math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Matematičko modeliranje konflikta - Richardsonov model

obične diferencijalne jednadžbe

Zlatko Matijašević
student na PMF-Matematičkom odjelu

Igor Pažanin
PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
igor.pazanin@math.hr

Sažetak

U ovom radu prezentiramo matematički model koji opisuje mogući konflikt između dviju država/saveza s pomoću jednostavnog sustava običnih diferencijalnih jednadžbi. Koristeći se osnovnim pojmovima i rezultatima teorije stabilnosti, analiziramo izvedeni model i diskutiramo njegovu valjanost na temelju stvarnih događanja uoči Prvog svjetskog rata.

1 Uvod

Budući da je derivacija mjera promjene, diferencijalnim se jednadžbama najjednostavnije izražavaju i modeliraju mnogi prirodni zakoni te razni procesi u različitim područjima znanosti i tehnike (v. npr. [1, 2]). U ovom radu proučavat ćemo matematički model kojem je cilj opisati odnos dviju država, pri čemu je svaka od njih odlučna braniti se u slučaju agresije druge. Model je zasnovan na jednostavnom, linearnom sustavu običnih diferencijalnih jednadžbi te je prvi put prikazan u članku[1]:
Richardson, L. F., *Generalized foreign politics: a study in group psychology*, British Journal of Psychology, Monograph Supplements no.23 (1939).
Ovaj rad napisan je prema pregledu spomenutog članka koji nalazimo u [4] (odjeljak 4.5.1).
Premda jednostavan, Richardsonov model predstavlja vrlo uspio pokušaj da se formalno, matematički, analizira sukob dviju strana i dođe do spoznaja o uzrocima njegova izbijanja. Upravo su uzroci koji dovode do rata ili eskalacije konflikta bili predmet mnogobrojnih rasprava tijekom povijesti. Prisjetimo se jedne vezane uz Prvi svjetski rat. Sir Edward Grey, ministar vanjskih poslova Velike Britanije, govorio je u to vrijeme: *Povećanje naoružanja koje ima za cilj osnažiti osjećaj moći i sigurnosti jedne nacije, zapravo uopće ne postiže taj efekt. Posve suprotno, ono izaziva strah te uzrokuje jačanje osjećaja snage drugih nacija. Enormni porast naoružanja u Europi - to je ono što je učinilo ovaj veliki rat neizbježnim.* S druge strane, L. S. Amery, član Donjeg doma britanskog Parlamenta u svom govoru 1930. replicira: *Uz dužno poštovanje prema preminulom državniku, porast naoružanja samo je simptom sukoba ambicija i teritorijalnih pretenzija onih nacionalističkih sila koje su htjele rat. Rat je započeo iz jednostavnog*

razloga. Zato što su Srbija, Italija i Rumunjska željele integrirati u svoj sastav teritorije koji su u to vrijeme pripadali austrijskom carstvu i kojih se ono nije bilo spremno odreći bez borbe. Važno je napomenuti da Richardsonov model, koji ćemo izvesti u idućem poglavlju, uzima u obzir obje teorije kao uzroke konflikta.

2 Izvod modela

Označimo s $x = x(t)$ ratni potencijal, tj. razinu naoružanja države X u trenutku t (mjereno u godinama), a s $y = y(t)$ razinu naoružanja države Y. Osnovna pretpostavka modela jest da funkcija $t \mapsto x(t)$ zadovoljava zakon prema kojem njezina brzina promjene ovisi o sljedeća tri čimbenika:

(1) animozitetu kojeg Država X gaji prema Državi Y,
(2) razini naoružanja $y(t)$ države Y,
(3) troškovima naoružavanja države X.

