INTERDISCIPLINARNOST MATEMATIKE I PRIRODE U GOSPODARSTVU

UDK51:59:338
Izvorni znanstveni rad

dr.sc. Dominika Crnjac Milić, Hrvoje Crnjac
Elektrotehnički fakultet Osijek
Kneza Trpimira 2b, 31000 Osijek, Hrvatska
e-mail: dominika.crnjac@etfos.hr

SAŽETAK - U radu će se pokazati interdisciplinarnost matematike, botanike, biologije, stočarstva, i tako dalje. Pokazat će se uloga Fibonaccijevih brojeva u rješavanju mnogih prirodnih fenomena. Ukazat će se na uporabu matematike za objašnjavanje zakonitosti prirode i utjecaj gospodarstva na razvoj matematike.
Ključne riječi: rekurzija, relacija, indukcija, niz

ABSTRACT - Interdisciplinarity of mathematics, botany, biology, cattle breeding, etc. will be presented in the paper. We will show the role of Fibonacci numbers in solving many phenomena in nature. Usage of mathematics for the purpose of explaining laws of nature and the influence of economy on the development of mathematics will also be pointed out.
Key words: recursion, relation, induction, sequence

I. UVOD

U elementarnoj kombinatorici važna i primjenjiva metoda je metoda rekurzivnih relacija ili rekurzivnih formula. To su ustvari formule ili relacije pomoću kojih se n - ti član a_n niza $(a_n, n \in N)$ nalazi pomoću nekoliko prethodnih članova $a_k, k < n$.

Najopćenitiji pojam rekurzije se može precizno definirati koristeći teoriju izračunljivih funkcija i princip definicije indukcijom (Kurepa ,1970. i Mardešić,1982.). Rekurzivne relacije su vrlo korisne pri radu na računalu. Pri rabljenju su postupci slični interativnim metodama.

II. FIBONACCIJEVI BROJEVI I NJIHOVA PRIMJENA U PRIRODI

Leonardo od Pise poznat kao Fibonacci, skraćeno ″filius Bonacci″ u svom radu ″Liber abaci″ (knjiga o abakusu) objavljenom 1202. godine postavio je ″problem zečeva″:
Zečevi se razmnožavaju po sljedećoj shemi;
Svaki par zec – zečica, stari barem dva mjeseca, dobiju za vrijeme svakog narednog mjeseca par mladih (zeca i zečicu). Pretpostavimo da na početku godine počinjemo s jednim novorođenim parom, koliko će biti ukupno parova zečeva početkom sljedeće godine ili općenito nakon n mjeseci, uz pretpostavku da zečevi ne ugibaju. Jasno da će nakon prvog mjeseca biti samo jedan par zečeva, jer oni nisu zreli za oplodnju. Nakon dva mjeseca imamo dva para, tj. tijekom trećeg mjeseca imamo dva para.
Nakon tri mjeseca imamo tri para, početni par i njihovi potomci nakon drugog i trećeg mjeseca. Nakon četiri mjeseca imamo pet parova. Zamjetimo da od prethodno troje postojećih parova, samo dvoje su zreli parovi. Nakon pet mjeseci imamo osam parova, jer od pet parova živih prethodnih mjeseci samo tri para mogu dati potomke. Prethodno izrečeno poopćimo u obliku matematičkog modela.

Neka je f_n broj parova zec – zečica nakon n mjeseci, odnosno tijekom $(n+1)$ - og mjeseca od početka godine. Po pretpostavci je $f_0 = 1$ i $f_1 = 1$, pa je $f_2 = 2, f_3 = 3$ itd. Da se dobije općenito f_n, potrebito je broju parova f_{n-1} koji su živjeli prethodni mjesec dodati novorođene parove koji mogu nastati samo od f_{n-2} parova živih zečeva prije dva mjeseca. Dakle, za $n \geq 2$ vrijedi:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Na osnovu prethodnog možemo napisati niz Fibonaccijevih brojeva:

$$\{(0,1),(1,1),(2,2),(3,3,),(4,5),(5,8),(6,13),(7,21),...,(n,f_n)\}$$

Svaki broj u prethodnom nizu, osim prva dva, dobijemo kao sumu prethodno dva. Tako će na primjer biti $f_7 = 34$ parova zečeva.

Da bismo dobili broj odraslih parova u zečjem razmnožavaju nakon n - mjeseci, označimo taj broj sa f_n, dobivamo niz $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5$, ...
Zamijetimo zanimljivu osobinu ovog niza;
Svaki član niza za $n \geq 2$ dobiva se kao zbroj prethodno dva, tj. $f_3 = f_1 + f_2 = 2, f_4 = f_2 + f_3 = 3,...$ $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, pa je $(f_n, n \in N)$ Fibonačijev niz.

Uočimo broj $\frac{f_{n+1}}{f_n} = F_n$ koji nam kazuje rast procesa.

Navedimo nekoliko članova niza $\left(F_n, n \in N\right)$;

$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = \frac{3}{2}, F_4 = 1,66, F_5 = 1,60,$

$F_6 = 1,625, \ldots$

Može se naslutiti da niz $\left(F_n, n \in N\right)$ komergira, pa možemo potražiti njegovu granicu.

