbu elastične linije zakrivljenog štapa izražene samo jednom komponentom pomaka, dobiva se jednadžba elastične linije zakrivljenog štapa izražena pomakom $u(s)$ u obliku diferencijalne jednadžbe šestog reda:

$$\begin{aligned} \frac{d^6 u}{ds^6} + 2 \cdot \frac{d^4 u}{ds^4} + \frac{d^2 u}{ds^2} = & \frac{1}{EI} \left(-R^3 \cdot q_m - R^3 \cdot \frac{d^2 q_m}{ds^2} \right) + \\ & + \frac{1}{EI} \left(R^4 \frac{dq_t}{ds} - \frac{EI \cdot R^2}{kGA} \cdot \frac{d^3 q_t}{ds^3} - \frac{EI \cdot R^2}{EA} \cdot \frac{d^3 q_t}{ds^3} \right) + \\ & + \frac{1}{EI} \left(-R^4 \cdot q_n + \frac{EI \cdot R^2}{kGA} \cdot \frac{d^2 q_n}{ds^2} - \frac{EI \cdot R^2}{EA} \cdot \frac{d^4 q_n}{ds^4} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Jednadžba elastične linije zakrivljenog štapa izražena pomakom $w(s)$ dobiva se u obliku diferencijalne jednadžbe petog reda, a pomakom $\varphi(s)$ u obliku diferencijalne jednadžbe četvrtog reda.

Rješavajući tri jednadžbe drugog reda u sustavu (9) treba zadovoljiti šest rubnih uvjeta (10), što jedino može

biti ekvivalentno diferencijalnoj jednadžbi elastične linije zakrivljenog štapa (27) izraženoj pomakom $u(s)$.

Desna strana diferencijalne jednadžbe (27) nastaje zbog opterećenja. Izjednačavajući desnu stranu s nulom, dobiva se homogena jednadžba koja predstavlja diferencijalnu jednadžbu elastične linije neopterećenoga zakrivljenog štapa:

$$\frac{d^6 u}{ds^6} + 2 \cdot \frac{d^4 u}{ds^4} + \frac{d^2 u}{ds^2} = 0 \quad (28)$$

Opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe (28) može se napisati kao funkcija kuta Φ (slika 4.) u obliku [16]:

$$u(\Phi) = A_0 + A_1 \Phi + A_2 \cdot \sin(\Phi) + A_3 \cdot \Phi \cdot \sin(\Phi) + A_4 \cdot \cos(\Phi) + A_5 \cdot \Phi \cdot \cos(\Phi) \quad (29)$$

U istom se obliku moraju izraziti i poprečni pomaci $w(\Phi)$ te kutovi zaokreta $\varphi(\Phi)$:

$$w(\Phi) = B_0 + B_1 \Phi + B_2 \cdot \sin(\Phi) + B_3 \cdot \Phi \cdot \sin(\Phi) + B_4 \cdot \cos(\Phi) + B_5 \cdot \Phi \cdot \cos(\Phi) \quad (30)$$

$$\varphi(\Phi) = C_0 + C_1 \Phi + C_2 \cdot \sin(\Phi) + C_3 \cdot \Phi \cdot \sin(\Phi) + C_4 \cdot \cos(\Phi) + C_5 \cdot \Phi \cdot \cos(\Phi) \quad (31)$$

U ovako napisanim općim rješenjima (29), (30) i (31) ima ukupno 18 nepoznanica, dok rješavanjem triju diferencijalnih jednadžbi drugog reda treba zadovoljiti 6 rubnih uvjeta. Dakle, 6 nepoznanica je neovisnih, a ostalih 12 se može izraziti pomoću njih. Jednadžba šestog reda (27) ima svih šest koeficijenata općeg rješenja različitih od nule. Prema tome, koeficijenti B_i i C_i mogu se izraziti o koeficijentima A_i .

Deriviranjem općih rješenja (29) – (31) i uvrštavanjem u sustav (9) uz sljedeće supstitucije:

$$kGA = \frac{EI}{d_1} \cdot \frac{1}{R^2}; \quad EA = \frac{EI}{e_1} \cdot \frac{1}{R^2}$$

$$A'' = 1 - d_1 + e_1; \quad A' = 1 + d_1 + e_1$$

dobiva se veza koeficijenata A_i te koeficijenata B_i i C_i u obliku [21]:

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$B_0 = A_1$	$B_1 = 0$	$B_2 = \frac{2 - A''}{A'} \cdot A_3 - A_4$	$B_3 = -A_5$	$B_4 = A_2 + \frac{2 - A''}{A'} \cdot A_5$	$B_5 = A_3$
$C_0 = \frac{A_0}{R}$	$C_1 = \frac{A_1}{R}$	$C_2 = -A_5 \frac{2}{R \cdot (2 + d_1) \cdot e_1}$	$C_3 = 0$	$C_4 = A_3 \frac{2}{R \cdot (2 + d_1) \cdot e_1}$	$C_5 = 0$

(32)

Za djelovanje jediničnih pomaka u osloncima obostrano upetog luka, svakom jediničnom pomaku pridružene su po tri bazne funkcije. Prema tome, za svaki jedinični pomak dobiva se po 18 koeficijenata.

