Više dokaza jedne poznate trigonometrijske nejednakosti u trokutu

Šefket Arslanagić* Alija Muminagić†

Sažetak. *U radu se navodi nekoliko različitih dokaza jedne poznate trigonometrijske nejednakosti u trokutu. Dokazi su prilagođeni učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *trigonometrija, nejednakosti*

Several proofs of well known trigonometric inequality in triangle

Abstract. *Several proofs of well known trigonometric inequality are given. These proofs are adapted for high school students.*

Key words: *trigonometry, inequality*

Dokazivanje nejednakosti u matematici je jako zanimljiv i kreativan posao. Pri tome dolaze do izražaja razne ideje koje često dovode do rezultata. Naravno, onaj koji hoće to realizirati mora biti solidno educiran iz raznih područja matematike te diferencijalnog računa.

U ovom članku upravo ćemo se baviti raznim dokazima jedne poznate trigonometrijske nejednakosti koja često ima primjenu kod dokazivanja drugih nejednakosti. Riječ je o sljedećoj trigonometrijskoj nejednakosti u trokutu:

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 1, \tag{1}$$

gdje su α, β i γ unutarnji kutovi trokuta.

Kod dokaza ove nejednakosti koristit ćemo neke druge poznate jednakosti i nejednakosti čiji se dokazi mogu naći u [1], [2] i [3]. To su ove jednakosti i nejednakosti koje vrijede za trokut:

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}tg\,\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=1, \tag{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{4R+r}{2R}, \tag{3}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R}, \tag{4}$$

*Prirodno-matematiki fakultet, Zmaja od Bosne 33-35, Sarajevo, Bosna i Hercegovina
†Enighedsuej 58.1.th., 4800 Nykøbing F., Danska

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{4R+r}{s}, \tag{5}$$

$$R \geq 2r \text{ (Eulerova nejednakost)}, \tag{6}$$

$$4R+r \geq s\sqrt{3}, \tag{7}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}, \tag{8}$$

gdje su r i R polumjeri upisane i opisane kružnice trokutu, s je poluopseg trokuta.

Dokaz 1. Stavimo li da je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=x$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=y$ i $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=z$, jednakost (2) postaje

$$xy+yz+zx=1. \tag{9}$$

Sada iz očigledne nejednakosti

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left(xy+yz+zx\right)=(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \geq 0$$

i jednakosti (9) slijedi:

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)-2 \geq 0, \quad \text{tj.}$$

$$x^2+y^2+z^2 \geq 1,$$

odnosno

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geq 1,$$

a ovo je nejednakost (1) koju je trebalo dokazati. □

Primijetimo da jednakost u (1) vrijedi onda i samo onda ako je $x=y=z$, tj. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, a odavde $\alpha=\beta=\gamma$, odnosno onda i samo onda ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz 2. Iz jednakosti (2) primjenom nejednakosti Cauchy-Buniakowsky-Schwartz dobivamo

$$\begin{aligned}
1 &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\\
&\leq \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}\\
&= tg^{\,2}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

□

Ovo je jedan jako kratak i elegantan dokaz za koga je potrebno znati samo nejednakost Cauchy-Buniakowsky-Schwartz za $n=3$, a koja glasi:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2),$$

gdje su $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 \in \mathbb{R}$.

Dokaz 3. Neka je

$$M=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}.$$

Kako je $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{2}{1+\cos x}-1$, to je:

$$M=2\left(\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1+\cos\beta}+\frac{1}{1+\cos\gamma}\right)-3. \tag{10}$$

Stavimo da je $x=1+\cos\alpha$, $y=1+\cos\beta$, $z=1+\cos\gamma$; $(x,y,z>0)$.
Aritmetička sredina tih brojeva je

$$A_3=\frac{x+y+z}{3}=\frac{1}{3}(3+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\overset{(4)}{=}\frac{1}{3}\left(3+1+\frac{r}{R}\right)\overset{(6)}{\leq}\frac{3}{2}. \tag{11}$$

Harmonijska sredina tih brojeva je

$$H_3=\frac{3}{\dfrac{1}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1}{1+\cos\beta}+\dfrac{1}{1+\cos\gamma}},$$

a odavde

$$\frac{1}{H_3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1+\cos\beta}+\frac{1}{1+\cos\gamma}\right)\overset{(10)}{=}\frac{1}{3}\cdot\frac{M+3}{2},$$

te

$$H_3=\frac{6}{M+3}. \tag{12}$$

Kako je $H_3\leq A_3$, to iz (12) i (11) dobivamo:

$$\frac{6}{M+3}\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow M+3\geq 4\Leftrightarrow\ M\geq 1.$$

□

Dokaz 4. Neka je

$$M=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}.$$

Kako je $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$, to je:

$$\begin{aligned}
M &= \left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)^2\\
&= \frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}+\frac{(1-\cos\beta)^2}{\sin^2\beta}+\frac{(1-\cos\gamma)^2}{\sin^2\gamma}\\
&\geq (1-\cos\alpha)^2+(1-\cos\beta)^2+(1-\cos\gamma)^2\\
&= 3+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\\
&\overset{(4)}{=} 3+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1+2\cos^2\frac{\beta}{2}-1+2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1-2\left(1+\frac{r}{R}\right)\\
&= 2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)-2-\frac{2r}{R}\\
&\overset{(3)}{=} 2\cdot\frac{4R+r}{2R}-2-\frac{2r}{R}=\frac{2R-r}{R}=2-\frac{r}{R}\overset{(6)}{\geq}1,\quad \text{tj.}\\
M &\geq 1.
\end{aligned}$$

□

Dokaz 5. Neka su $A = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}$ i $B = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$. Sada dobivamo:

$$B^2 = A + 2\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

tj. zbog (2):

$$B^2 = A + 2,$$

a odavde zbog (8):

$$A = B^2 - 2 \overset{(8)}{\geq} \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 = 1.$$

□

Dokaz 6. Imamo zbog (2):

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2 - 2, \quad \text{tj.}$$

na osnovu (5) i (7):

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \left(\frac{4R+r}{s}\right)^2 - 2 \overset{(7)}{\geq} \left(\frac{s\sqrt{3}}{s}\right)^2 - 2 = 3 - 2 = 1.$$

□

Dokaz 7. Za ovaj dokaz koristit ćemo Jensenovu nejednakost ([2]). Promatrat ćemo funkciju

$$f(x) = \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}; \quad x \in (0, \pi).$$

Imamo

$$f'(x) = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}},$$

te

$$f''(x) = \frac{\cos^2\frac{x}{2} + 3\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^4\frac{x}{2}} > 0 \quad \text{za sve} \quad x \in (0, \pi).$$

Dakle, dana funkcija $f(x) = \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}$ je konveksna za $x \in (0, \pi)$, pa na osnovi Jensenove nejednakosti za $n = 3$ imamo:

$$\frac{1}{3}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right] \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right),$$

a odavde uzimajući da je $x_1 = \frac{\alpha}{2}$, $x_2 = \frac{\beta}{2}$ i $x_3 = \frac{\gamma}{2}$ dobivamo

$$\frac{1}{3}\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right) \geq \mathrm{tg}^2\left(\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3}\right),$$

tj.

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 3\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right),$$

odnosno zbog $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ imamo

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6},\quad \text{tj.}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1.$$

□

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] O. Bottema, and oth., *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[4] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[5] A. Muminagić, *Bobillierova formula*, Osječka matematička škola **4**(2004) br. 2.