

Kad u matematici "više" zapravo znači "manje": Analiza uspješnosti u rješavanju problemskih zadataka usporedbe

Nina Pavlin-Bernardić, Daria Rovan, Vesna Vlahović-Štetić

Odsjek za psihologiju, Filozofski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

Sažetak

Cilj je ovoga istraživanja bio ispitati kako se u nižim razredima osnovne škole mijenja uspješnost u rješavanju usklađenih i neusklađenih zadataka usporedbe, koje se kategorije pogrešaka javljaju pri rješavanju ovih zadataka te utvrditi jesu li dobiveni rezultati u skladu s hipotezom usklađenosti Lewisa i Mayera (1987).

U istraživanju je sudjelovalo 285 učenika od 1. do 4. razreda osnovne škole. Oni su ispitani individualno usklađenim i neusklađenim zadacima usporedbe. Pokazalo se da postoje razlike u uratku i s obzirom na vrstu zadatka i s obzirom na razred, kao i interakcija ovih dviju varijabli. Učenici su uspješnije rješavali usklađene zadatke od neusklađenih. Ta je razlika bila najveća za učenike 1. razreda, a u svakom je sljedećem razredu bila manja, iako su i učenici 4. razreda bili uspješniji u usklađenim zadacima.

Jasniji je uvid u razloge ovakvih razlika pružila analiza pogrešaka koje su učenici činili pri rješavanju zadataka. Pokazalo se da je, za razliku od usklađenih zadataka, dominantna pogreška pri rješavanju neusklađenih zadataka bila pogreška suprotne računске operacije. Ovi su nalazi u skladu s hipotezom usklađenosti Lewisa i Mayera (1987), prema kojoj rješavači zadataka usporedbe obično koriste shemu za rješavanje usklađenih zadataka, zbog čega će u neusklađenim zadacima primijeniti računsku operaciju koja je suprotna od potrebne.

Ključne riječi: problemski matematički zadaci, zadaci usporedbe, neusklađeni zadaci, usklađeni zadaci, pogreške

Uvod

Nastava iz matematike u osnovnoj školi već od 1. razreda uključuje, uz računanje, i rješavanje problemskih matematičkih zadataka (Nastavni plan i program za osnovnu školu, 2006). Poučavanje je problemskih matematičkih zadataka bitno jer potiče razvoj konceptualnog znanja djece o aritmetičkim operacijama i drugim matematičkim pojmovima te omogućuje primjenu znanja o

✉ Nina Pavlin-Bernardić, Odsjek za psihologiju, Filozofski fakultet u Zagrebu, Ivana Lučića 3, 10 000 Zagreb. E-pošta: nbernardi@ffzg.hr

računanju u kontekstu stvarnoga svijeta (Briars i Larkin, 1984; Carpenter, 1986; Schroeder i Lester, 1989).

Istraživači su se 1980-ih godina intenzivnije počeli baviti dječjim rješavanjem problemskih matematičkih zadataka (npr. Riley i Greeno, 1988; Riley, Greeno i Heller, 1983). Naime, pokazalo se da su ovi zadaci djeci zahtjevniji od odgovarajućih numeričkih zadataka (npr. Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist i Reys, 1980; Vlahović-Štetić, 1996). Tako je djeci teži zadatak: "*Marija je imala tri čokoladice. Ana joj je dala još dvije čokoladice. Koliko čokoladica Marija sada ima?*" od zadatka " $3 + 2 = ?$ ". Rješavanje problemskih zadataka uključuje nekoliko faza: razumijevanje teksta zadatka, razumijevanje situacije u zadatku, odabir strategije rješavanja zadatka i izračun rezultata tom strategijom (Dellarosa, Weimer i Kintsch, 1985). Za razliku od toga, rješavanje numeričkih zadataka uključuje jedino posljednji od navedenih faza – izračun rezultata. Potrebno je samo prepoznati koji se znak za aritmetičku operaciju pojavljuje u zadatku i obaviti tu operaciju.

Problemski se matematički zadaci međusobno razlikuju prema više značajki, koje onda utječu i na njihovu težinu. Najkorisniju su klasifikaciju problemskih zadataka zbrajanja i oduzimanja predložili Riley i Greeno (1988), koji prema semantičkom odnosu koji se koristi za opisivanje problemske situacije razlikuju tri vrste zadataka: zadatke promjene, kombiniranja i usporedbe. Unutar ovih skupina zadataka postoje i dodatne podjele s obzirom na položaj nepoznate količine, jer je moguće oblikovati zadatke varirajući zadane informacije i onu koju treba otkriti, tako da se svaka skupina još dijeli na 6 vrsta zadataka. Detaljan se prikaz ove klasifikacije može naći u radu Riley i Greena (1988).

U zadacima promjene zbrajanje ili oduzimanje uzrokuje uvećanje ili umanjenje početne količine. Primjerice, rečenica "*Marko je imao tri autića*" predstavlja početni skup. Slijedi mijenjajući skup: "*Onda mu je Ivan dao pet autića*". Konačna količina ili završni skup je osam. Ovisno se o pojedinom zadatku početni skup kroz zadatak mijenja u uvećan ili umanjen završni skup.

U zadacima su kombiniranja zadana dva skupa koje treba ujediniti ili razjediniti. Primjerice, zadana su dva podskupa: "*Marko ima tri autića. Ivan ima pet autića*", i od rješavača se traži da ih ujedini u nadskup: "*Koliko autića imaju zajedno?*".

