STUDENTSKA RUBRIKA

p-norme na $\mathbb{R}^2$, kružnice S_p i brojevi π_p

LJILJANA ARAMBAŠIĆ* IVONA ZAVIŠIĆ†

Sažetak. *Omjer opsega i promjera kružnice je konstantan i jednak je broju* $\pi = 3.14159....$ *Pritom podrazumijevamo da smo opseg i promjer kružnice računali s obzirom na uobičajenu euklidsku metriku. Umjesto nje, možemo promatrati i neke druge metrike na* $\mathbb{R}^2$. *Promatramo li metrike* d_p*, inducirane* p*-normama, omjer opsega i promjera će i dalje biti konstantan, no njegova vrijednost će se promijeniti. U ovom radu razmatramo* p*-norme i metrike* d_p *na* $\mathbb{R}^2$*, te kružnice* S_p *i brojeve* π_p *s obzirom na ove* p*-norme.*

Ključne riječi: *norma,* p*-norma, metrika, kružnica, broj* π

p-norms on $\mathbb{R}^2$, S_p circles and π_p numbers

Abstract. *The ratio of the circumference of a circle to its diameter is constant and its value is the number* $\pi = 3.14159....$ *Here we understand that the circumference and the diameter are calculated with respect to the usual euclidean metric. Instead, we can equip* $\mathbb{R}^2$ *with some other metric. Choosing the metric* d_p*, induced by the* p*-norm, the ratio of the circumference to the diameter will also be constant, but its value will be changed. In this paper we discuss* p*-norms and metrics* d_p*, the circles* S_p *and the numbers* π_p *with respect to these norms.*

Key words: *norm,* p*-norm, metric, sphere, number* π

1. Uvod

Norme na $\mathbb{R}^2$ su realne funkcije na $\mathbb{R}^2$ koje posjeduju određena svojstva. Važnu klasu takvih funkcija čine p-norme o kojima diskutiramo u ovom radu. p-norme možemo definirati za svaki realan broj $p \geq 1$, te za $p = \infty$. Pritom je 2-norma upravo standardna euklidska norma, 1-norma je poznata pod nazivom "taxicab" norma, a ∞-normu obično nazivamo max-norma. Neke relacije među ovim normama dokazujemo u teoremu 2 i propoziciji 3.

Kako svaka norma definira udaljenost (metriku), uvođenjem p-normi dobili smo razne načine za računanje udaljenosti između dviju točaka. Budući da je kružnica skup točaka koje su jednako udaljene od neke fiksne točke, to će njen oblik ovisiti o

*PMF-Matematički odjel, Bijenička cesta 30, Zagreb, e-mail: `arambas@math.hr`
†Nadbiskupska klasična gimnazija, Voćarska 106, Zagreb, e-mail: `izavisic@nkg-zagreb.hr`

normi u kojoj računamo, pa će, na primjer, kružnice s obzirom na 1-normu i max-normu imati oblik kvadrata. Kao i u euklidskoj geometriji, omjer opsega i promjera kružnice bit će konstantan u svim p-normama. Taj omjer, kojeg označavamo s π_p, generalizira broj π i u posljednje vrijeme je proučavan u mnogim radovima ([2, 3, 4]).

2. p-norme

Navedimo prvo preciznu definiciju norme.

Definicija 1. *Realna funkcija* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *naziva se* norma na $\mathbb{R}^2$ *ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $\|(x,y)\| \geq 0$,
2. $\|(x,y)\| = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$,
3. $\|(x,y) + (u,v)\| \leq \|(x,y)\| + \|(u,v)\|$,
4. $\|c(x,y)\| = |c|\|(x,y)\|$,

za sve $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$ *i sve* $c \in \mathbb{R}$. *Zadajući neku normu na* $\mathbb{R}^2$*,* $\mathbb{R}^2$ *postaje* normirani prostor.

Svima dobro poznati primjer norme na $\mathbb{R}^2$ je euklidska norma koja predstavlja duljinu dužine čije su krajnje točke $(0,0)$ i (x,y), tj.