Neka je x tražena granica, tj. $\lim_{n\to\infty} F_n = x$. Dijeljenjem jednadžbe $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ s f_n dobivamo: $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n} + 1$. Nije teško zamijetiti da je $F_n = \frac{1}{F_{n-1}} + 1$, pa je $\lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{F_{n-1}} + 1\right)$, tj. $x = \frac{1}{x} + 1$, odakle slijedi kvadratna jednadžba $x^2 - x - 1 = 0$. Jedan od korijena kvadratne jednadžbe je pozitivan što je ujedno rješenje za rast $x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 1,61803\ldots$, što kazuje da je uvećanje procesa razmnožavanja oko 61,809...%.

Vrijedna pažnje je činjenica da broj $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ ima važnu ulogu u estetici.

Fibonaccijevi brojevi se prirodno pojavljuju u raznim granama matematike i srodnim znanostima u vidu algoritama. Davne 1844. godine G. Lame je našao vezu Fibonaccijevih brojeva i Euklidovog algoritma (Knuth, 1973.).

U suvremenoj literaturi n- ti Fibonaccijev broj f_n definira se tako da je $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ za $n \geq 2$ s nešto drugačijim početnim uvjetima nego kod problema zečeva.

Interesantna svojstva Fibonaccijevih brojeva izučavao je E. Lucas (francuski matematičar), koji se bavio raznim primjenama u prirodi i matematici. Možemo utvrditi da su mnogi fenomeni u prirodi vezani uz Fibonaccieve brojeve. Primjerice, raspored latica u nekih cvjetova slijede Fibonaccieve brojeve.

Nadalje, može se pokazati da listovi koji rastu iz stabljike ekvidistantno primaju najviše svjetlosti ako za njihove kuteve, dobivene projekcijom na horizontalnu ravninu, vrijedi da je za svaki takav kut, jednak sumi prethodna dva, tj. ponašaju se po Fibonaccijevoj rekuzivnoj relaciji.

Naime, promatrajmo stabljike kojima su listovi raspoređeni po krivulji koju nazivamo helikoid. Period biljke je broj okreta oko stabljike dok list ne dođe u isti položaj.

Označavajući taj broj sa m, a broj listova u jednom periodu sa n možemo dati tablicu 1 brojeva m i n za neke biljke:

TABLICA I

m	n	**naziv biljke**
1	2	u dvije vrste lišće grmljastog bilja
1	2	horizontalne grane brijesta
1	3	joha, breza, šaš
2	5	ruže, vrbe
3	8	kupus, astra
8	21	ljuske od omorike i jelove šišarke
13	34	ljuske od šišarke

Zamijetimo da su brojevi iz tablice članovi Fibonaccijevog niza za $f_1 = 1$ i $f_2 = 1$. Zbog interesantnih i mnogobrojnih svojstava postoji časopis koji im je posvećen ″Fibonacci Quarterly″.

III. NEKE INTERESANTNE APLIKACIJE MATEMATIKE U BIOLOGIJI

Oblik četveronožnih životinja u većoj mjeri je predodređen. Ako s D označimo duljinu trupa između nogu, a s V visinu trupa, tada je karakterističan broj za četveronožne životinje određen $D : V^{2/3}$. Prethodni kvocijent se kreće u određenim granicama što je nasljeđe gravitacije. Na primjer, za indijskog slona ovaj odnos je 5,8:1 pri čemu je $D = 153cm,\ V = 135cm$, dok je za indijskog tigra ovaj odnos 7:1, pri čemu je $D = 90cm,\ V = 45cm$.

IV. ″MATEMATIČKA″ KOMUNIKACIJA PČELA

Poznato je da položaj točke u ravnini možemo odrediti s parom (r, α), pri čemu je r udaljenost točke od ishodišta na polarnoj osi, a α kut koji zatvara r sa polupravcem (polarni koordinatni sustav).

Ispitivanjem međusobnog komuniciranja pčela ustanovljeno je da u priopćavanju informacija o nalazištu hrane glavnu ulogu ima polarni koordinatni sustav.

Zaista, kad pčela nađe stanište hrane dalje od sto metara, pčela se kreće po vertikalnoj stranici košnice ispisujući osmicu. Kut α koji zatvara pravi dio putanje u odnosu na vertikalu je kut staništa hrane u odnosu na sunce. Brzina kretanja po osmici daje rastojanje do staništa hrane. Primjerice, ako je broj obilazaka oko osamnaest minuta, rastojanje je tisuću metara.

Opće je poznato da sa pravokutnog koordinatnog sustava (x, y) prelazimo na polarni koordinatni sustav (r, α) i obrnuto koristeći relacije $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$ (Pavković i Veljan, 1995.).

V. ZAKLJUČAK

U ovom radu je pokazano prožimanje matematike i prirode. Koristeći metodu rekurzije analiziran je vrlo interesantan model procesa razmnožavanja zečeva. Pokazana je korisnost Fibonaccijevih brojeva u izučavanju razvoja biljnog i životinjskog svijeta. Dane su neke aplikacije matematike u biologiji. Korištenjem koordinatnih sustava pojašnjeno je komuniciranje pčela u aktivnom radu.

LITERATURA

1. Knuth D.E. (1973): The Art of Computer Programing, Vol 1. , New York, Addision Wesley
2. Kurepa S. (1970): Uvod u matematiku, Zagreb,Tehnička knjiga Zagreb
3. Mardešić S. (1982): Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, Zagreb, Školska knjiga
4. Pavković B., Veljan D. (1995): Elementarna matematika 2, Zagreb, Školska knjiga