U najjednostavnijem slučaju, prva dva čimbenika moguće je opisati izrazima g i $ky(t)$ respektivno, pri čemu smo s g i k označili pozitivne konstante. Za razliku od (1) i (2) koji potiču rast funkcije $x(t)$, čimbenik (3) usporava njezin rast te ga stoga reprezentiramo s $-\alpha x(t)$, gdje je $\alpha = \text{const.} > 0$. Na taj način dobivamo jednadžbu

$$\frac{dx}{dt}(t) = g + ky(t) - \alpha x(t) \ .$$

Pretpostavljajući da se $t \mapsto y(t)$ ponaša po sličnom zakonu, analognim zaključivanjem dolazimo do jednadžbe koju mora zadovoljavati $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt}(t) = h + \ell x(t) - \beta y(t) \ , \qquad h, \ell, \beta = \text{const.} > 0.$$

Dakle, funkcije $x = x(t), \ y = y(t)$ zadovoljavaju sljedeći autonomni[2] linearni sustav običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda s konstantnim koeficijentima:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\alpha x + ky + g \ , \\ \frac{dy}{dt} &= \ell x - \beta y + h \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Uvedemo li

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha & k \\ \ell & -\beta \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix},$$

vidimo da se sustav (1) može zapisati u matričnom obliku:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b} \ . \tag{2}$$

Napomena 1. *Model koji opisuje sustav (2) primjenjiv je i na saveze država (alijanse). Primjerice, u kontekstu Prvog svjetskog rata, državu X možemo zamijeniti savezom Antante koji su činile Rusija, Francuska i Velika Britanija, a državu Y savezom sila osovine u kojem su sudjelovale Njemačka i Austro-Ugarska.*

Napomena 2. *Pretpostavka modela kojom su animoziteti g i h uzeti kao konstantne vrijednosti koje nisu u funkciji vremena t, vrlo je gruba i ne odgovara realnosti. Ti parametri, bez sumnje, mijenjaju se s vremenom, štoviše, imaju velike i nagle skokove pa ih ne možemo reprezentirati niti neprekinutim funkcijama (pretpostavka da su $g = g(t)$ i $h = h(t)$ po dijelovima konstantne funkcije bila bi znatno primjerenija). Bez obzira na tu manjkavost, dani model dobro opisuje stvarnu situaciju uoči Prvog svjetskog rata (v. Primjer 3.4).*

Razmotrimo sada neke jednostavne posljedice izvedenog modela:

(i) Uzmimo da je $g = h = 0$. Tada su $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ ravnotežna stanja[3] sustava (1)–(1), što znači da ako x, y, g i h u nekom trenutku $t = t_0$ poprime vrijednost 0, $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ za svaki $t > t_0$. To možemo interpretirati kao stanje trajnog mira nastalog zbog obostranog razoružanja i nezamjeranja.

(ii) Pretpostavimo da x i y iščezavaju u nekom trenutku $t = t_0$. Tada je $\frac{dx}{dt} = g$ i $\frac{dy}{dt} = h$. Prema tome,

$$g, h > 0 \quad \Rightarrow \quad x(t), y(t) \neq 0, \quad t > t_1 > t_0.$$

Dakle, ako postoji animozitet (s bilo koje strane), obostrano razoružanje neće samo po sebi dovesti do stanja trajnog mira.

(iii) Neka je $y(t) = 0$ za neki $t = t_0$. Tada iz (1) slijedi $\frac{dy}{dt} = \ell x + h$ iz čega zaključujemo da y neće i ostati 0 ako je barem jedan od h i x pozitivan. Zaključujemo: jednostrano razoružanje nije trajno. To je u skladu s povijesnom činjenicom da se Njemačka, koja je broj vojnika temeljem Versailleskog ugovora smanjila na 100000 (a što je bilo znatno ispod razine njezinih susjeda), naglo počela jačati vojsku u razdoblju od 1933-1936.

(iv) Utrka u naoružavanju započinje kada "obrambeni mehanizmi" počnu dominirati i potpuno prevagnu u odnosu na ostale čimbenike. Na taj način, sustav (1) prelazi u

$$\frac{dx}{dt} = ky, \qquad \frac{dy}{dt} = \ell x \, . \tag{3}$$

Deriviramo li prvu jednadžbu po t i uvažimo drugu, dobivamo

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - k\ell x = 0 \, .$$

Time smo dobili homogenu linearnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima čije opće rješenje glasi

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{k\ell}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{k\ell}\, t}, \qquad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Vratimo li to u $(3)_2$, jednostavnim integriranjem nalazimo

$$y(t) = \sqrt{\frac{\ell}{k}} \left(C_1 e^{\sqrt{k\ell}\, t} - C_2 e^{-\sqrt{k\ell}\, t} \right) .$$

Uočavamo da $x(t), y(t) \to +\infty$ kad $t \to +\infty$, što možemo interpretirati kao rat.