Kako bi se lakše prikazali svi izrazi za bazne funkcije, uvedene su sljedeće supstitucije:

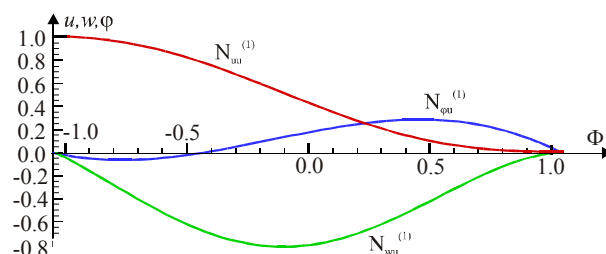
$$s_\alpha = \sin \alpha, \quad s_0 = \sin \alpha_0, \quad c_\alpha = \cos \alpha, \quad c_0 = \cos \alpha_0,$$

$$d = \frac{EI}{kGA} \frac{1}{a^2} = \frac{2(1 + \nu)}{k} \left(\frac{i}{a} \right)^2, \quad e = \frac{EI}{EA} \frac{1}{a^2} = \left(\frac{i}{a} \right)^2,$$

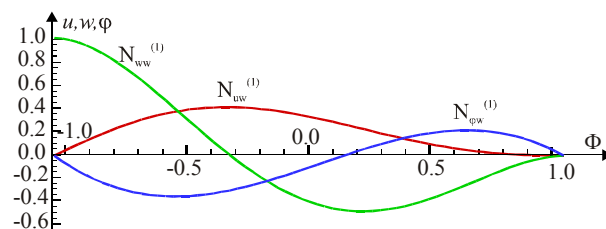
$$d_1 = \alpha^2 d, \quad e_1 = \alpha^2 e, \quad (33)$$

$$D_1 = \alpha(\alpha + \sin \alpha)(1 + d_1 + e_1) - 2[2(1 - \cos \alpha) + \alpha d_1 \sin \alpha],$$

$$D_2 = \alpha(\alpha + \sin \alpha)(1 + d_1 + e_1) - 2\alpha \sin \alpha(1 + e_1).$$



Slika 5. Bazine funkcije na zakrivljenom elementu zbog pomaka $u_1=1$



Slika 6. Bazine funkcije na zakrivljenom elementu zbog pomaka $w_1=1$

Uvođenjem supstitucija d za učinak posmika i e za učinak membrane prema izrazima (33) omogućava se praćenje njihova doprinosa u baznim funkcijama.

Na slikama 5. – 7. prikazan je oblik egzaktnih baznih funkcija za djelovanje jediničnih pomaka u čvoru 1, a njihove konačne jednadžbe dane su sljedećim izrazima:

$$N_{uu}^{(1)} = -\frac{\alpha s'}{D_2} - \frac{2s_\alpha}{D_1} \cdot \Phi - \left(\frac{1}{2s_0} - \frac{\alpha(A'c_0^2\alpha + 2s_\alpha)}{2D_1s_0} \right) \cdot \sin \Phi + \frac{A'\alpha s_0}{D_2} \cdot \Phi \cdot \sin \Phi + \left(\frac{1}{2c_0} - \frac{\alpha(A's_0^2\alpha - 2s_\alpha)}{2D_2c_0} \right) \cdot \cos \Phi - \frac{A'\alpha c_0}{D_1} \cdot \Phi \cdot \cos \Phi, \quad (34)$$

$$N_{wu}^{(1)} = -\frac{2}{D_1} s_\alpha - \frac{\alpha^2 A'c_0}{2D_2} \cdot \sin \Phi + \frac{A'}{D_1} \alpha c_0 \cdot \Phi \cdot \sin \Phi - \frac{s_0(A'\alpha^2 - 8)}{2D_1} \cdot \cos \Phi + \frac{A'\alpha s_0}{D_2} \cdot \Phi \cdot \cos \Phi, \quad (35)$$

$$a \cdot N_{\phi u}^{(1)} = -\frac{\alpha^2 s_\alpha}{D_2} - \frac{2\alpha s_\alpha}{D_1} \cdot \Phi + \frac{2 \cdot \alpha^2 c_0}{D_1} \cdot \sin \Phi + \frac{2 \cdot \alpha^2 s_0}{D_2} \cdot \cos \Phi, \quad (36)$$

$$N_{uw}^{(1)} = \frac{\alpha(1+c_\alpha)}{D_2} - \frac{2(1-c_\alpha)}{D_1} \cdot \Phi + \frac{\alpha(A'c_0\alpha + 4s_0)}{2D_1} \cdot \sin \Phi - \frac{A'\alpha c_0}{D_2} \cdot \Phi \cdot \sin \Phi + \frac{\alpha(A's_0\alpha - 4c_0)}{2D_2} \cdot \cos \Phi - \frac{A'\alpha s_0}{D_1} \cdot \Phi \cdot \cos \Phi, \quad (37)$$