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Ova norma je poseban slučaj p-normi.

Definicija 2. *Za svaki realni broj* p*,* $p \geq 1$*, definiramo*

$$\|(x,y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Funkciju $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *nazivamo* p-normom *na* $\mathbb{R}^2$*.*

Da se zaista radi o normama znat ćemo nakon što provjerimo da ove funkcije zadovoljavaju uvjete (1)-(4) iz definicije norme. Svojstva (1), (2) i (4) se lako provjere, dok je provjera trećeg svojstva, poznatog kao *nejednakost trokuta*, nešto teža. Tu ćemo koristiti Youngovu nejednakost: za sve $a,b \geq 0$ i $p,q > 1$ takve da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ vrijedi

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2}$$

Dokaz ove nejednakosti izostavljamo, a može se pronaći u [5], str. 78.

Teorem 1. *Za svaki* $p \geq 1$ *formulom* (1) *definirana je norma na* $\mathbb{R}^2$.

Dokaz. Kako smo već spomenuli, jedino što je ostalo za dokazati je da za svaki $p \geq 1$ vrijedi

$$\|(x,y)+(u,v)\|_p \leq \|(x,y)\|_p + \|(u,v)\|_p,$$

odnosno,

$$(|x+u|^p + |y+v|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} + (|u|^p + |v|^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{3}$$

za sve $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Neka je $p = 1$. Iz $|x+u| \leq |x| + |u|$ i $|y+v| \leq |y| + |v|$ slijedi $|x+u| + |y+v| \leq |x| + |y| + |u| + |v|$, što je točno (3) za $p = 1$.

Neka je sada $p > 1$. U (2) ćemo uvrstiti specijalne izraze za a i b : prvo uzmemo $a = \frac{|x|}{\|(x,y)\|_p}$ i $b = \frac{|u|}{\|(u,v)\|_q}$, a onda $a = \frac{|y|}{\|(x,y)\|_p}$ i $b = \frac{|v|}{\|(u,v)\|_q}$. Tako dobivamo sljedeće dvije nejednakosti

$$\frac{|x|}{\|(x,y)\|_p}\frac{|u|}{\|(u,v)\|_q} \leq \frac{|x|^p}{p(\|(x,y)\|_p)^p} + \frac{|u|^q}{q(\|(u,v)\|_q)^q},$$

$$\frac{|y|}{\|(x,y)\|_p}\frac{|v|}{\|(u,v)\|_q} \leq \frac{|y|^p}{p(\|(x,y)\|_p)^p} + \frac{|v|^q}{q(\|(u,v)\|_q)^q}.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti slijedi

$$\frac{|x||u| + |y||v|}{\|(x,y)\|_p\|(u,v)\|_q} \leq \frac{|x|^p + |y|^p}{p(\|(x,y)\|_p)^p} + \frac{|u|^q + |v|^q}{q(\|(u,v)\|_q)^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

to jest,

$$|x||u| + |y||v| \leq (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}(|u|^q + |v|^q)^{\frac{1}{q}}, \tag{4}$$

za sve $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Posebno, uzmemo li $(x+u)^{p-1}$ za u, $(y+v)^{p-1}$ za v u (4), te uvažavajući $(p-1)q = p$, dobivamo

$$|x||x+u|^{p-1} + |y||y+v|^{p-1} \leq (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}(|x+u|^p + |y+v|^p)^{\frac{1}{q}}. \tag{5}$$

Zamjenom uloga x i u, te y i v u (5) dobivamo

$$|u||x+u|^{p-1} + |v||y+v|^{p-1} \leq (|u|^p + |v|^p)^{\frac{1}{p}}(|x+u|^p + |y+v|^p)^{\frac{1}{q}}. \tag{6}$$