Kod zadataka usporedbe također postoje dva statična skupa koja se ne mijenjaju, već treba pronaći razliku među njima. Primjerice, u zadatku: "*Marko ima tri autića. Ivan ima pet autića. Koliko autića više ima Ivan od Marka?*" broj se Markovih autića (uspoređeni skup) uspoređuje s brojem Ivanovih autića (referentni skup).

Istraživanja konzistentno pokazuju da su djeci zadaci usporedbe najteži od ove tri vrste zadataka (Riley i Greeno, 1988; Stern i Lehrndorfer, 1992; Vlahović-Štetić, 1996; Vlahović-Štetić, Rovani i Mendek, 2004). U Tablici 1. su prikazane različite vrste zadataka usporedbe.

Tablica 1. Vrste zadataka usporedbe

Zadatak	Primjer zadatka	Nepoznata količina	Smjer promjene
U1	Ivan ima 8 pikula. Tomislav ima 5 pikula. Koliko pikula više ima Ivan od Tomislava?	razlika skupova	više
U2	Ivan ima 8 pikula. Tomislav ima 5 pikula. Koliko pikula manje ima Tomislav od Ivana?	razlika skupova	manje
U3	Ivan ima 3 pikule. Tomislav ima 5 pikula više od Ivana. Koliko pikula ima Tomislav?	uspoređeni skup	više
U4	Ivan ima 8 pikula. Tomislav ima 5 pikula manje od Ivana. Koliko pikula ima Tomislav?	uspoređeni skup	manje
U5	Ivan ima 8 pikula. On ima 5 pikula više od Tomislava. Koliko pikula ima Tomislav?	referentni skup	više
U6	Ivan ima 3 pikule. On ima 5 pikula manje od Tomislava. Koliko pikula ima Tomislav?	referentni skup	manje

Kako se iz Tablice 1. može vidjeti, nepoznata količina može biti u uspoređenom skupu, referentnom skupu ili njihovoj razlici. Također, jedan skup može imati više ili manje elemenata u usporedbi s drugim. Tako se kombiniranjem položaja nepoznate količine i odnosa među skupovima dobiva šest vrsta zadataka usporedbe.

Pokazalo se i da među različitim zadacima usporedbe postoje razlike u težini. Ovi su zadaci lakši ako je nepoznata razlika skupova (U1 i U2) ili uspoređeni skup (U3 i U4), dok su zadaci s nepoznatim referentnim skupom (U5 i U6) najteži problemski zadaci zbrajanja i oduzimanja na svim uzrastima (Okamoto i Case, 1996; Riley i Greeno, 1988; Stern, 1993; Vlahović-Štetić, 1996). Slično vrijedi i za problemske zadatke množenja i dijeljenja (Pape, 2003).

Postoji više mogućih objašnjenja dobivenih razlika u težini zadataka. Matematičko-logički modeli naglašavaju važnost konceptualnog znanja koje je potrebno za točno rješenje zadataka. Tako Riley, Greeno i Heller (1983) smatraju da rješavanje zadataka usporedbe s nepoznatim referentnim skupom zahtijeva razumijevanje komplementarnosti zbrajanja i oduzimanja. Okamoto (1996) navodi da za rješavanje ovih zadataka djeca moraju shvaćati da se brojevi mogu koristiti

kako bi iskazali razliku između dvije količine te da su te usporedbe simetrične. Primjerice, moraju razumjeti da se rečenice "*Monika ima 11 jabuka manje od Martina*" i "*Martin ima 11 jabuka više od Monike*" obje mogu koristiti kako bi opisale istu situaciju.

Za razliku od ovih modela, lingvistički modeli naglašavaju važnost razumijevanja i interpretiranja teksta zadatka (npr. Cummins, 1991; Kintsch, 1988, 1998; Kintsch i Greeno, 1985; Lewis i Mayer, 1987). Prema tim modelima rješavanje problemskoga zadatka započinje razumijevanjem teksta. Na temelju se verbalnoga oblika zadatka stvara reprezentacija teksta koja predstavlja osnovicu za matematičko rješavanje zadatka. Reprezentacija se teksta sastoji od dviju komponenata: srži teksta i modela problema. Srž su teksta osnovni podaci u tekstu zadatka, a model problema sadrži relevantne podatke iz teksta u obliku pogodnom za izvođenje računske operacije. Model problema konstruira se tako da rješavač donosi zaključke o podacima koji su nužni za rješenje problema, a nisu uključeni u srž teksta, i isključuje podatke koji nisu potrebni za rješenje problema, a nalaze se u srži teksta.

Model koji predlažu Lewis i Mayer (1987) usmjeren je upravo na objašnjenje procesa razumijevanja problemskih zadataka usporedbe. Oni su postavili *hipotezu usklađenosti*, kojom objašnjavaju razliku između zadataka usporedbe s nepoznatim uspoređenim skupom (U3 i U4) i zadataka usporedbe s nepoznatim referentnim skupom (U5 i U6). Ovi autori navode da je u usklađenim problemskim zadacima nepoznati skup subjekt druge rečenice u zadatku, a riječ koja opisuje odnos tih dvaju skupova je u skladu s matematičkom operacijom koju treba provesti ("više" ili "manje"). Problemski zadaci U3 i U4 stoga predstavljaju usklađene zadatke. U neusklađenim je problemskim zadacima nepoznata količina objekt druge rečenice, a riječ koja opisuje odnos skupova je suprotna matematičkoj operaciji koja je potrebna kako bi se riješio zadatak (u zadatku U5 ključna riječ je "više", no treba oduzeti brojeve, a u zadatku U6 obrnuto). Prema hipotezi usklađenosti rješavači zadataka obično koriste shemu za rješavanje usklađenih zadataka. Zbog te je sheme kod neusklađenih zadataka vjerojatnije da će promijeniti strukturu druge rečenice u zadatku tako da zamijene subjekt i objekt rečenice. Zbog toga će izvesti i suprotnu aritmetičku operaciju od potrebne.