3 Stabilnost

Kao što smo prije spomenuli, nultočke desne strane
$\mathbf{f}(\mathbf{w}) := \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b}$ predstavljaju **ravnotežna stanja** sustava (2). Ako je $\alpha\beta - k\ell \neq 0$, lako je pokazati da naš sustav ima jedinstveno ravnotežno stanje oblika

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \frac{kh + \beta g}{\alpha\beta - k\ell}, \qquad y_0 = \frac{\ell g + \alpha h}{\alpha\beta - k\ell} \; . \tag{4}$$

U ovom poglavlju želimo ustanoviti uz koje uvjete na parametre modela α, β, k i ℓ je ravnotežno rješenje (4) stabilno, odnosno nestabilno. Problem stabilnosti sustava običnih diferencijalnih jednadžbi fundamentalno je pitanje kojom se bavi tzv. *kvalitativna teorija diferencijalnih jednadžbi*. Zainteresirani čitatelj može više o tome pronaći u knjigama [3, 4].

Osnovnu definiciju stabilnosti uvest ćemo za proizvoljno rješenje (ne nužno ravnotežno) autonomnog sustava

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \; , \qquad \mathbf{f} : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \; . \tag{5}$$

Definicija 3. *Kažemo da je rješenje $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$sustava (5)* ***stabilno*** *ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako rješenje $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$sustava koje u početnom trenutku zadovoljava*

$$|x_i(0) - x_i^*(0)| < \delta \; , \quad i = 1, \ldots, n$$

vrijedi

$$|x_i(t) - x_i^*(t)| < \varepsilon \; , \quad t > 0, \quad i = 1, \ldots, n \; .$$

U slučaju linearnog autonomnog sustava oblika

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \; , \qquad \mathbf{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R}) \; , \tag{6}$$

vrijedi sljedeći važan rezultat (za dokaz v. npr. [4]):

Teorem 4. *Neka je $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ i $\sigma(\mathbf{A})$ njen spektar. Tada je svako rješenje linearnog sustava (6) stabilno ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall \lambda \in \sigma(\mathbf{A})) \qquad \begin{array}{l} \mathrm{Re}\;\lambda \leq 0 \quad \& \\ \mathrm{Re}\;\lambda = 0 \;\; \Rightarrow \;\; a_\lambda = g_\lambda, \end{array} \tag{7}$$

pri čemu je a_λ algebarska, a g_λ geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ.

Koristeći se ovim teoremom, ispitajmo sada stabilnost rješenja (4). Kako bismo mogli primijeniti navedeni rezultat, zapišimo sustav (2) u obliku (6). U tu svrhu uvedimo

$$\mathbf{z} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_0$$

kao razliku između proizvoljnog i ravnotežnog rješenja. Tada slijedi

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{z} + \mathbf{w}_0) + \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{A}\mathbf{w}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{z}. \tag{8}$$

U zadnjem koraku iskoristili smo da je $\mathbf{w}_0$ ravnotežno rješenje, tj. $\mathbf{f}(\mathbf{w}_0) \equiv 0$. Prema tome, $\mathbf{w}_0$ će biti stabilno rješenje polaznog sustava (2) ako i samo ako je $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ stabilno rješenje sustava (8).