Konačno, imamo

$$\begin{aligned}
|x+u|^p + |y+v|^p &= |x+u||x+u|^{p-1} + |y+v||y+v|^{p-1}\\
&\leq (|x| + |u|)|x+u|^{p-1} + (|y| + |v|)|y+v|^{p-1}\\
&= (|x||x+u|^{p-1} + |y||y+v|^{p-1})\\
&\quad + (|u||x+u|^{p-1} + |v||y+v|^{p-1})\\
\text{(prema (5) i (6))} \quad &\leq (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}(|x+u|^p + |y+v|^p)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad + (|u|^p + |v|^p)^{\frac{1}{p}}(|x+u|^p + |y+v|^p)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

dakle,

$$|x+u|^p + |y+v|^p \leq \left((|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} + (|u|^p + |v|^p)^{\frac{1}{p}}\right)(|x+u|^p + |y+v|^p)^{\frac{1}{q}},$$

pa dijeljenjem s drugim faktorom s desne strane slijedi (3). □

Još jedna norma na $\mathbb{R}^2$ koja se često koristi je *max-norma*, a definirana je kao

$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{7}$$

Max-normu smatramo posebnim slučajem p-normi, za $p = \infty$, a razlog za to opisujemo u sljedećoj tvrdnji.

Teorem 2. *Formulom* (7) *definirana je norma na* $\mathbb{R}^2$ *i za nju vrijedi*

$$\lim_{p\to\infty}\|(x,y)\|_p=\|(x,y)\|_\infty,\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{8}$$

Dokaz. Svojstva (1)-(4) iz definicije norme se lako provjere. Provjerimo formulu (8). Za $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ imamo

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty}\|(x,y)\|_p &= \lim_{p\to\infty}(|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}}\\ &= \begin{cases}\lim_{p\to\infty}|x|\left(1+\left|\frac{y}{x}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{ako je } |x|>|y|;\\ \lim_{p\to\infty}|x|\cdot 2^{\frac{1}{p}}, & \text{ako je } |x|=|y|;\\ \lim_{p\to\infty}|y|\left(\left|\frac{x}{y}\right|^p+1\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{ako je } |x|<|y|.\end{cases}\end{aligned}$$

Pokažimo da u svakom od navedenih slučajeva dobivamo $\|(x,y)\|_\infty$.

Neka je $|x|>|y|$. Tada je $\|(x,y)\|_\infty=|x|$. Nadalje, $\left|\frac{y}{x}\right|<1$ pa je $\lim_{p\to\infty}\left|\frac{y}{x}\right|^p=0$ i zato $\lim_{p\to\infty}|x|\left(1+\left|\frac{y}{x}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|x|=\|(x,y)\|_\infty$.

Neka je $|x|=|y|$. Tada je $\|(x,y)\|_\infty=|x|=|y|$, pa je $\lim_{p\to\infty}|x|2^{\frac{1}{p}}=|x|\lim_{p\to\infty}2^{\frac{1}{p}}=|x|=\|(x,y)\|_\infty$.

Ako je $|x|<|y|$, tada je $\lim_{p\to\infty}|y|\left(\left|\frac{x}{y}\right|^p+1\right)^{\frac{1}{p}}=|y|=\|(x,y)\|_\infty$. □

Neka su $T_1=(x_1,y_1)$ i $T_2=(x_2,y_2)$ neke dvije točke ravnine. Udaljenost između T_1 i T_2 s obzirom na normu $\|\cdot\|$ računa se kao

$$d(T_1,T_2)=\|(x_1-x_2,y_1-y_2)\|.$$

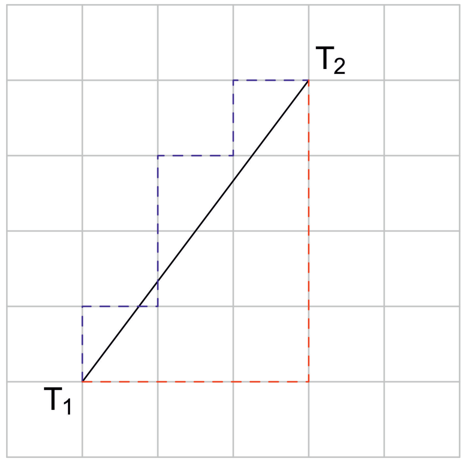
Funkciju d nazivamo *udaljenošću* ili *metrikom* induciranom normom $\|\cdot\|$. Prema tome, udaljenost s obzirom na p-normu dana je sa

$$d_p(T_1,T_2)=(|x_1-x_2|^p+|y_1-y_2|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{9}$$