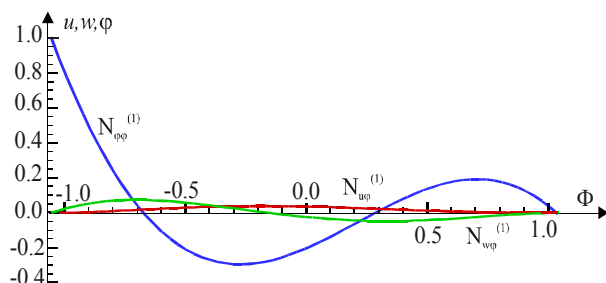
$$N_{ww}^{(1)} = -\frac{2(1-c_\alpha)}{D_1} + \frac{\alpha(2A''c_0 - A's_0\alpha)}{2D_2} \cdot \sin \Phi + \frac{A'\alpha s_0}{D_1} \cdot \Phi \cdot \sin \Phi + \frac{\alpha \cdot (A' \cdot c_0 \cdot \alpha + 2 \cdot A'' \cdot s_0)}{2D_1} \cdot \cos \Phi - \frac{A'\alpha c_0}{D_2} \cdot \Phi \cdot \cos \Phi, \quad (38)$$

$$a \cdot N_{\phi w}^{(1)} = \frac{\alpha^2(1+c_\alpha)}{D_2} - \frac{2 \cdot \alpha(1-c_\alpha)}{D_1} \cdot \Phi + \frac{2 \cdot \alpha^2 s_0}{D_1} \cdot \sin \Phi - \frac{2 \cdot \alpha^2 c_0}{D_2} \cdot \cos \Phi \quad (39)$$

$$N_{u\phi}^{(1)} = \frac{s_\alpha}{D_2} + \frac{1}{2\alpha} - \frac{A'\alpha - s_\alpha(2-A'')}{D_1\alpha} \Phi + \frac{(A'(2c_0 + s_0\alpha) - 2c_0(2-A''))}{2D_1} \sin \Phi - \frac{A's_0}{D_2} \Phi \sin \Phi - \frac{A'c_0\alpha + 2s_0(2-A'')}{2D_2} \cos \Phi + \frac{A'(\alpha c_0 - 2s_0)}{\alpha D_1} \Phi \cos \Phi, \quad (40)$$

$$N_{w\phi}^{(1)} = -\frac{A'\alpha - s_\alpha(2-A'')}{D_1\alpha} + \frac{A' \cdot c_0 \cdot \alpha}{2 \cdot D_2} \cdot \sin \Phi - \frac{A'(\alpha c_0 - 2s_0)}{\alpha D_1} \cdot \Phi \cdot \sin \Phi - \frac{A's_0}{D_2} \cdot \Phi \cdot \cos \Phi + \frac{(A' \cdot \alpha \cdot (2c_0 + s_0\alpha) - 4 \cdot s_0(2-A''))}{2 \cdot D_1 \cdot \alpha} \cdot \cos \Phi, \quad (41)$$

$$N_{\phi\phi}^{(1)} = \frac{1}{D_2} \alpha s_\alpha + \frac{1}{2} - \frac{A' \cdot \alpha - s_\alpha(2-A'')}{D_1} \cdot \Phi - \frac{2(c_0\alpha - 2s_0)}{D_1} \cdot \sin \Phi - \frac{2 \cdot \alpha s_0}{D_2} \cdot \cos \Phi, \quad (42)$$



Slika 7. Bazine funkcije na zakrivljenom elementu zbog pomaka $\phi_1=1$

Veze između baznih funkcija za djelovanje jediničnih pomaka u čvoru 2 i baznih funkcija za djelovanje jediničnih pomaka u čvoru 1 su sljedeće:

$$\begin{aligned} N_{uu}^{(2)}(\Phi) &= N_{uu}^{(1)}(-\Phi), & N_{wu}^{(2)}(\Phi) &= -N_{wu}^{(1)}(-\Phi), & N_{\phi u}^{(2)}(\Phi) &= N_{\phi u}^{(1)}(-\Phi), \\ N_{uw}^{(2)}(\Phi) &= -N_{uw}^{(1)}(-\Phi), & N_{ww}^{(2)}(\Phi) &= N_{ww}^{(1)}(-\Phi), & N_{\phi w}^{(2)}(\Phi) &= -N_{\phi w}^{(1)}(-\Phi), \\ N_{u\phi}^{(2)}(\Phi) &= N_{u\phi}^{(1)}(-\Phi), & N_{w\phi}^{(2)}(\Phi) &= -N_{w\phi}^{(1)}(-\Phi), & N_{\phi\phi}^{(2)}(\Phi) &= N_{\phi\phi}^{(1)}(-\Phi). \end{aligned} \quad (43)$$

4 Matrica krutosti zakrivljenoga grednog elementa

Proračunom izraza (24), uz primjenu algebarsko-trigonometrijskih baznih funkcija izvedenih u točki 3, dobiva se egzaktne matrice krutosti zakrivljenoga grednog elementa. Radi lakšeg pisanja koeficijenata matrice krutosti, uz izraze (33) uvode se i sljedeće supstitucije:

$$D' = \frac{D_1 + D_2}{D_1 \cdot D_2}, \quad D'' = \frac{D_2 - D_1}{D_1 \cdot D_2}. \quad (44)$$

Matrica krutosti zakrivljenoga grednoga konačnog elementa ima oblik:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{\alpha^3 R^3} \begin{bmatrix} \alpha^4(D' + D''c_\alpha) & D''s_\alpha\alpha^4 & -\alpha^3(D' + D''c_\alpha) + \frac{2\alpha^2s_\alpha}{D_1} & -\alpha^4(D'c_\alpha + D'') & D's_\alpha\alpha^4 & \alpha^3(D'c_\alpha + D'') - \frac{2\alpha^2s_\alpha}{D_1} \\ \alpha^4(D' - D''c_\alpha) & -\alpha^3D''s_\alpha + (1-c_\alpha)\alpha^2\frac{2}{D_1} & -k_{15} & -\alpha^4(D'c_\alpha - D'') & -\alpha^4(D'c_\alpha - D'') & \alpha^3D's_\alpha - (1-c_\alpha)\alpha^2\frac{2}{D_1} \\ \alpha^2(D' + D''c_\alpha) + \frac{4}{D_1}(1-c_\alpha - \alpha s_\alpha) & k_{16} & -k_{26} & -\alpha^2(D'c_\alpha + D'') - \frac{4}{D_1}(1-c_\alpha - \alpha s_\alpha) & k_{11} & -k_{12} & k_{13} \\ \text{simetrično} & & k_{22} & & & -k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (45)$$