Hipoteza je usklađenosti Lewisa i Mayera (1987) do sada provjeravana u nizu istraživanja (Hegarty, Mayer i Monk, 1995; Pape, 2003; van der Schoot, Arkema, Horsley i van Lieshout, 2009; Verschaffel, 1994; Verschaffel, De Corte i Pauwels, 1992). Ova istraživanja konzistentno potvrđuju hipotezu usklađenosti, no postoje i neki aspekti koji dosad nisu dovoljno istraživani. Većina je dosad provedenih istraživanja kao sudionike u istraživanju imala učenike koji više nisu na početnom stupnju učenja matematike, bilo da su to učenici petoga, šestoga i sedmoga razreda ili, pak, studenti. S obzirom na to, bilo bi važno ispitati kakva je uspješnost rješavanja zadataka usporedbe učenika koji se tek počinju sretati s ovom vrstom

zadataka i jesu li greške koje se javljaju pri rješavanju zadataka usporedbe uistinu u skladu s hipotezom usklađenosti.

U ovom smo istraživanju željeli detaljno ispitati kako se u nižim razredima osnovne škole mijenja uspješnost u rješavanju usklađenih i neusklađenih zadataka usporedbe. Zanimalo nas je koje se kategorije pogrešaka javljaju pri rješavanju ovih zadataka i je li većina pogrešaka u rješavanju zadataka usporedbe uistinu posljedica generaliziranja sheme za rješavanje usklađenih zadataka i na neusklađene zadatke.

U istraživanju su sudjelovali učenici od 1. do 4. razreda, koji se prema Piagetovoj teoriji kognitivnog razvoja nalaze u stadiju konkretnih operacija (Berk, 2008). Sukladno tome, svi su se postavljeni zadaci sadržajno odnosili na konkretne objekte, kao što su jabuke, loptice ili pikule.

Metoda

Sudionici

U istraživanju je sudjelovalo 285 učenika (160 dječaka i 125 djevojčica) iz dvije zagrebačke osnovne škole. Od toga je bilo 49 učenika 1. razreda (prosječne dobi 7.7 godina), 83 učenika 2. razreda (prosječne dobi 8.6 godina), 78 učenika 3. razreda (prosječne dobi 9.6 godina) i 75 učenika 4. razreda (prosječne dobi 10.6 godina).

Sudjelovanje je u istraživanju bilo dragovoljno, a za sve je sudionike dobiven roditeljski pristanak.

Korišteni zadaci

U istraživanju su korišteni zadaci usporedbe, i to dvije vrste ovih zadataka: U3 i U5. Svako je dijete rješavalo ukupno osam zadataka usporedbe: četiri zadatka U3 i četiri zadatka U5. Ti su zadaci odabrani zbog toga što u svom tekstu pri opisu usporedbe sadrže riječ 'više', a razlikuju se po tome što je kod zadatka U3 taj izraz usklađen s traženom računskom operacijom, dok kod zadatka U5 nije. Primjer korištenog zadatka U3 je: "*Martin ima četiri crteža. Ivan ima tri crteža više od Martina. Koliko crteža ima Ivan?*", a primjer korištenog zadatka U5: "*Dalibor ima devet loptica. On ima tri loptice više od Petra. Koliko loptica ima Petar?*". Ovo je ispitivanje bilo dio šireg istraživanja te su, osim zadataka usporedbe, djeca rješavala i 8 zadataka promjene, koji u ovom radu nisu korišteni u daljnjim analizama.

Zadaci su djeci zadavani slučajnim redoslijedom, a kao zadatak je za uvježbavanje korišten zadatak kombiniranja K1 ("*Bojan ima pet jabuka. Sanja ima tri jabuke. Koliko jabuka imaju zajedno?*").

Učenici 1. i 2. razreda rješavali su zadatke u kojima je bilo potrebno zbrajati ili oduzimati brojeve od 2 do 9, pri čemu se rezultat kretao u istom intervalu. Kako im

zadaci ne bi bili prelagani, učenici 3. i 4. razreda rješavali su zadatke s istim tekstom, u kojima je trebalo zbrajati ili oduzimati brojeve od 3 do 29, a rezultat se kretao između 20 i 29.

Svaki je točno riješen zadatak nosio 1 bod, a netočno riješen zadatak 0 bodova. Za svako su dijete formirani posebno rezultati za zadatke U3 i za zadatke U5, tako da se teoretski raspon bodova za svaku od ove vrste zadataka kreće od 0 do 4.

