math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Diferenciranje i integriranje pod znakom integrala

analiza

Irfan Glogić , Harun Šiljak

When guys at MIT or Princeton had trouble doing a certain integral, it was because they couldn't do it with the standard methods they had learned in school. If it was contour integration, they would have found it; if it was a simple series expansion, they would have found it. Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. ([1])

1 Teorijski uvod

Diferenciranje i integriranje pod znakom integrala je tehnika koja je često korisna u izračunavanju integrala funkcija jedne realne varijable. Prije nego što krenemo s primjerima, navedimo osnovne teoreme kojima ćemo se koristiti.

Teorem 1. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definirana na pravokutniku $[a,b]\times[c,d]$ i neka je neprekidna po x na $[a,b]$ za proizvoljan y. Pretpostavimo također da postoji parcijalna derivacija $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ i da je neprekidna kao funkcija dviju varijabli. Tada za svaki $y\in[c,d]$ vrijedi*

$$\frac{d}{dy}\Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx.$$

Što se tiče diferenciranja pod znakom integrala koji je neodređen, osobitu ulogu ima pojam uniformne konvergencije integrala.

Naime, ako postoji integral $I(y)=\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ (definiran kao $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x,y)dx$) za $y\in Y$ i za svaki $\varepsilon>0$ postoji $b_0\geq a$ koji ne ovisi o y, takav da za $b>b_0$ vrijedi

$$\left|\int_a^\infty f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_b^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \text{ za sve } y \in Y,$$

tada kažemo da integral $I(y)$ *konvergira uniformno po* $y \in Y$.

Za dokazivanje uniformne konvergencije integrala koriste se razni kriteriji. Mi ćemo navesti dva.

Kriterij 2. *Pretpostavimo da je funkcija $f(x,y)$ integrabilna po x na svakom konačnom segmentu $[a,\eta]$ ($\eta \geq a$). Ako postoji funkcija $\varphi(x)$ koja ovisi samo o x, integrabilna na $[a,\infty\rangle$ takva da za svaki $y \in Y$ vrijedi $|f(x,y)| \leq \varphi(x)$ (za $x \geq a$), onda integral $I(y)$ konvergira uniformno po y.*

Kriterij 3. *Ako je integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergentan, a funkcija $g(x,y)$ monotona po x i uniformno ograničena, onda integral $\int_a^\infty f(x)g(x,y)\,dx$ konvergira uniformno po y.*

Sljedeći teorem daje dovoljne uvjete za prijelaz limesa pod znak integrala.

Teorem 4. *Neka je funkcija $f(x,y)$ za $y \in Y$ integrabilna po x na segmentu $[a,A]$ za sve $A > a$ i neka na svakom segmentu konvergira uniformno po x graničnoj funkciji $\varphi(x)$ kada $y \to y_0$. Ako pored toga integral $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ konvergira uniformno po $y \in Y$, onda vrijedi*

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty \varphi(x)\,dx,$$

gdje y_0 može biti i ∞.

Što se tiče diferenciranja pod znakom neodređenog integrala, pokazuje se da i u ovom slučaju vrijedi *Leibnizovo pravilo.*

Teorem 5. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definirana i neprekidna po x za $x \geq a$ i y iz segmenta $[c,d]$ te neka za $x \geq 0$ i $y \in [c,d]$ ima derivaciju $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ koja je neprekidna funkcija po obje varijable. Pretpostavimo također da integral $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ konvergira za sve $y \in [c,d]$, a integral $\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx$ konvergira uniformno po y na tom istom segmentu. Tada za proizvoljni $y \in [c,d]$ vrijedi*

$$I'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx.$$

Za potrebe integracije pod znakom integrala navodimo sljedeće teoreme.

Teorem 6. *Ako je funkcija $f(x,y)$ neprekidna na pravokutniku $[a,b] \times [c,d]$, tada vrijedi*

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Teorem 7. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definirana i neprekidna za $x \geq a$ i $y \in [c,d]$. Ako integral $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ konvergira uniformno po y na segmentu $[c,d]$, tada vrijedi*

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \int_a^\infty f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^\infty \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Teorem 8. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definirana i neprekidna za $x \geq a$ i $y \geq c$. Pretpostavimo također da oba integrala $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ i $\int_c^\infty f(x,y)\,dy$ konvergiraju uniformno, prvi po y, a drugi po x. Tada, ako postoji bar jedan od integrala $\int_c^\infty \int_a^\infty |f(x,y)|\,dx\,dy$ i $\int_a^\infty \int_c^\infty |f(x,y)|\,dy\,dx$, onda postoje i jednaki su integrali*

$$\int_c^\infty \int_a^\infty f(x,y)\,dx\,dy \text{ i } \int_a^\infty \int_c^\infty f(x,y)\,dy\,dx.$$

Dokazi navedenih tvrdnji lako se mogu izvesti iz rezultata iz naprimjer [2, 3].

