Mladen Vuković, *Matematička logika*, Zagreb: Element, 2009, 215 str.

Matematička logika Mladena Vukovića zasigurno je najbolji objavljeni udžbenik za logiku u Hrvatskoj na fakultetskoj razini. Uz ovo napominjemo da s veseljem očekujemo objavljivanje udžbenika hrvatskih logičara koji su za sada u formatu skripte.

Naslov knjige *Matematička logika* sugerira određenu podjelu na matematičku i filozofijsku logiku, premda je duboko uvjerenje recenzenta da ta podjela postoji isključivo u izvanlogičkim aplikacijama, a ne u temeljnim rezultatima i teoremima same logike. Naslov knjige svakako nalazi svoje opravdanje u tome da su primjene logike ilustrirane samo u sklopu matematike, no kako ćemo razložiti kasnije, pozdravljamo ideju uključivanja primjena iz drugih srodnih područja poput filozofije, računarstva i lingvistike te, posljedično, ako će autor smatrati prikladnim, eventualnu promjenu naslova u *Logika* ili *Formalna logika*.

Ovdje moramo izreći jednu napomenu radi što veće jasnoće: kroz ovu recenziju riječju "tekst" koristit ćemo se da bismo referirali na bilo koji dio knjige osim zadataka; drugim riječima, knjigu ćemo terminološki podijeliti na "tekst" i "zadatke".

Knjiga *Matematička logika* sastoji se od dva dijela koji predstavljaju temeljnu podjelu knjige, a to su Logika sudova i Logika prvog reda. Prvi dio dalje se dijeli na devet cjelina. Prve tri cjeline zauzimaju petnaestak stranica, no po svojoj prirodi su uvodne i moguće ih je obraditi u jednom dvosatnom predavanju. Te cjeline su: Uvod (5–6), Jezik logike sudova (7–8) i Interpretacije (9–15). Ovdje su obrađene temeljne interpretacije i istinitosne (semantičke) tablice.

Poglavlje o normalnim formama (15–32) poprilično je detaljno i dosta zahtjevno za sam početak (premda se normalne forme ovdje smisleno uklapaju) pa je to poglavlje, kao i potpoglavlje o propozicionalnim veznicima (22–32), moguće preskočiti bez da se naruši slijed ekspozicije u knjizi. Na ovaj se dio može prema želji vratiti nekom kasnijom prilikom.

Sljedeće poglavlje obrađuje testove valjanosti (32–38), gdje se *de facto* obrađuje samo jedan test valjanosti, glavni test. Ova metoda je poznata i kao metoda semantičkog stabla, no sadrži neke sitne razlike. Kako bismo dočarali razliku (ako ju uopće ima smisla naglašavati), zamislimo da u semantičkim stablima imamo uz svaku formulu u stablu (baš uz svaku) napisano "T" za "true". Kada, na primjer, u semantičkom stablu rastavljamo pogodbu (kondicional) "ako P, onda Q", dobit ćemo dvije grane, jednu s "ne-P" a drugu s "Q". Uz obje grane možemo napisati

"T" kao "true". Glavni se test od semantičkog stabla razlikuje isključivo po tome što ćemo u istom slučaju u glavnom testu imati dvije grane, u jednoj će pisati "P" i do njega "obrnuto T" kao "false", a u drugoj isto kao u semantičkom stablu, "Q" i uz njega "T" kao "true". U ovom se poglavlju spominje odlučljivost, ali se u ovom udžbeniku ne ulazi dalje u tu temu, nego se čitatelja referira na autorovu skriptu dostupnu na webu.

Pod zajedničkim poglavljem nazvanim Račun sudova (39–69) uklopljeno je dosta tema. Ovdje se nalaze hilbertovski sustavi za klasičnu logiku, definicija izvoda i dokaza u sklopu tih sustava, te niz klasičnih lema koje nas vode do generaliziranog teorema potpunosti i kompaktnosti kao korolara.