Tako je, na primjer, za $T_1=(2,-3)$ i $T_2=(5,1)$

$$\begin{aligned}d_1(T_1,T_2) &= |2-5|+|-3-1|=7,\\ d_2(T_1,T_2) &= \sqrt{|2-5|^2+|-3-1|^2}=5,\\ d_\infty(T_1,T_2) &= \max\{|2-5|,|-3-1|\}=4.\end{aligned}$$

Ako nacrtamo točke T_1 i T_2 u koordinatnom sustavu, tada je euklidska udaljenost $d_2(T_1,T_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ jednaka duljini dužine $\overline{T_1T_2}$, dok je $d_1(T_1,T_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ duljina iscrtkanih putova od T_1 do T_2. Uočimo da samo jedan put od T_1 do T_2 ima duljinu $d_2(T_1,T_2)$ i to je najkraći put između ove dvije točke, dok putova od T_1 do T_2 koji imaju duljinu $d_1(T_1,T_2)$ ima više.



Iako smo naviknuti udaljenost između dviju točaka računati kao duljinu najkraćeg puta, ponekad nam je korisniji neki drugi način računanja udaljenosti. Na primjer, pretpostavimo da ulice u nekom gradu čine jednu pravokutnu mrežu. Želimo li doći od jednog do drugog mjesta u gradu, tj. od točke $T_1 = (x_1, y_1)$ do $T_2 = (x_2, y_2)$, onda će udaljenost koju ćemo prijeći biti duljina najkraćeg puta *koji prolazi zadanim ulicama* (što je upravo $d_1(T_1, T_2)$), a ne "zračna udaljenost" $d_2(T_1, T_2)$ između ovih točaka. Sada je jasno zašto se $\| \cdot \|_1$ često naziva "taxicab"-norma, a ponekad i Manhattan norma. Više detalja o ovim normama zainteresirani čitatelji mogu pronaći u [8].

3. Kružnice u p-normama i brojevi π_p

Kružnica je definirana kao skup točaka ravnine koje su od jedne fiksne točke (središta) udaljene za konstantnu vrijednost (radijus). S ovim pojmom susreli smo se još u osnovnoj školi, a udaljenost smo računali pomoću d_2. Za definiranje pojma kružnice možemo, umjesto metrike d_2, uzeti neku drugu metriku d. Prema tome, skup

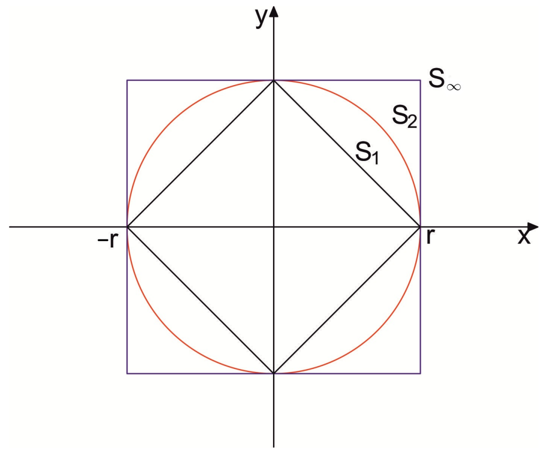
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), (x_0, y_0)) = r\}$$

predstavlja kružnicu radijusa r sa središtem u (x_0, y_0) s obzirom na metriku d. Primjerice, kružnica radijusa r sa središtem u ishodištu s obzirom na d_p je skup

$$S_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p = r^p\}, \quad p \geq 1.$$

Ponekad ćemo reći i da je S_p kružnica s obzirom na normu $\| \cdot \|_p$.