2 Riješeni primjeri

U sljedećim primjerima prikazana je primjena diferenciranja i integriranja pod znakom integrala. Pritom su neki zadaci detaljno riješeni dok su ponegdje dijelovi rješenja ostali neprikazani - čitatelju se savjetuje da sam pokuša napraviti potrebne dopune.

Ako nije naveden izvor zadatka, on je zajedno s rješenjem preuzet iz [3].

Primjer 9. *([4]) Nađite vrijednost integrala*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $f(x,t) = \frac{\ln(xt+1)}{x^2+1}$. Ova funkcija neprekidna je na pravokutniku $P = [0,1] \times [0,1]$ i parcijalna derivacija $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \frac{x}{(xt+1)(x^2+1)}$ postoji i neprekidna je na P. Tada prema Teoremu 1 za svaki $t \in [0,1]$ i $I(t) = \int_0^1 f(x,t)\,dx$ vrijedi $I'(t) = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(xt+1)(x^2+1)}$. Rastavljanjem na parcijalne razlomke i integracijom dobijamo

$$I'(t) = \frac{2t \operatorname{arctg} x - 2\ln(tx+1) + \ln(x^2+1)}{2(t^2+1)}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi t + 2\ln 2 - 4\ln(t+1)}{4(t^2+1)}.$$

Odavde slijedi da je

$$I(t) = \frac{\ln 2 \operatorname{arctg} t}{2} + \frac{\pi \ln(t^2+1)}{8} - \int_0^t \frac{\ln(t+1)}{t^2+1} dt,$$

pa je

$$I(1) = \frac{\pi \ln 2}{4} - \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1} dt.$$

Budući da je integral na desnoj strani jednakosti upravo traženi integral $I(1)$, slijedi da je tražena vrijednost $f(1) = \frac{\pi \ln 2}{8}$. ■

Primjer 10. *([5]) Nađite vrijednost integrala*

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \pi x - \operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

Dokaz. Neka je $f(x,t) = \frac{\operatorname{arctg} tx - \operatorname{arctg} x}{x}$. Ova funkcija je neprekidna za $x \geq 0$ i $t \in [1,\pi]$, pri čemu je na istom skupu neprekidna i derivacija $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \frac{1}{1+t^2x^2}$. Integral $I(t) = \int_0^\infty f(x,t)\,dx$ konvergira za sve $t \in [1,\pi]$, što je moguće pokazati npr. Lagrangeovim teoremom o srednjoj vrijednosti, jer iz njega slijedi da za $t > 1$ vrijedi

$$\frac{\operatorname{arctg} tx - \operatorname{arctg} x}{x(t-1)} = (\operatorname{arctg} x)'_{x=c},$$

gdje je c neki broj iz segmenta $[x, tx]$, pa imamo

$$\frac{\operatorname{arctg} tx - \operatorname{arctg} x}{x(t-1)} = \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Odavde je konvergencija integrala očita. Sada možemo, koristeći se Kriterijem 1, pokazati da $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$ konvergira uniformno po t, jer je $\frac{1}{1+t^2x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ za $t \geq 1$. Tada prema Teoremu 5 vrijedi

$$I'(t)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\,dx=\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{x}{1+t^2x^2}\right)dx=\frac{1}{t}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi}{2t}.$$

Stoga je $I(t)=\frac{\pi}{2}\ln t+C$. Budući da je $I(1)=0$, slijedi $C=0$. Dakle, $I(\pi)=\frac{\pi}{2}\ln\pi$. ■

Primjer 11. *Nađite vrijednost integrala*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Dokaz. Neka je $f(x,t)=\frac{\sin x}{x}e^{-tx}$. Ova funkcija je neprekidna na $P=[0,\infty\rangle\times[0,a]$ za svako $a>0$, pri čemu je na istom skupu neprekidna i derivacija $\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)=-\sin x\,e^{-tx}$. Integral $I(t)=\int_0^\infty f(x,t)\,dx$ konvergira za svako t jer za $t=0$ imamo $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-tx}\,dx=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx<\infty$ (posljednja nejednakost slijedi npr. iz Dirichletova kriterija konvergencije, jer $\left|\int_0^a \sin x\,dx\right|<2$ za svaki a, dok $\frac{1}{x}$ monotono opada k nuli za $x>0$), a za $t\geq t_0>0$ imamo $\left|\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-tx}\,dx\right|\leq\int_0^\infty e^{-tx}\,dx=\frac{1}{t}<\infty$.