Postupak

Ispitivanje su provele suradnice u istraživanju - studentice viših godina studija psihologije, koje su bile posebno educirane za tu svrhu. Ispitivanje je provedeno individualno, pred kraj školske godine, tako da su i djeca 1. razreda već bila uvježbana u rješavanju matematičkih zadataka. Ispitivanje je provedeno u posebnoj prostoriji i po djetetu je trajalo između 10 i 20 minuta. Ispitivačica bi djetetu pročitala svaki zadatak, a ono je trebalo u sebi izračunati rezultat, reći rješenje te nakon toga objasniti kako je došlo do njega. Na početku je ispitivanja djetetu dana sljedeća uputa:

"Ovim ispitivanjem želimo otkriti kako djeca rješavaju neke matematičke zadatke. Zato ćemo i tebe zamoliti da nam u tome pomogneš. Hoćeš li? Sada ćeš riješiti nekoliko zadataka. Ja ću ti svaki zadatak pročitati. Trebaš pažljivo slušati, a kad ja završim s čitanjem zadatka, razmisli i reci mi svoj odgovor. Ja ću tvoj odgovor zapisati. Znači ti ne trebaš ništa pisati. Zatim ćeš mi objasniti kako si to izračunao/la. Kad završimo s jednim zadatkom, prijeći ćemo na sljedeći. Neki će zadaci biti lakši, neki teži pa ako ne budeš znao/la odgovor, reci i prijeći ćemo na sljedeći zadatak. Najprije ćemo zajedno riješiti primjer."

Kako bi se smanjilo opterećenje radnog pamćenja, ako dijete ne bi zapamtilo zadatak nakon čitanja, moglo je zatražiti da mu ga ispitivačica opet pročita. Dječji su odgovori bili zapisani u individualni protokol i snimljeni diktafonom.

Korištenje je retrospektivnoga verbalnog izvještavanja o načinu rješavanja zadatka odabrano jer se pokazalo da zahtjev za istovremenim izvještavanjem učenicima, pogotovo mlađim, ponekad može smetati pri rješavanju (Robinson, 2001), a Ericsson i Simon (1993) navode nalaze da su retrospektivni verbalni izvještaji valjani pod uvjetom da su dani neposredno nakon procesa o kojem se izvještava, da je taj proces trajao dovoljno dugo (duže od 1 sekunde) te da je relativno lako opisati ga, što su sve uvjeti koji su bili zadovoljeni u ovom ispitivanju.

Rezultati

Uspješnost učenika u rješavanju zadataka

U Tablici 2. je prikazan prosječni broj točno riješenih zadataka usporedbe U3 i U5 za učenike od 1. do 4. četvrtog razreda, te rezultati analize varijance.

Tablica 2. Uspjeh učenika različitih razreda u zadacima U3 i U5

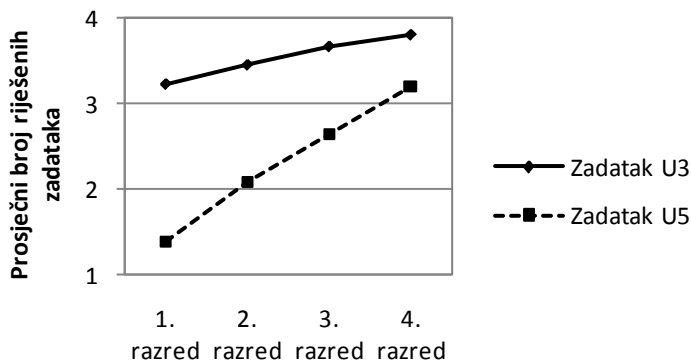
	Razred								F ^a		
	1. n = 49		2. n = 83		3. n = 78		4. n = 75		Razred	Zadatak	Interakcija
	U3	U5	U3	U5	U3	U5	U3	U5			
M	3.22	1.39 _{2,3,4}	3.45	2.08 _{1,3,4}	3.67	2.64 _{1,2}	3.81	3.20 _{1,2}	20.59**	138.91**	5.76**
SD	1.10	1.61	0.98	1.65	0.75	1.57	0.59	1.22			

**p < .01; ^a Stupnjevi slobode: zadatak 1, 281; razred 3, 281; interakcija 3, 281;

Brojevi uz aritmetičke sredine pokazuju koji se razredi međusobno razlikuju (Schefféov test)

Kao što se iz tablice može vidjeti, statistički se značajnim pokazao glavni efekt vrste zadatka, pri čemu je parcijalna $\eta^2 = .33$. Prosječan broj točno riješenih zadataka pokazuje da su djeca bila uspješnija u rješavanju zadataka U3. Statistički se značajnim pokazao i glavni efekt razreda (parcijalna $\eta^2 = .18$), kao i interakcija između ovih dviju varijabli (parcijalna $\eta^2 = .06$). Ova je interakcija prikazana na Slici 1.

Slika 1. Interakcije između prosječnog broja riješenih zadataka usporedbe i razreda koji učenici pohađaju



Na slici se može vidjeti kako je prosječan broj riješenih zadataka U3 u sva četiri razreda vrlo visok, tako da od 1. do 4. razreda ne dolazi do velikog porasta u tom broju. Prosječan je broj točno riješenih zadataka U5 u 1. razredu prilično nizak

i raste do 4. razreda, tako da je razlika između broja riješenih zadataka U3 i U5 u svakom razredu sve manja.