5 Veza egzaktnih baznih funkcija za zakrivljeni gredni element i Hermiteovih polinoma

Ovdje je prikazano kako Hermiteovi polinomi koji predstavljaju egzaktne bazne funkcije za pravocrtne gredne konačne elemente proizlaze iz algebarsko-trigonometrijskih baznih funkcija za zakrivljeni gredni element.

Uvrštavanjem izraza:

$$\alpha = a/R \quad s = a/R \cdot (\xi - 1/2) \quad (46)$$

u jednadžbe za bazne funkcije (34) - (43), ishodište koordinatnog sustava dovodi se u čvor 1 (slika 4.).

Proračunom limesa egzaktnih baznih funkcija (34) - (43) kada $R \rightarrow \infty$ na zakrivljenom grednom elementu uz ovako uvedene supstitucije, dobivaju se izrazi za bazne funkcije na pravocrtnom konačnom elementu.

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow \infty} N_{uu}^{(1)} &= 1 - \xi, \\
 \lim_{R \rightarrow \infty} N_{ww}^{(1)} &= \frac{(1 - \xi)(12 \cdot d - 2 \cdot \xi^2 + \xi + 1)}{12 \cdot d + 1}, \\
 \lim_{R \rightarrow \infty} N_{\varphi\varphi}^{(1)} &= \frac{3 \cdot \xi \cdot (\xi - 1)}{12 \cdot d + 1} - \xi + 1, \\
 \lim_{R \rightarrow \infty} N_{\varphi w}^{(1)} &= \frac{6 \cdot \xi \cdot (\xi - 1)}{12 \cdot d + 1}, \\
 \lim_{R \rightarrow \infty} N_{w\varphi}^{(1)} &= \frac{\xi(1 - \xi) \cdot (6 \cdot d - \xi + 1)}{12 \cdot d + 1}, \\
 \lim_{R \rightarrow \infty} N_{uu}^{(2)} &= \xi, \\
 \lim_{R \rightarrow \infty} N_{ww}^{(2)} &= \frac{\xi \cdot (12 \cdot d - \xi \cdot (2 \cdot \xi - 3))}{12 \cdot d + 1}, \\
 \lim_{R \rightarrow \infty} N_{\varphi\varphi}^{(2)} &= \frac{3 \cdot \xi \cdot (\xi - 1)}{12 \cdot d + 1} + \xi, \\
 \lim_{R \rightarrow \infty} N_{\varphi w}^{(2)} &= \frac{6 \cdot \xi \cdot (1 - \xi)}{12 \cdot d + 1}, \\
 \lim_{R \rightarrow \infty} N_{w\varphi}^{(2)} &= \frac{\xi(\xi - 1) \cdot (6 \cdot d + \xi)}{12 \cdot d + 1}. \quad (47)
 \end{aligned}$$

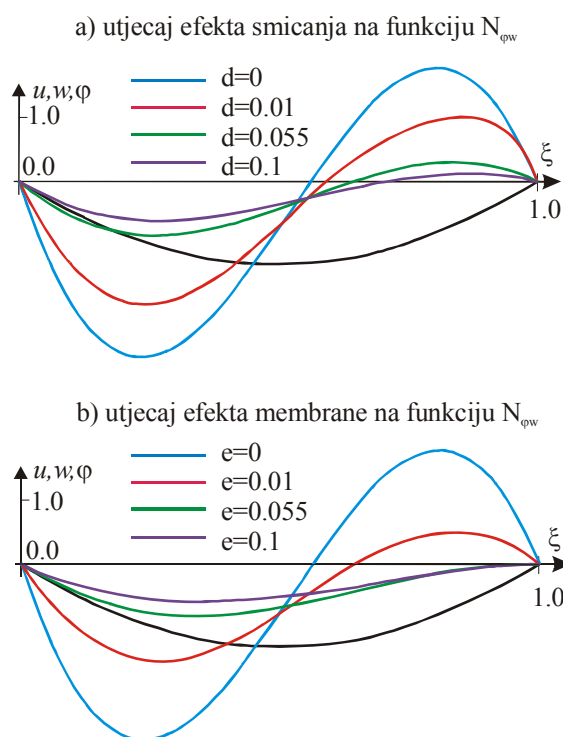
Egzaktne bazne funkcije $N_{uw}^{(1)}$, $N_{wu}^{(1)}$, $N_{u\varphi}^{(1)}$, $N_{\varphi u}^{(1)}$, $N_{uw}^{(2)}$, $N_{wu}^{(2)}$, $N_{u\varphi}^{(2)}$ i $N_{\varphi u}^{(2)}$ na pravocrtnom elementu imaju vrijednost nula, pa se može zaključiti da istovremeno djelovanje uzdužnog i radijalnog pomaka, kao i istovremeno djelovanje uzdužnog pomaka i kuta zaokreta, odvojeno daju doprinos deformiranju pravocrtnih grednih elemenata.