Nakon toga, u prvom dijelu knjige se, uz do sada navedeno, nalazi adekvatno opširno i temeljito poglavlje o prirodnoj dedukciji (69–91) koja je obrađena u izvornoj Gentzenovoj notaciji pomoću horizontalnih crta (ovo nikako ne treba pobrkati s Gentzenovim sustavima sekvenata, koji se u ovoj knjizi ne spominju). Ovaj stil prikaza prirodne dedukcije u bitnome se ne razlikuje od popularnog Fitchovog prikaza, budući da su pravila ista. Kako je u većini naprednije literature Gentzenov stil dedukcije standardni, pozdravljamo ovaj odabir, kao možda manje zorni od Fitchove notacije, ali zasigurno bolji jer se student ne mora kasnije privikavati na drugačiji stil.

Slijede kratka poglavlja o alternativnim hilbertovskim aksiomatizacijama logike sudova (91–96) te kratki osvrt na intuicionističku logiku i modalnu logiku (96–105). Obrađeno je dosta modalne logike, ali je većina neproblematičnih rezultata sažeta i zadana kroz zadatke. Löbov aksiom, bisimulacije i generirani podmodeli su na ovaj način uvedeni kroz zadatke. Budući da dokazi tvrdnji nisu komplicirani, ovo je dobar kompromis za davanje naprednijih pojmova, ali bez obveze da se još zadaju mnogostruki zadaci vezani uz te pojmove kako bi bilo potrebno kad bi pojmovi bili definirani u samom tekstu. To da se neki pojmovi objašnjavaju kroz zadatke vrlo je uobičajena praksa u logičkim udžbenicima, i premda su ti zadaci uvijek studentima najteži za riješiti, tu se najviše uče praksi logike kao znanosti, pa su zato vrlo važni i nikako ih ne bi trebalo preskočiti.

U drugom se dijelu prati istovjetna struktura ekspozicije, ovog puta u kontekstu logike prvog reda. Nakon 2.7.2. u kojem se dokazuje generalizirani teorem potpunosti za logiku prvog reda prelazi se (171) na aplikacije teorema potpunosti i postupno prema naprednijim temama teorije modela poput kategoričnosti i ultraprodukata. Kao što su modalna i intuicionistička logika uvedene kao primjeri drugačijih propozicionalnih sustava, ovdje se prikazuju aritmetika prvog reda i Zermelo-Fraenkelova teorija skupova, kao primjeri teorija prvog reda. Važno je napomenuti da se ovdje ne daje uvod u teoriju skupova, već se teorija skupova ZFC proučava kao jedan primjer teorije koja je formalizirana u logici prvog reda.

Ovime dolazimo do komentara na knjigu. Prije svega, autor pretpostavlja određena predznanja. Riječ je o predznanju najosnovnije teorije skupova jer se vrlo često pojmovi iz elementarne teorije skupova koriste bez da se uvedu kroz definicije, što autor sam napominje u predgovoru. Neki zadaci pretpostavljaju temeljna znanja iz algebre, ali ona nisu potrebna za razumijevanje teksta. Kao vrlo dobra nadopuna za nematematičare po tom pitanju može poslužiti Horvatićeva *Linearna algebra*, pri čemu mislimo isključivo na uvodno poglavlje. Što se tiče predznanja iz teorije skupova, sve se potrebno predznanje može steći iz uvodnih dijelova Vukovićeve skripte dostupne na webu. Budući da su nematematičari prisiljeni konzultirati ovu (ili prema želji neku drugu) dopunsku literaturu, smatramo da bi bilo dobro ovo ispraviti u sljedećem izdanju, kako bi sve važne informacije bile dostupne na jednom mjestu, odnosno u samoj knjizi *Matematička logika*. Ovo bi bilo poželjno jer se radi o jednom od najjasnijih sveučilišnih udžbenika za logiku na hrvatskom jeziku pa bi bila šteta da svoju edukativnu vrijednost i nastavnu primjenu nalazi isključivo u programu studija matematike.

Za razliku od mnogih udžbenika namijenjenih prvenstveno filozofima, Vukovićeva knjiga se ne bavi prijevodima na logički jezik ili interpretacijama logike u terminima prirodnih jezika. Premda ovo na prvi pogled djeluje kao nedostatak, to je jedna od velikih vrlina knjige. Prečesto se smatra da logika nalazi svoje opravdanje u svojevrsnom kontroliranju valjanosti zaključivanja, no to je, prema mišljenju recenzenta, degradacija logike. Točnije rečeno, to je trivijalizacija njenih primjena: logika nije tek umjetan sustav stvoren da bi zamijenio i mjestimično korigirao prirodni jezik, već vrlo jaki alat za rješavanje otvorenih problema u matematici, filozofiji, računarstvu i lingvistici. Ne razvijamo logiku da bismo shvatili što mislimo kad kažemo "X postoji", nego zato da bismo stvorili sustav koji će nam pomoći riješiti neke probleme, dokazati neke tvrdnje, stvoriti neke algoritme, itd.