Pogreške pri rješavanju zadataka

Učenici su ukupno riješili 2280 zadataka usporedbe (285 učenika riješilo je po 8 zadataka), od čega su pogrešno riješili 573 zadatka (123 zadatka U3 i 450 zadataka U5). Dvoje je neovisnih procjenjivača analiziralo snimke dječjih odgovora na zadacima koji su riješeni pogrešno i svrstalo različite pogreške u kategorije. Za formiranje je kategorija korišten induktivni pristup. Nakon što je proces kodiranja dovršen, pregledavanjem su dobivenih rezultata pojedine kategorije uređene, spojene ili povezane u nadređene kategorije s ciljem jasnije interpretacije rezultata. U slučajevima kada se procjenjivači nisu slagali oko kategorije za neku pogrešku, ponovno su zajedno prošli kroz snimku i klasificirali odgovor.

Pogreške su svrstane u pet kategorija:

- 1) zadatak nije postavljen (učenik daje odgovor "Ne znam" ili "Pogađao sam rješenje");
- 2) pogreška u računu (primjerice, dijete dobro postavi zadatak kao $9 - 3 = ?$, ali onda krivo izračuna rješenje kao 7);
- 3) ponavljanje broja zadanog u zadatku kao rješenja (primjerice, dijete dobro postavi zadatak kao $9 - 3 = ?$, ali kao rješenje da broj 9, koji se spominje u zadatku);
- 4) suprotna računski operacija od potrebne (primjerice, zadatak treba riješiti kao $5 + 3 = 8$, a dijete ga riješi kao $5 - 3 = 2$);
- 5) višestruke pogreške (nije moguće jasno klasificirati, u pravilu zbog toga što se dvije ili više pogrešaka iz prethodnih kategorija javljaju zajedno).

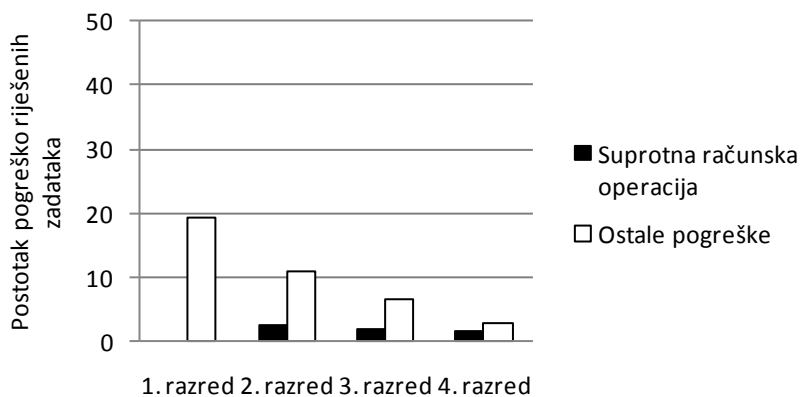
U Tablici 3. prikazan je postotak javljanja ovih pogrešaka (u odnosu na ukupan broj pogrešaka) u zadacima U3 i U5, za sva četiri razreda.

Tablica 3. Relativna frekvencija različitih vrsta pogrešaka za učenike od 1. do 4. razreda

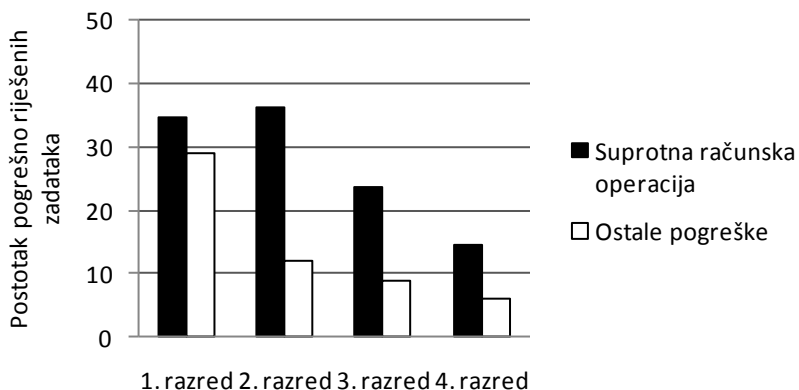
Pogreška	1. razred		2. razred		3. razred		4. razred		Ukupno	
	U3	U5	U3	U5	U3	U5	U3	U5	U3	U5
Zadatak nije postavljen	31.6	15.2	4.5	3.7	11.1	5.9	7.1	4.8	14.6	7.6
Pogreška u računu	2.6	0	4.5	0	25.9	3.0	0	4.8	8.1	1.3
Ponavljanje broja iz zadatka	26.3	5.6	6.8	0	0	1.0	14.3	1.6	12.2	2.0
Suprotna računski operacija	0	54.4	18.2	75.2	22.2	73.3	35.7	71.0	15.4	68.2
Višestruke pogreške	39.5	24.8	66.0	21.1	40.7	17.8	42.9	17.7	49.6	20.9

Iz Tablice 3. se može vidjeti da pogreške suprotne računске operacije dominiraju u zadacima U5. Ovaj je odnos još jasnije prikazan na Slikama 2. i 3., na kojima su postoci pogrešaka suprotne računске operacije i ostalih pogrešaka u zadacima U3 i U5 iskazani u odnosu na ukupan broj riješenih zadataka svake od tih vrsta u svakom razredu. Možemo vidjeti da je postotak ostalih pogrešaka u ovim zadacima sličan, dok razliku čini postotak pogrešaka suprotne računске operacije u zadacima U5.