Kao što se vidi u izrazima (47), kada $R \rightarrow \infty$ egzaktne bazne funkcije ovise samo o učinku posmika d , dok učinak membrane nema utjecaja pri deformiranju pravocrtnih grednih elemenata.

Zanemarivanjem učinka posmika u izrazima (47) dobivaju se poznati Hermiteovi polinomi.

Na slici 8. prikazana je usporedba egzaktne bazne funkcije $N_{\varphi w}$ na zakrivljenom grednom elementu za različite vrijednosti učinka posmika d i učinka membrane e s baznom funkcijom za pravocrtni gredni element. Bazna funkcija na pravocrtnom elementu prikazana je crnom linijom, a egzaktne bazne funkcije za zakrivljeni element linijama različitih boja, ovisno o vrijednosti parametara učinka posmika i učinka membrane. Za slučajeve kada se mijenja vrijednost učinka posmika, učinak membrane je zanemaren i obrnuto.

Egzaktna bazna funkcija $N_{\varphi w}$ znatno odstupa od odgovarajuće bazne funkcije na pravocrtnom elementu, pa stoga utjecaji učinka posmika i učinka membrane na dio pomaka opisanog baznom funkcijom $N_{\varphi w}$ nisu zanemarivi. Na isti način, promatrajući druge bazne funkcije, uočen je znatan utjecaj učinka posmika i učinka membrane na pomake opisane odgovarajućim baznim funkcijama.



Slika 8. Utjecaj učinka posmika i učinka membrane na dio pomaka opisanog baznom funkcijom $N_{\varphi w}$

5.1 Matrica krutosti pravocrtanoga konačnog elementa opisanog egzaktним baznim funkcijama

Ako se u izraz za potencijalnu energiju (13) uvede da $R \rightarrow \infty$, dobiva se izraz za potencijalnu energiju pravocrtanog grednog elementa:

$$E_p = \frac{EA}{2} \int_x \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{kGA}{2} \int_x \left(\varphi(x) - \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_x \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (48)$$

U metodi pomaka, primjenom konačnih elemenata, uzima se da pomaci imaju nepoznate vrijednosti samo u čvorovima, a unutar elementa se opisuju čvorним vrijednostima pomoću baznih funkcija prema jednadžbama (29) – (31). Vektor pomaka bilo koje točke na pravocrtном konačnom elementu može se zbog pomaka kraja nosača s indeksom "k" napisati u matričnom obliku (17).

U izrazu (47) izvedene su bazne funkcije na pravocrtном konačnom elementu jedinične duljine koje ovise o učinku posmika d . Ako se u izraz (47) uvede supstitucija $d_p = 12d$, te supstitucija $\xi = x/l$, dobivaju se izrazi za bazne funkcije kojima su opisani pomaci na pravocrtном konačnom elementu duljine l .

Minimiziranjem funkcionala potencijalne energije za pravocrtни konačni element (48) dobiva se:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{u}} = + EA \int_x \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)' dx + kGA \int_x \left(\varphi(x) - \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right) \cdot \left(\varphi(x) - \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right)' dx + EI \int_x \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right)' dx. \quad (49)$$

Uzimajući u obzir (17) i bazne funkcije u obliku (47) pri proračunu vrijednosti iz izraza (49) i uvodeći supstituciju:

$$kGA = \frac{12EI}{l^2 d_p} \quad (50)$$

te na kraju supstitucijom $d_p = \Phi_y$ dobiva se matrica krutosti dvočvornoga pravocrtanoga konačnog elementa s trima stupnjevima slobode u svakom čvoru u sljedećem obliku:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -k_{11} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^2(\Phi_y + 1)} & \frac{6EI}{l^2(\Phi_y + 1)} & 0 & -k_{22} & k_{23} \\ & & \frac{EI(\Phi_y + 4)}{l(\Phi_y + 1)} & 0 & -k_{23} & \frac{EI(2 - \Phi_y)}{l(\Phi_y + 1)} \\ & & & k_{11} & 0 & 0 \\ & \text{simetrično} & & & k_{22} & -k_{23} \\ & & & & & k_{33} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Matrica krutosti za pravocrtни dvočvorni konačni element (51) bez negativnog je utjecaja učinka posmika. Identična matrica krutosti kao u izrazu (51) dobiva se i superpozicijom doprinosa posmika i doprinosa savijanja [19, 20].

6 Numerički primjeri

Na osnovi prikazanoga numeričkog algoritma izrađen je računalni program Trigoarch. Program je namijenjen statičkom proračuna zakrivljenih grednih nosača konstantne zakrivljenosti. Diskretizacija grednog nosača provodi se dvočvornim zakrivljenim grednim konačnim elementima s trima stupnjevima slobode u čvoru koji su opisani egzaktним algebarsko-trigonometrijskim baznim funkcijama.

Radi ilustracije prikazanoga numeričkog algoritma analizirani su neki jednostavni primjeri lukova s konstantnim polumjerom zakrivljenosti i jedan složen primjer zakrivljene konstrukcije. Svi primjeri numerički su obrađeni programom Trigoarch te su rješenja uspoređena s istim primjerima koji su obrađeni softverom Tower [17].