Za $t>0$ vrijedi $\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|=|-\sin x\,e^{-tx}|\leq e^{-tx}\leq e^{-t_0x}=\varphi(x)$ a budući da je $\varphi(x)$ integrabilna na $[0,\infty\rangle$, po Kriteriju 1 integral $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\,dx$ konvergira uniformno na svakom skupu oblika $\{t\in\mathbb{R}|t\geq t_0>0\}$. Prema Teoremu 5 vrijedi

$$I'(t)=-\int_0^\infty \sin x\,e^{-tx}\,dx.$$

Primjenom parcijalne integracije dva puta dobijamo

$$I'(t)=-\frac{1}{1+t^2}\ \text{za}\ t>0.$$

Odatle slijedi da je $I(t)=-\operatorname{arctg} t+C$ za $t>0$. Pokažimo da je $\lim_{t\to\infty}I(t)=0$.

Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljan i odaberimo $x_0>0$ takvav da je $\sin x\geq 0$ za $x\in[0,x_0]$ i

$$0<\int_0^{x_0}\frac{\sin x}{x}e^{-tx}\,dx<\int_0^{x_0}\frac{\sin x}{x}<\frac{\varepsilon}{2}$$

za sve $t>0$. Funkcija $f(x,t)$ je integrabilna na segmentu $[x_0,A]$ za svaki $A>x_0$ i na svakom takvom segmentu konvergira uniformno po x k 0 kada $t\to\infty$. Integral $\int_{x_0}^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-tx}\,dx$ konvergira uniformno po $t>0$ (prema Kriteriju 2) pa koristeći se Teoremom 4 dobijamo $\lim_{t\to\infty}I(t)=0$. Dakle, $C=\frac{\pi}{2}$, a vrijednost traženog integrala je $I(0)=\frac{\pi}{2}$.

Dokaz da je $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$ mogao je biti izveden i jednostavnije, kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru. ■

Primjer 12. *Dokažite jednakost*

$$\int_0^\infty \frac{2-2\cos x}{xe^x}\,dx = \ln 2.$$

Dokaz. Neka je $f(x,t) = \frac{2-2\cos x}{xe^x}e^{-tx}$. Koristeći se idejama iz prethodnih zadataka, može se pokazati da integral $I(t) = \int_0^\infty f(x,t)\,dx$ konvergira za sve $t \in \{t \in \mathbb{R} | t_0 \le t < \infty\}$ gdje je $0 < t_0 < 1$ te da na istom skupu integral $\int_0^\infty f(x,t)\,dx$ konvergira uniformno. Stoga prema Teoremu 5 imamo

$$I'(t) = \int_0^\infty f_t'(x,t)\,dx = \int_0^\infty (2-2\cos x)e^{-tx}dx = -\frac{2}{t} + \frac{2t}{t^2+1},$$

$$I(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) + C.$$

Primijetimo da je $\frac{2-2\cos x}{x}$ neprekidna ograničena funkcija na $[0,\infty\rangle$ i da je

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty e^{-tx}dx = 0.$$

Stoga je $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$, pa je $C = 0$. Dakle, traženi integral je $I(1) = \ln 2$. ■

U nastavku slijede primjeri primjene integracije pod znakom integrala u rješavanju zadataka. Najprije ćemo ovu tehniku primijeniti na već dane primjere 10 i 12, a zatim i na jedan poznati rezultat iz analize.

Primjer 13. *([5]) Nađite vrijednost integrala*

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\pi x - \operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$$

Dokaz.