Slika 2. Postoci pogrešaka suprotne računске operacije i ostalih pogrešaka u zadacima U3 u odnosu na ukupan broj riješenih zadataka U3 u svakom razredu



Slika 3. Postoci pogrešaka suprotne računске operacije i ostalih pogrešaka u zadacima U5 u odnosu na ukupan broj riješenih zadataka U5 u svakom razredu



Rasprava

Ovim smo istraživanjem željeli ispitati kako se u nižim razredima osnovne škole mijenja uspješnost u rješavanju različitih zadataka usporedbe, kakve pogreške učenici čine pri rješavanju ovih zadataka i jesu li one uistinu posljedica generaliziranja sheme za rješavanje usklađenih zadataka i na neusklađene zadatke, kao što predviđaju Lewis i Mayer (1987).

U skladu se s rezultatima drugih istraživanja (Okamoto i Case, 1996; Vlahović-Štetić, 1996) pokazalo da su zadaci U5 učenicima teži od zadataka U3. Uradak u zadacima U3 već je od 1. razreda relativno visok, tako da do 4. razreda ne dolazi do velikog porasta u prosječnom broju riješenih zadataka. No, prosječni broj riješenih zadataka U5 je u 1. razredu niži od 1, što znači da puno djece nije uspjelo točno riješiti niti jedan od četiri postavljena zadatka te vrste, a zatim broj točno riješenih zadataka postepeno raste u svakom od sljedećih razreda. S obzirom da su mlađa djeca, posebno ona u prvom razredu, istovremeno vrlo uspješna u rješavanju usklađenih i prilično neuspješna u rješavanju neusklađenih zadataka, možemo zaključiti da se ne radi o općenitom nesnalaženju pri rješavanju problemskih zadataka, već da lingvistički zahtjevi neusklađenih zadataka za njih predstavljaju velik izazov.

Važan pokazatelj izvora razlika u uspješnosti pri rješavanju usklađenih i neusklađenih zadataka može nam pružiti analiza pogrešaka koje djeca čine pri rješavanju ovih zadataka.

Pogreške su svrstane u pet kategorija: zadatak nije postavljen, pogreška u računu, ponavljanje broja zadanog u zadatku kao rješenja, suprotna računaska operacija i višestruke pogreške. Slične su kategorije dobivene i u drugim istraživanjima koja su se bavila pogreškama pri rješavanju problemskih zadataka (npr. Cummins, Kintsch, Reusser i Weimer, 1988; Vlahović-Štetić, 1996). Naši rezultati pokazuju da učenici najčešće rade pogreške iz kategorija "suprotne računske operacije" i "višestruke pogreške". Kategorija "zadatak nije postavljen", u kojoj dijete i ne pokuša riješiti zadatak, već odgovori da ga ne zna riješiti, za obje se vrste zadataka javlja češće u 1. razredu nego u ostalim razredima. Ovo je i očekivano jer u 1. razredu djeca imaju manje iskustva s rješavanjem ove vrste zadataka. Prema Nastavnom je planu i programu za osnovnu školu (2006) rješavanje zadataka zadanih riječima navedeno kao posljednja, 21. tema u programu matematike za 1. razred, te se oni obrađuju nakon što djeca svladaju zbrajanje i oduzimanje brojeva do 20. Naše je ispitivanje provedeno pred kraj školske godine, ali očekuje se je da će zbog manjeg iskustva u rješavanju ovih zadataka djeca na njih češće davati odgovor "ne znam".

Pogreške su se iz kategorije "pogreška u računu" u svim razredima javljale relativno rijetko. U ovu su kategoriju svrstani netočno riješeni zadaci u kojima je dijete dobro postavilo zadatak, ali je onda netočno izračunalo rezultat. Ovi podaci također ne iznenađuju jer su u zadacima korišteni brojevi čijim zbrajanjem i

oduzimanjem djeca u mlađim razredima osnovne škole imaju dosta iskustva te su stoga, kada su dobro postavila zadatak, najčešće i točno izračunala rezultat.

Pogreška "ponavljanje broja iz zadatka" također se nije javljala jako često, s tim da je bila češća u 1. razredu nego u ostalim razredima. Kod ove bi pogreške djeca kao rješenje rekla jedan od brojeva koji su zadani u zadatku, iako je njihov retrospektivni verbalni izvještaj pokazao da su dobro postavila zadatak. Kako su djeca zadatke rješavala mentalnom aritmetikom i nisu sama mogla čitati tekst zadatka s papira, moguće je da se ova pogreška javila kod nekih učenika zbog opterećenja radnoga pamćenja – dok su računali rezultat, mogli su pomiješati koji su brojevi zadani u zadatku, a koji je broj rješenje i zato reći broj zadan u zadatku kao rješenje. Kapacitet je radnoga pamćenja manji u 1. razredu nego u kasnijim razredima (npr. Gathercole, Pickering, Ambridge i Wearing, 2004), pa je moguće da su neki učenici 1. razreda zato činili ovu pogrešku, iako se ona općenito nije često javljala.

Naši rezultati pokazuju da postoje razlike u postotku javljanja određenih pogrešaka u zadacima U3 i U5, tj. u usklađenim i neusklađenim zadacima. U zadacima U5 jasno dominira pogreška suprotne računske operacije, a druga po čestini je kategorija "višestruke pogreške", koja se odnosi na zadatke u kojima nije učinjena samo jedna pogreška, već neka od kombinacija ostalih četiriju kategorija.