6.1 Numerički primjeri jednostavnih zakrivljenih konstrukcija

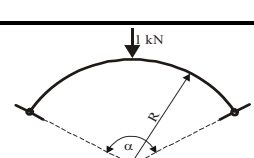
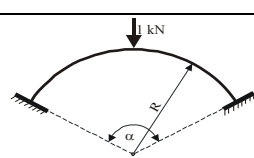
Analiziraju se zakrivljeni lučni nosači obostrano upeti ili zglobno oslonjeni, pravokutnoga poprečnog presjeka dimenzija 40/60 cm s polumjerom zakrivljenosti težišne linije $R = 4$ m i centralnim kutom $\alpha = 120^\circ$, Youngov modul iznosi $E = 30$ GPa, a Poissonov omjer $\nu = 0,17$.

Opterećenja luka su jedinične koncentrirane sile koje djeluju na sredini duljine nosača i kontinuirano hidrostatičko opterećenje kao što je prikazano u tablicama 1. i 2.

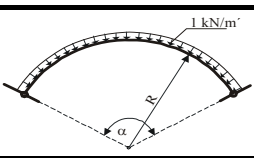
U tablicama 1. i 2. uspoređeni su rezultati za pomake lukova u različitim uvjetima opterećenja i oslanjanja koji su dobiveni programom Trigoarch te programom Tower [17] koji se u analizi koriste dvočvornim pravocrtnim grednim elementima.

Dobiveni vektori čvornih pomaka pri modeliranju konstrukcije sa zakrivljenim konačnim elementima imaju točne vrijednosti za minimalan broj konačnih elemenata ako se radi o opterećenju koncentriranim silama u čvorovima (tablica 1.), a za distribuirana se opterećenja broj konačnih elemenata povećava (tablica 2.) što je poslje-

Tablica 1. Numerički rezultati pomaka točke na sredini duljine luka opterećenog koncentriranim silama

	Pomaci središnje točke luka	Trigoarch (2 konačna elementa)				Tower			
		efekt smicanja d i efekt membrane e				Broj konačnih elemenata			
		$d \neq 0; e \neq 0$	$d = 0; e \neq 0$	$d \neq 0; e = 0$	$d = 0; e = 0$	4	8	16	32
y [mm]· 10^{-3}		-2.235	-2.133	-1.684	-1.463	-2.037	-2.283	-2.330	-2.35
x [mm]· 10^{-3}		2.415	2.321	2.061	1.967	1.599	2.191	2.358	2.403
φ [rad]· 10^{-6}		1.689	1.701	1.733	1.745	1.278	1.587	1.663	1.682
	y [mm]· 10^{-3}	-2.084	-1.847	-1.198	-0.944	-1.901	-2.050	-2.080	-2.090
x [mm]· 10^{-3}		1.049	0.951	0.774	0.648	0.842	0.994	1.047	1.051
φ [rad]· 10^{-6}		0.795	0.771	0.851	0.827	0.571	0.738	0.794	0.792

Tablica 2. Numerički rezultati pomaka točke na sredini duljine luka opterećenog hidrostatskim tlakom

	Pomaci središnje točke luka	Trigoarch ($d \neq 0; e \neq 0$)				Tower			
		Broj konačnih elemenata				Broj konačnih elemenata			
		2	4	8	16	4	8	16	32
y [mm]· 10^{-3}		-9.481	-6.632	-4.403	-3.697	-3.234	-3.400	-3.480	-3.490
y [mm]· 10^{-3}		-3.954	-3.954	-3.954	-3.954	-3.961	-3.892	-3.941	-3.951

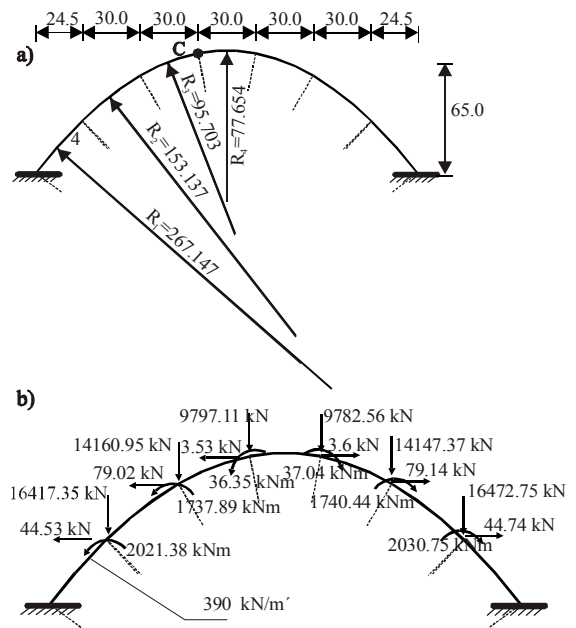
dica svođenja kontinuiranog opterećenja na konačnim elementima u ekvivalentne čvorne sile. Izjednačavajući vrijednosti pojedinih parametara d i e s nulom, prati se utjecaj učinka posmika i učinka membrane na numeričko rješenje opisano zakrivljenim konačnim elementima. Može se primijetiti da su vrijednosti pomaka središnje točke luka, ako se u proračunu zanemari učinak posmika d , neznatno manje od onih koje su dobivene ako se u proračun uzmu i učinak posmika d i učinak membrane e , dok se zanemarivanjem samo učinak posmika membrane e ili zanemarivanjem obaju učinaka ta razlika povećava.