Odredimo sada karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} k_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} -\alpha - \lambda & k \\ \ell & -\beta - \lambda \end{bmatrix} \\ = \lambda^2 + (\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta - k\ell\ . \end{aligned}$$

Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ računamo kao nultočke polinoma $k_{\mathbf{A}}$ i dane su sa

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4k\ell}}{2}\ . \tag{9}$$

Budući da je diskriminanta $(\alpha - \beta)^2 + 4k\ell > 0$, slijedi da su obje svojstvene vrijednosti realne (i različite od nule, zbog $\alpha\beta - k\ell \neq 0$). Nadalje, one će obje biti negativne ako je

$$(\alpha + \beta) > \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4k\ell}$$

tj.

$$\alpha\beta - k\ell > 0\ .$$

Uzimajući u obzir Teorem 4, zaključujemo: **ravnotežno rješenje $\mathbf{w}_0$ sustava (2) stabilno je onda i samo onda kad je** $\alpha\beta - k\ell > 0$. Važno je uočiti da uvjet stabilnosti ne ovisi o animozitetima g i h.

Napomena 5. *Procjena parametara modela α, β, k, ℓ, g i h nije nimalo lak zadatak. Jasno je da animozitete g i h nije moguće ocijeniti. No, budući da uvjet stabilnosti ne ovisi o g i h, dovoljno je na neki način procijeniti preostale parametre. Primijetimo da su ti parametri obrnuto proporcionalni vremenu te ih stoga možemo izraziti s pomoću mjerne jedinice $(godina)^{-1}$. Richardson u svom radu parametar α^{-1} (odn. β^{-1}) procjenjuje kao duljinu mandata parlamenta države X (odn. Y) dok za k (odn. ℓ) pretpostavlja da je proporcionalan jačini industrije koje država X (odn. Y) posjeduje.*

Primjer 6. *Usporedimo sada naš model sa stvarnim događanjima u Europi u razdoblju od 1909. – 1914., uoči Prvog svjetskog rata. Označimo s X i Y dva saveza: X – Rusija, Francuska i Velika Britanija, Y – Njemačka i Austro-Ugarska. S obzirom na to da su ta dva saveza bila približno jednakih snaga, možemo uzeti da je* $k = \ell$*. Richardson dolazi do ocjene* $k = 0.3(godina)^{-1}$ *u slučaju Njemačke, pa budući da su oba saveza približno tri puta veća u odnosu na Njemačku, stavimo* $k = \ell = 0.9$*. S druge strane, budući da duljina mandata parlamenata država koje sudjeluju u savezu iznosi prosječno* 5 *godina, uzimamo* $\alpha = \beta = 0.2$*. Dakle, jednadžbe modela glase*

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + ky + g \,, \qquad \frac{dy}{dt} = kx - \alpha y + h \,. \tag{10}$$

Sustav (10) ima jedinstveno ravnotežno stanje dano s

$$x_0 = \frac{kh + \alpha g}{\alpha^2 - k^2} \,, \qquad y_0 = \frac{kg + \alpha h}{\alpha^2 - k^2}$$

koje nije stabilno s obzirom na to da je

$$\alpha\beta - k\ell = \alpha^2 - k^2 = 0.04 - 0.81 = -0.77 < 0 \,.$$

To je, naravno, u skladu s povijesnom činjenicom da su ova dva saveza na kraju ušla u sukob i tako otpočela Prvi svjetski rat.

Bibliografija

[1] M. Alić, Obične diferencijalne jednadžbe, Skripta PMF–Matematičkog odjela, Zagreb, 1994.

[2] J.R. Brannan, W.E. Boyce, Differential Equations: An Introduction to Modern Methods & Applications, John Wiley & Sons, San Francisco, 2007.

[3] F. Brauer, J.A. Nohel, The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: An Introduction, Dover Publications, New York, 1989.

[4] M. Braun, Differential Equations and Their Applications, Springer–Verlag, New York, 1986.

---

[1] Detaljan prikaz života i djela Lewisa Frya Richardsona moguće je pronaći na internetskoj stranici http://maths.paisley.ac.uk/LfR/home.htm

[2] Na desnim stranama u jednadžbama ne pojavljuje se varijabla t.

[3] Ravnotežno stanje je rješenje polaznog sustava koje ne ovisi o vremenu, tj. za koje vrijedi $\frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv 0$. Prema tome, $\mathbf{x}$^{*} će biti ravnotežno stanje sustava $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ako i samo ako je $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \equiv 0$.

ISSN 1334-6083