Na sljedećoj slici prikazane su kružnice S_1, S_2 i S_∞.



Kada bismo nacrtali i ostale kružnice S_p, sve bi one bile smještene između S_1 i S_∞, i što bi p bio veći, to bi kružnica S_p bila bliže kružnici S_∞. To nam je jasno i iz teorema 2.

Uzmimo da je sada $r = 1$. Neka je $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0)$. Tada točka $\frac{1}{\|(x,y)\|_1}(x, y)$ leži na kružnici S_1 (jer je $\|\frac{1}{\|(x,y)\|_1}(x, y)\|_1 = 1$). Iz slike je vidljivo da kružnica S_1 leži unutar kružnice S_2, te je stoga točka $\frac{1}{\|(x,y)\|_1}(x, y)$ unutar kružnice S_2 i zato je $\|\frac{1}{\|(x,y)\|_1}(x, y)\|_2 \leq 1$. Prema tome, $\|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_1$. Ako bismo nacrtali kružnicu $\sqrt{2}S_1$ (kružnica radijusa $\sqrt{2}$, s obzirom na metriku d_1), onda bi kružnica S_2 bila smještena unutar nje. Isti račun kao maloprije daje $\|(x, y)\|_1 \leq \sqrt{2}\|(x, y)\|_2$. Dakle, vrijedi

$$\|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_1 \leq \sqrt{2}\|(x, y)\|_2.$$

Relacije ovog tipa vrijede za svake dvije p-norme, kao što navodimo u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3. *Za sve $p, q \geq 1$ vrijede sljedeće relacije*

$$\|(x, y)\|_\infty \leq \|(x, y)\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}}\|(x, y)\|_\infty, \tag{10}$$

$$2^{-\frac{1}{q}}\|(x, y)\|_q \leq \|(x, y)\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}}\|(x, y)\|_q. \tag{11}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $|x| \geq |y|$. Tada je

$$\|(x, y)\|_\infty = |x| = (|x|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} = \|(x, y)\|_p.$$

Slično se pokaže da ova nejednakost vrijedi i u slučaju $|x| < |y|$. S druge strane, $|x| \leq \|(x, y)\|_\infty$ i $|y| \leq \|(x, y)\|_\infty$ daju $|x|^p + |y|^p \leq 2\|(x, y)\|_\infty^p$, pa je i desna strana nejednakosti (10) dokazana.

Nejednakost (11) slijedi iz (10):

$$\|(x, y)\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}}\|(x, y)\|_\infty \leq 2^{\frac{1}{p}}\|(x, y)\|_q,$$

a zamjenom $p \leftrightarrow q$ dobivamo $\|(x,y)\|_q \leq 2^{\frac{1}{q}} \|(x,y)\|_p$, tj.

$$2^{-\frac{1}{q}} \|(x,y)\|_q \leq \|(x,y)\|_p.$$

□

Vidljivo je da geometrijski oblik kružnice ovisi o odabranoj metrici. Izračunajmo opsege O_p kružnica S_p. Poznato je da je opseg kružnice S_2 jednak $2r\pi$, dakle $O_2 = 2r\pi$. Nadalje,

$$O_1 = 4 \cdot d_1((r,0),(0,r)) = 4(|r-0| + |0-r|) = 8r,$$

$$O_\infty = 4 \cdot d_\infty((r,-r),(r,r)) = 4 \max\{|r-r|, |-r-r|\} = 8r.$$

Uočimo da se u opsezima O_1 i O_∞ broj π ne pojavljuje.