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\pi x - \operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{x}\operatorname{arctg} tx\Big|_{t=1}^{t=\pi}\,dx = \int_0^\infty\int_1^\pi \frac{1}{1+(xt)^2}dt\,dx.$$

Budući da je $\frac{1}{1+(tx)^2}$ neprekidna funkcija za $x \ge 0$ i $t \in [1,\pi]$ i integral $\int_0^\infty \frac{1}{1+(tx)^2}\,dx$ prema Kriteriju 1 konvergira uniformno za svako $t \in [1,\pi]$, iz Teorema 7 slijedi opravdanost sljedećeg postupka:

$$I=\int_0^\infty\int_1^\pi \frac{1}{1+(xt)^2}dt\,dx=\int_1^\pi\int_0^\infty \frac{1}{1+(xt)^2}dx\,dt,$$

$$I=\int_1^\pi \frac{1}{t}\cdot\frac{\pi}{2}dt=\frac{\pi}{2}\ln\pi.$$

■

Primjer 14. *Dokažite jednakost*

$$\int_0^\infty \frac{2-2\cos x}{xe^x}\,dx=\ln 2.$$

Dokaz. Budući da je $\int_0^1 \sin xt\,dt=\frac{1-\cos x}{x}$, imamo

$$I=\int_0^\infty \frac{2-2\cos x}{x}\cdot e^{-x}dx=2\int_0^\infty\int_0^1 \sin xt\,e^{-x}dt\,dx.$$

Budući da je $\sin xt\,e^{-x}$ neprekidna funkcija za $x\geq 0$ i $t\in[0,1]$ i integral $\int_0^\infty \sin xt\,e^{-x}\,dx$ konvergira uniformno za svako $t\in[0,1]$ po prvom kriteriju, iz Teorema 7 slijedi opravdanost sljedećeg postupka:

$$I=2\int_0^1\int_0^\infty \sin xt\,e^{-x}dx\,dt=2\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt=\ln 2.$$

■

Primjer 15. *Nađite vrijednost integrala*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Dokaz. Iako ovo rješenje ne predstavlja klasičnu integraciju pod znakom integrala, ipak ga vrijedi prikazati.

Neka je $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Vrijedi

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}dx=\frac{I}{\sqrt{t}}.$$

Množenjem zadnje jednakosti s e^{-t} i integriranjem obiju strana na intervalu $[0,\infty\rangle$ dobijamo

$$2I^2=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-tx^2}dx\,e^{-t}dt=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-tx^2}e^{-t}dt\,dx.$$

Promjena reda integriranja opravdana je prema Teoremu 8, budući da funkcija $e^{-t(x^2+1)}$ zadovoljava uvjete ovog teorema: uniformnu konvergenciju integrala $\int_0^\infty e^{-t(x^2+1)}dx$ i $\int_0^\infty e^{-t(x^2+1)}dt$ lako je pokazati, a egzistencija jednog od dva tražena uzastopna integrala slijedi iz sljedećeg računa:

$$2I^2 = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Prema tome je $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ■

3 Zadaci za samostalan rad

Čitatelj može predstavljene metode primijeniti na sljedeće zadatke koji su ostavljeni za vježbu.

Zadatak 16. *Dokažite jednakost*

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+ax)}{\cos x}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} a \log(1+a^2).$$

Zadatak 17. *Dokažite jednakost*

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}dx = \frac{5\pi^2}{96}.$$

Zadatak 18. *Nađite vrijednost integrala*

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\ln x\,dx$$

za $0 < p < 1$.

Zadatak 19. *Dokažite jednakost*

$$\int_0^{\infty} 2\sec x \ln\left(\frac{1+\beta\cos x}{1+\alpha\cos x}\right)dx = \arccos^2\alpha - \arccos^2\beta.$$

Zadatak 20. *([6]) Dokažite jednakost*

$$\int_0^{\infty}\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}-\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots\right)dx = \sqrt{e}.$$

Zadatak 21. *Nađite vrijednost integrala*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos nx}{(x^2+1)^2}dx.$$

Bibliografija

[1] Feynman, R. P., *Surely You're Joking, Mr. Feynman by Richard P. Feynman,* Bantam Books, 1989

[2] Pandžić, P., Tambača J., *Integrali funkcija više varijabli*, Sveučilišna skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2011.

[3] Ungar Š., *Matematička analiza 3*, Sveučilište u Zagrebu, 2002.

[4] Mathlinks forum: www.mathlinks.ro

[5] Kedlaya, K. S., Ng, L., *Solutions to the 63rd William Lowell Putnam Mathematical Competition*, 2002

[6] Alexanderson G. L., Klosinski L. F., Larson L. C., *The William Lowell Putnam Mathematical Competition Problems and Solutions: 1965-1984*, MAA, 1985

[7] Kedlaya, K. S., Poonen B., Vakil R., *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000: Problems, Solutions, and Commentary*, MAA, 2002

ISSN 1334-6083