Analizirajući rezultate proračuna koji se dobivaju različitim numeričkim modelima, može se zaključiti da se primjenom opisanih baznih funkcija znatno smanjuje potreban broj konačnih elemenata za modeliranje lučne konstrukcije uz znatno veću točnost. Treba napomenuti da se primjenom egzaktnih zakrivljenih konačnih elemenata za slučaj opterećenja koncentriranim djelovanjem u čvorovima dobivaju točna rješenja, što nije moguće postići pravocrtnim konačnim elementima.

6.2 Numerički model složene zakrivljene konstrukcije

Za ilustraciju funkcionalnosti numeričkog modeliranja lučnih konstrukcija pomoću egzaktnih zakrivljenih konačnih elemenata, odabrana je obostrano upeta lučna konstrukcija sastavljena od 7 lukova konstantnog polumjera zakrivljenosti (slika 9.a).

Luk je po cijeloj duljini uzet konstantnoga poprečnog presjeka i opterećen je koncentriranim silama na mjestima promjene polumjera zakrivljenosti te vlastitom težinom luka prema slici 9.b.



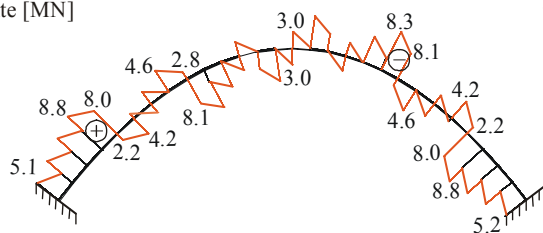
Slika 9. Opterećenje lučne konstrukcije

Opterećenje vlastitom težinom luka uzeto je kao linearno distribuirano opterećenje.

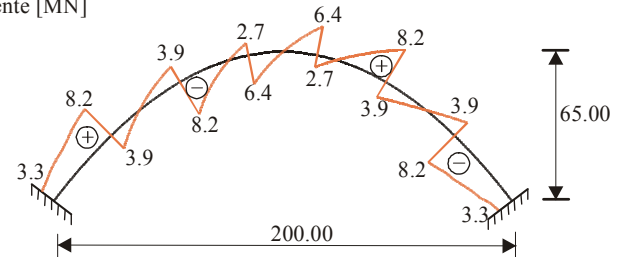
Konstrukcija luka najprije je modelirana sa 7 konačnih elemenata, za svaki različiti polumjer po jedan konačni element, što je za predloženi postupak dovoljno. Za svaki sljedeći korak broj konačnih elemenata se za proračun programom Tower udvostručavao dok se nije postiglo zadovoljavajuće numeričko rješenje. Za praćenje numeričkog rješenja promatrao se vertikalni pomak točke C (slika 9).

Na slici 10. prikazani su dijagrami unutrašnjih sila koji su dobiveni proračunom s pomoću programa Trigoarch i

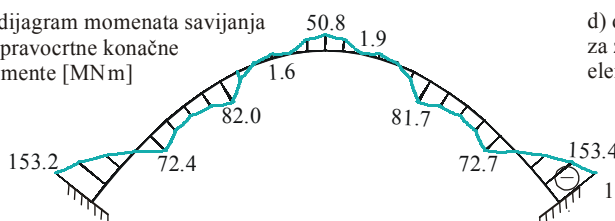
a) dijagram poprečnih sila za pravocrtne konačne elemente [MN]



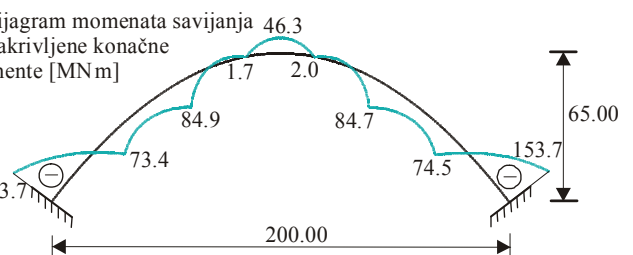
b) dijagram poprečnih sila za zakrivljene konačne elemente [MN]



c) dijagram momenata savijanja za pravocrtne konačne elemente [MNm]



d) dijagram momenata savijanja za zakrivljene konačne elemente [MNm]



Slika 10. Dijagrami unutrašnjih sila za opterećenje koncentriranim silama i vlastitom težinom luka

programa Tower. Treba napomenuti da modeliranje lučnog nosača konvencionalnim konačnim elementima rezultira odstupanjem i diskontinuitetom u dijagramima unutrašnjih sila na svim spojevima pojedinih konačnih elemenata, što je posebice izraženo u dijagramu poprečnih sila (slika 10.a).

Takva raspodjela unutarnjih sila ne odgovara stvarnom stanju u konstrukciji. Međutim, kao što se vidi na slici 10.b i 10.d, primjenom egzaktnih zakrivljenih konačnih elemenata dobile su se glatke krivulje za dijagrame unutrašnjih sila između koncentriranih djelovanja na konstrukciji. Ovo predstavlja bazni doprinos egzaktnih zakrivljenih elemenata pred ostalim konačnim elementima kojima se mogu modelirati lučne konstrukcije pod djelovanjem statičkog opterećenja.