Općenito, za $p \neq \infty$, opseg O_p kružnice S_p računamo pomoću integrala. Neka je $\mathbf{c}_p$ ona četvrtina kružnice S_p koja pripada prvom kvadrantu. Tada je $O_p = 4\int_{\mathbf{c}_p} ds_p$, gdje je ds_p element duljine. S obzirom da računamo u p-normi, to će element duljine biti

$$ds_p = (|dx|^p + |dy|^p)^{\frac{1}{p}} = (|x'(t)|^p + |y'(t)|^p)^{\frac{1}{p}}\, dt. \tag{12}$$

Uočimo da u slučaju $p = 2$ dobivamo uobičajenu formulu za element duljine $ds_2 = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ ([1], str. 209). Za parametrizaciju krivulje $\mathbf{c}_p$ uzmimo

$$x(t) = rt^{\frac{1}{p}}, \quad y(t) = r(1-t)^{\frac{1}{p}}, \quad t \in [0,1],$$

pa onda imamo

$$ds_p = \frac{r}{p}\left(t^{1-p} + (1-t)^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

Prema tome, za $p \neq \infty$ je

$$O_p = \frac{4r}{p} \int_0^1 \left(t^{1-p} + (1-t)^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

Kako su nam iznosi za O_1 i O_2 poznati, gornju formulu možemo provjeriti tako što ćemo uvrstiti $p = 1$ i $p = 2$. Za $p = 1$ je $O_1 = 4r\int_0^1 2dt = 8r$, dok za $p = 2$ imamo

$$\begin{aligned}
O_2 &= 2r\int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}} dt = 2r\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t-t^2}} dt \\
&= 2r\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (t-\frac{1}{2})^2}} dt = 2r\arcsin(2t-1)\Big|_0^1 \\
&= 2r(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = 2r\pi.
\end{aligned}$$

Za svaki p omjer $\frac{O_p}{2r}$ opsega O_p i promjera $2r$ kružnice je konstantan. Taj omjer označavamo s π_p i on iznosi

$$\pi_p = \frac{2}{p} \int_0^1 \left(t^{1-p} + (1-t)^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

Očito je $\pi_1 = 4, \pi_2 = \pi, \pi_\infty = 4$. U radovima [2] i [3] diskutirane su različite aproksimacije za brojeve π_p, pa je, na primjer, dobiveno da je $\pi_{1.1} = \pi_{11} \approx 3.757, \pi_{1.5} = \pi_3 \approx 3.259$, ... Štoviše, u [2] je dokazano da je $\pi_2 = \min\{\pi_p : p \in [1, \infty]\}$.

Na kraju istaknimo da u nekim situacijama nema bitne razlike s kojom od ovih normi radimo. Tako se, koristeći relacije (10) i (11), može dokazati da za $p, q \in [1, \infty]$ vrijedi da je neki skup ograničen u $\|\cdot\|_p$ ako i samo ako je ograničen u $\|\cdot\|_q$, da niz konvergira u $\|\cdot\|_p$ ako i samo ako konvergira u $\|\cdot\|_q$, itd. Napomenimo još da se, za svaki $n \in \mathbb{N}$, na prostoru $\mathbb{R}^n$ mogu promatrati p-norme definirane kao

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

Mi smo se u ovom radu ograničili na prostor $\mathbb{R}^2$ zbog jednostavnijeg računa i boljeg zora.

4. Zahvala

Autorice se zahvaljuju recenzentu na korisnim sugestijama koje su pridonijele poboljšanju članka.

Literatura

[1] B. Apsen, *Repetitorij više matematike 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[2] C. L. Adler, J. Tanton, *π is the minimum value for Pi*, The College Mathematics Journal **31**(2000), 102–106.

[3] J. Duncan, D. Luecking, C. McGregor, *On the values of Pi for norms on* $\mathbb{R}^2$, The College Mathematics Journal **35**(2004), 84–92.

[4] R. Euler, J. Sadek, *The π's go full circle*, Mathematics Magazine **72**(1999), 59–63.

[5] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza - Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[6] I. Zavišić, *Prostori ℓ_p*, diplomski rad, PMF - Matematički odjel, 2009.

[7] `http://en.wikipedia.org/wiki/Pi`, 30.10.2010.

[8] E.F. Krause, *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications, Inc., New York, NY, 1986.