Dobro poznati zadaci s manje poznatim rješenjima

JEAN CARSTENSEN, ALIJA MUMINAGIĆ*

Sažetak. *U članku se nestandardnom tehnikom dokazuju tri poznate nejednakosti. Dokazi su prilagođeni učenicima završnih razreda srednje škole.*

Ključne riječi: *nejednakosti, slučajna varijabla, Stirlingova formula*

Well-known exercises with less known solutions

Abstract. *Three known inequalities are proved in the paper by using a non-standard technique. The proofs are adapted to high-school graduates.*

Key words: *inequalities, random variable, Stirling's formulae*

Zadatak 1. Dokažite da za realne brojeve $a, b, c > 0$ vrijedi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Rješenje. Množenjem nejednakosti (1) s $2(b+c)(c+a)(a+b)$ i nakon sređivanja dobivamo

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 - a^2c - ac^2 \geq 0. \tag{2}$$

Podijelimo li nejednakost (2) s $c^3 > 0$ dobivamo

$$\frac{2a^3}{c^3} + \frac{2b^3}{c^3} + 2 - \frac{a^2b}{c^3} - \frac{ab^2}{c^3} - \frac{b^2}{c^2} - \frac{b}{c} - \frac{a^2}{c^2} - \frac{a}{c} \geq 0. \tag{3}$$

Stavimo li $p := \frac{a}{c}$ i $r := \frac{b}{c}$ u prethodnu nejednakost (3) imamo

$$2p^3 + 2r^3 + 2 - p^2r - r^2p - p^2 - r^2 - p - r \geq 0,$$

odakle je

$$2\big((p+r)^3 - 3pr(p+r) + 1\big) - pr(p+r) - (p+r)^2 + 2pr - (p+r) \geq 0. \tag{4}$$

*Enighedsvej 58.1.th., 4800 Nykobing F, Denmark

Označimo s $x := p + r > 0$ te $y := p\,r > 0$. Uočimo da je $x^2 \geq 4y$. Zaista,

$$x^2 - 4y = (p+r)^2 - 4pr = p^2 + r^2 - 2pr = (p-r)^2 \geq 0.$$

Primijetimo da je (4) ekvivalentno s

$$2(x^3 - 3xy + 1) - xy - x^2 + 2y - x \geq 0,$$

odnosno s

$$y(2 - 7x) + 2x^3 - x^2 - x + 2 \geq 0.$$

Graf funkcije $f : \left[0, \frac{x^2}{4}\right] \to \mathbb{R}$ zadane formulom

$$f(y) = y(2 - 7x) + 2x^3 - x^2 - x + 2$$

je pravac, što znači da funkcija f postiže minimalnu vrijednost u krajnjim točkama intervala $[0, \frac{x^2}{4}]$. Za svaki $x > 0$ vrijede sljedeće dvije nejednakosti:

$$f(0) = 2(x+1)\left(x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) \geq 0$$

$$f\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+2) \geq 0,$$

odakle slijedi da je

$$y(2 - 7x) + 2x^3 - x^2 - x + 2 \geq 0.$$

Budući da je prethodna nejednakost ekvivalentna nejednakosti (1) slijedi tvrdnja koju je trebalo dokazati.

Zadatak 2. Dokažite da za realne brojeve $a, b, c > 0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c. \tag{5}$$

Rješenje. Neka je X slučajna varijabla čije su vrijednosti $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ i $\frac{1}{c}$, a odgovarajuće vjerojatnosti $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{3}$. Označimo s $E(X)$ i $D(X)$ očekivanje i varijancu slučajne varijable X. Poznato je da vrijedi $D(X) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0$. Primijenimo li prethodnu nejednakost specijalno na našu slučajnu varijablu X dobivamo

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c}\right)^2,$$

što je ekvivalentno s nejednakosti (5).

Zadatak 3. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} > \frac{1}{15}. \tag{6}$$

Rješenje. Primijetimo da je

$$P = \frac{100!}{2^{100} \cdot (50!)^2}. \tag{7}$$

Primijenimo poznatu Stirlingovu formulu

$$\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}n^n < n! < \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}n^n e^{\frac{1}{12n}},$$

najprije za $n = 100$, a nakon toga za $n = 50$ dobivamo da je

$$100! > \frac{\sqrt{200\pi}}{e^{100}} \cdot 100^{100} \tag{8}$$

te

$$50! < \frac{\sqrt{100\pi}}{e^{50}} 50^{50} e^{\frac{1}{600}} \tag{9}$$

Redom iz (7), (8) i (9) imamo

$$P = \frac{100!}{2^{100} \cdot (50!)^2} > \frac{\sqrt{200\pi} \cdot 100^{100} \cdot e^{100} \cdot e^{-\frac{1}{300}}}{2^{100} \cdot e^{100} \cdot 100\pi \cdot 50^{100}} > \frac{\sqrt{200\pi}}{100\pi}\left(1 - \frac{1}{300}\right) > \frac{1}{15}.$$