7 Zaključak

Doprinos ovog rada numeričkoj analizi zakrivljenih grednih nosača sastoji se u stvaranju novoga numeričkog modela za njihov statički proračun koji se temelji na egzaktnim algebarsko-trigonometrijskim baznim funkcijama.

Na osnovi diferencijalnih jednadžbi ravnoteže i polja pomaka zakrivljenog elementa izvedene su egzaktne bazne funkcije za gredne elemente konstantne zakrivljenosti. Potom se na osnovi dobivenih baznih funkcija minimizacijom funkcionala potencijalne energije izvela

matrica krutosti zakrivljenoga konačnoga dvočvornog elementa sa 6 stupnjeva slobode. Izvedene bazne funkcije uključuju zajednički utjecaj savijanja, posmika i uzdužnih sila. Iako su bazne funkcije na kojima se temelji konačni element pretežno trigonometrijske, te zbog toga mogu izgledati složene, u konačnici se dobiva jednostavan numerički model koji potpuno eliminira nepovoljni utjecaj posmika i uzdužnih sila.

Egzaktni zakrivljeni konačni elementi daju točno numeričko rješenje za luk konstantne zakrivljenosti koji je opterećen u čvorovima što bitno pridonosi smanjivanju potrebnog broja elemenata u analizi. Istovremeno, potpunim isključivanjem negativnih uzdužnih i posmičnih učinaka postiže se točnije praćenje ponašanja lučnih nosača u različitim uvjetima opterećenja i oslanjanja.

U numeričkom je smislu egzaktni zakrivljeni konačni element za analizu lučnih konstrukcija ekvivalentan pravocrtnome dvočvornom konačnom elementu.

Zakrivljeni konačni elementi mogu se uspješno primijeniti u analizama lukova različite zakrivljenosti po duljini nosača kao kombinacija različitih elemenata konstantne zakrivljenosti, a također otvorena je mogućnost njihove primjene na probleme dinamike i stabilnosti.

Iz matrice zakrivljenoga konačnog elementa dobivena je odgovarajuća matrica za dvočvorni pravocrtni konačni element u koji je izravno uključen učinak posmika.

LITERATURA

- [1] Boreši, A. P.; Lynn, P. P.: *Elasticity in engineering mechanics*, Prentice-hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [2] Andelić, M.: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2005.
- [3] Simović, V.: *Građevna statika I*, Građevinski institut, Zagreb, 1988.
- [4] Pandin, N.; Appa Rao, TVSR; Satish, C.: *Studies on performance of curved beam finite elements for analysis of thin arches*, Computers & Structures, vol. 31, 1989, pp. 997-1002.
- [5] Stolarski, H.; Chiang, MYM.: *The mode-decomposition C^0 formulation of curved two-dimensional structural elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 28, 1989, p.p. 145-154.
- [6] Stolarski, H.; Belytscho, T.: *Shear and membrane locking in curved C^0 elements*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 41, 1983, p.p. 279-296.
- [7] Rakowski, J.: *The interpretation of the shear locking in beam element*, Computers & Structures, vol. 37, 1990, pp. 769-776.
- [8] Stolarski, H.; Belytscho, T.: *Membrane locking and reduced integration for curved elements*, Journal of Applied Mechanics, vol. 49, 1982, pp. 172-176.
- [9] Lee, P.G.; Sin, H.C.: *Locking-free curved beam element based on curvature*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, 1994, pp. 989-1007.
- [10] Sheikh, A.H.: *New concept to include shear deformation in a curved beam elements*, Journal of Structural Engineering, vol. 128, 2002, pp. 406-410.
- [11] Raveendranart, P.; Singh, G.; Pradhan, B.: *A two-noded locking-free shear flexible curved beam element*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 44, 1999, p.p. 265-280.
- [12] Heppler, G.R.; Hansen, J.S.: *Performance of trigonometric basis function finite elements in Timoshenko beams*, AIAA/ASME/ASCE/AHS 28th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Monterey, CA, 1987.
- [13] Heppler, G.R.; Hansen, J.S.: *Timoshenko beam finite element using trigonometric basis functions*, AIAA, Jnl 26, 1988, pp. 1378-1386.
- [14] Sinaie, B.; Mansouri, S.H.; Saffari, H.; Tabatabaei, R.: *A six-noded locking-free curved beam elements based on curvature*, Iranian Journal of Science and Tehnology, vol. 27, 2003, pp. 21-36.
- [15] Saffari, H.; Tabatabaei, R.: *A Finite circular arch element based on trigonometric shape functions*, Mathematical Problems in Engineering, 2007, Art. No. 78507.
- [16] Litewka, P.; Rakowski, J.: *The exact thick arch finite element*, Computers & Structures, vol. 68, 1998, pp. 369-379.
- [17] Tower 6 Radimpex Software
- [18] Sesartić, R.: *Doprinos numeričkoj analizi zakrivljenih grednih nosača*, magistarski rad, Sveučilište u Splitu Građevinsko – arhitektonski fakultet, Split, 2008.
- [19] Przemieniecki, J. S.: *Theory of the matrix structural analysis*, McGraw – Hill, New York, USA, 1968.
- [20] Gotovac, B.; Kozulić, V.; Čolak, I.: *Uvod u numeričko modeliranje prostornih konstrukcija*, Sveučilište u Mostaru, 2001.
- [21] Sesartić, R.; Kozulić, V.; Gotovac, B.: *The modeling of arch structures*, The International Scientific Simposium, Mostar, November 2008.