U tom smislu, autor nije zanemario primjenu logike, već ju je istaknuo na ispravan način. U kontekstu uloge logike u rješavanju matematičkih problema, najistaknutiji primjer je zadatak 1.6.16. (59), u kojem se teorem kompaktnosti koristi za rješavanje problema obojivosti grafa. Nažalost, uz mnogo primjera primjene logike u matematici, primjene u filozofiji nisu istaknute. Razlog ovome je dvostruk. Prije svega, autor je u samom predgovoru napomenuo da je knjiga proizašla iz desetak godina predavanja na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu pa su time ova predavanja, iz kojih je knjiga nastala, prirodno bila namijenjena matematičarima. Drugi razlog je činjenica da se većina filozofijski interesantnih primjena javljaju dosta dalje, posebno u modalnoj logici prvog reda, u neklasičnim logikama i u teoriji dokaza. Usprkos tome, bilo bi svakako vrlo dobrodošlo u sljedećem izdanju dodati nekoliko filozofijskih primjera, kao i nešto primjera aplikacije u računarstvu i lingvistici. Jedan od klasičnih filozofijskih primjera koji svoju argumentativnu snagu crpi iz logike jest teorija supstancijalnog (odnosno tvarnog) identiteta koja se može vrlo jednostavno, ali opet netrivijalno dokazati iz elementarne modalne logike prvog reda.

Knjiga je vrlo prikladno strukturirana za dvosemestralni kolegij iz logike, sa satnicom od 4 sata tjedno, te se pritom uz sitne modifikacije može odraditi jedno poglavlje tjedno uz pripadajuće vježbe. Bez obzira na činjenicu da je ova knjiga po broju poglavlja i količini detalja prikladnija za dvosemestralni kolegij, ona je izvrstan izvor i za jednosemestralni kolegij, gdje bi jedan logičan izbor građe bio krenuti od drugog dijela knjige, Logika prvog reda, pri čemu temeljnu cjelinu tvore 2.1.–2.7.2. dok su ostali odjeljci nadopuna koja studenta usmjerava prema osnovnim problemima teorije modela, pa se prema potrebi, za prvi susret s logikom, mogu preskočiti. Uz ovo bi trebalo ostati dovoljno vremena predavaču za ubaciti još i poglavlje 1.9 o modalnoj i intuicionističkoj logici zbog velike bliskosti te tematike filozofima.

Nastavak na ovu knjigu u daljnjem radu na logici predstavljala bi knjiga *Computability and Logic* Boolosa, Burgessa i Jeffreya, koja detaljno razlaže pitanje izračunljivosti, prelazeći na malo naprednije teme iz teorije dokaza i teorije modela, kao i na vrlo dobru ilustraciju temeljnih problema aritmetike prvog reda. Postoji nekoliko razloga zašto bi baš ovo bio smisleni nastavak. Prije svega, Vuković koristi vrlo sličnu terminologiju, pa nije potrebno ponovno učiti definicije. S druge strane, područja koja su ilustrirana u *Matematičkoj logici* detaljno se razlažu u *Computability and Logic*, dok se područja poput ultraprodukata tek spominju u *Computability and Logic* dok se u *Matematičkoj logici* detaljnije obrađuju. U svakom slučaju, ova dva naslova tvore vrlo smislenu cjelinu i ako se detaljno obrade, trebala bi studenta izvrsno pripremiti za rad na nekom od specijaliziranih područja logike.

Sve u svemu, radi se o izvrsnoj knjizi, čija bi se praktična vrijednost (za nematematičare) uvelike povećala uz ovih nekoliko sitnih nadopuna, pa svakako preporučamo autoru da ih, za drugo izdanje, prema mogućnosti uvrsti.

Sandro Skansi
skansi.sandro@gmail.com