Kao što smo ranije naveli, u zadacima U3 općenito je u svim razredima bilo manje pogrešaka. Pogreške suprotne računske operacije su puno rjeđe nego u zadacima U5, a dominantna je kategorija pogrešaka "višestruke pogreške", iako njihova čestina nije jako velika u odnosu na zadatke U5.

Dobiveni su rezultati u skladu s hipotezom usklađenosti Lewisa i Meyera (1987). Podsjetimo se, prema terminologiji koju predlažu ovi autori, zadaci U3 predstavljaju tzv. usklađene problemske zadatke, u kojima je nepoznati skup subjekt druge rečenice u zadatku, a riječ koja opisuje odnos tih dvaju skupova je u skladu s matematičkom operacijom koju treba provesti. Zadaci U5 predstavljaju neusklađene problemske zadatke, u kojima je nepoznata količina objekt druge rečenice, a riječ koja opisuje odnos skupova je suprotna matematičkoj operaciji koja je potrebna kako bi se riješio zadatak. Prema hipotezi usklađenosti, rješavači zadataka obično koriste shemu za rješavanje usklađenih zadataka, zbog čega će u neusklađenim zadacima primijeniti računsku operaciju koja je suprotna od potrebne. To je u skladu s rezultatima naše analize pogrešaka pri rješavanju zadataka, koji pokazuju da se dobivena razlika u broju netočno riješenih zadataka javila uglavnom zbog pogrešaka suprotne računske operacije u zadacima U5. Tako su učenici u našem ispitivanju, primjerice, rješenje zadatka "*Dalibor ima devet loptica. On ima tri loptice više od Petra. Koliko loptica ima Petar?*" dobili zbrajanjem brojeva 9 i 3, umjesto da su od 9 oduzeli 3.

Lewis i Meyer (1987) su proveli istraživanje u kojem su sudionici bili studenti i, slično našim rezultatima, pokazalo se da su i oni općenito na zadacima usporedbe činili više pogrešaka suprotne operacije od računskih pogrešaka, te da su činili više

pogrešaka suprotne računске operacije na neusklađenim zadacima nego na usklađenim zadacima. Verschaffel, DeCorte i Pauwels (1992) su također pokazali da učenici 3. razreda osnovne škole čine više pogrešaka suprotne računске operacije na neusklađenim zadacima nego na usklađenim zadacima. Uz to, Verschaffel (1994) i Pape (2003) su u svojim istraživanjima pokazali da se kada se od ispitanika traži da prepričaju zadani zadatak, češće događa da neusklađeni zadatak prepričaju kao da je bio usklađen, nego obrnuto. To je također nalaz koji govori u prilog tvrdnji da rješavači obično koriste shemu za usklađene zadatke pri rješavanju neusklađenih zadataka.

Naši su rezultati pokazali da uspješnost u rješavanju problemskih zadataka usporedbe U5 od 1. do 4. razreda raste. Kako bi učenici uspješno analizirali situaciju u zadatku i dobro reprezentirali problem, važno je da razumiju tekst zadatka. Pokazalo se da se s dobi razvija nadgledanje razumijevanja kao komponenta metakognicije (npr. Baker, 1984; Pazzaglia, De Beni i Caccio, 1999), tako da starija djeca bolje prate vlastito razumijevanje teksta. Prilikom rješavanja problemskih matematičkih zadataka stariji učenici stoga mogu bolje procijeniti jesu li dobro razumjeli tekst zadatka te je li njihova reprezentacija problema dobra ili je treba mijenjati.

Iako rezultati ovog istraživanja daju korisna saznanja o načinu rješavanja i pogreškama u zadacima usporedbe, ono ima i određena ograničenja. U istraživanju su kao primjer usklađenih zadataka korišteni zadaci U3, a kao primjer neusklađenih zadataka zadaci U5. Obje ove vrste zadataka u sebi sadrže ključne riječi "više od", tako da bi bilo korisno provesti ispitivanje koje bi uključilo i zadatke U4 i U6, koji sadrže ključne riječi "manje od", kako bi hipoteza usklađenosti bila sveobuhvatnije provjerena. Također, tekst zadatka nije bio pred učenicima, već im je bio pročitao, čime smo željeli izjednačiti učenike početnih razreda koji slabije čitaju s učenicima starijih razreda. No, moguće je da bi zbog dobnih razlika u radnom pamćenju učenika ipak bilo bolje da su imali tekst pred sobom i mogli ga pratiti.

Naše je istraživanje obuhvatilo sudionike od 1. do 4. razreda osnovne škole i pokazalo da su učenicima nižih razreda osnovne škole zadaci usporedbe s nepoznatim referentnim skupom vrlo teški i da u njima najčešće čine pogreške suprotne računске operacije. S obzirom da su sudionici u našem istraživanju upravo one dobi kad su u školi najviše izloženi problemskim zadacima, ovi rezultati imaju važne praktične implikacije za poučavanje zadataka usporedbe u školi. Učenike bi trebalo upozoriti na razloge javljanja ovakvih pogrešaka pri rješavanju zadataka te ih potaknuti da razviju primjerene kognitivne sheme za različite tipove zadataka. One se mogu poticati traženjem učenika da sami prepričaju zadatak kako bi bilo jasno da su ga ispravno shvatili i shematskim prikazom elemenata u zadatku (skupova, podskupova i smjera promjene količine, npr. Brenner i sur., 1997; Hohn i Frey, 2002). Da bi način poučavanja problemskih zadataka bio što učinkovitiji, bilo bi se važno detaljnije upoznati s načinom na koji manje uspješni učenici pristupaju rješavanju problemskih zadataka te koje od spomenutih metoda dovode do

značajnog poboljšanja u rješavanju problema, na što će, nadamo se, buduća istraživanja dati odgovor.

Literatura

- Baker, L. (1984). Spontaneous versus instructed use of multiple standards for evaluating comprehension: Effects of age, reading proficiency, and type of standard. *Journal of Experimental Child Psychology*, 38, 289-311.
- Berk, L.E. (2008). *Psihologija cjeloživotnog razvoja*. Jastrebarsko: Naklada Slap.
- Brenner, M.E., Mayer, R.E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R. Smith, B. i sur. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 34, 663-689.
- Briars, D.J. i Larkin, J.H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, 3, 245-296.
- Carpenter, T.P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetics. U: J. Hiebert (Ur.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (str. 113-132). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Carpenter, T.P., Corbitt, M.K., Kepner, H.S., Lindquist, M.M. i Reys, R.E. (1980). Solving verbal problems: Results and implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher*, 28, 8-12.
- Cummins, D.D. (1991). Children's interpretation of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction*, 8, 261-289.
- Cummins, D.D., Kintsch, W., Reusser, K. i Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20, 405-438.
- Dellarosa, D., Weimer R. i Kintsch, W. (1985). *Children's recall of arithmetic word problems* (Institute of Cognitive Science Tech. Rep. No.14). Boulder: University of Colorado.
- Ericsson, K.A. i Simon, H.A. (1993). *Protocol analysis: Verbal reports as data (Revised edition)*. Cambridge: MIT Press.
- Gathercole, S.E., Pickering, S.J., Ambridge, B. i Wearing, H. (2004). The structure of working memory from 4 to 15 years of age. *Developmental Psychology*, 40(2), 177-190.
- Hegarty, M., Mayer, R.E. i Monk, C.A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87, 18-32.
- Hohn, R.L. i Frey, B. (2002) Heuristic training and performance in elementary mathematical problem solving. *The Journal of Educational Research*, 95, 374-380.

- Kintsch, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: A construction-integration model. *Psychological Review*, 95, 163-182.
- Kintsch, W. (1998). *Comprehension: A paradigm for cognition*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Kintsch, W. i Greeno, J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92, 109-129.
- Lewis, A. i Mayer, R. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 74, 199-216.
- Nastavni plan i program za osnovnu školu (2006). Zagreb: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa.
- Okamoto, Y. (1996). Modeling children's understanding of quantitative relations in texts: A developmental perspectives. *Cognition and Instruction*, 14, 409-440.
- Okamoto, Y. i Case, R. (1996). Exploring the microstructure of children's central conceptual structures in the domain of number. *Monographs of the Society for Research in Child Development Serial*, 61, 1-2.
- Pape, S.J. (2003). Compare word problems: Consistency hypothesis revisited. *Contemporary Educational Psychology*, 28, 396-421.
- Pazzaglia, F., De Beni, R. i Caccio, L. (1999), The role of working memory and metacognition in reading comprehension difficulties. U: T.E. Scruggs i M.A. Mastropieri (Ur.), *Advances in learning and behavioral disabilities*, Vol. 13 (str. 115-134), Greenwich: JAI Press.
- Riley, M.S. i Greeno, J.G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, 5(1), 49-101.
- Riley, M.S., Greeno, J.G. i Heller, J.J. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. U: H.P. Ginsburg (Ur.), *The development of mathematical thinking* (str. 153-196). New York: Academic Press.
- Robinson, K.M. (2001). The validity of verbal reports in children's subtraction. *Journal of Educational Psychology*, 93, 211-222.
- Schroeder, T.L. i Lester, F.K. Jr. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. U: P.R. Trafton i A.P. Schulte (Ur.), *New directions for elementary school mathematics: 1989 year book* (str. 31-42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *Journal of Educational Psychology*, 85, 7-23.
- Stern, E. i Lehrndorfer, A. (1992). The role of situational context in solving word problems. *Cognitive Development*, 7, 259-268.

- van der Schoot, M., Arkema, A.H.B, Horsley, T.M. i van Lieshout, E.C.D.M. (2009). The consistency effect depends on markedness in less successful but not successful problem solvers: An eye movement study in primary school children. *Contemporary Educational Psychology*, 34, 58-66.
- Verschaffel, L. (1994). Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems. *Journal for Research on Mathematics Education*, 25, 141-165.
- Verschaffel, L., DeCorte, E. i Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: An eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology*, 84, 85-94.
- Vlahović-Štetić, V. (1996). *Problemski matematički zadaci i uspješnost njihova rješavanja u početku školovanja*. Doktorska disertacija. Filozofski fakultet. Sveučilište u Zagrebu, Zagreb.
- Vlahović-Štetić, V., Rován, D. i Mendek, Ž. (2004). The role of students' age, problem type and situational context in solving mathematical word problems. *Review of Psychology*, 11(1-2), 25-33.

When in Math "More" Really Means "Less": Analysis of Children's Achievement in Solving Compare Word Problems

Abstract

The aim of this study was to examine the achievement in consistent language and inconsistent language comparative problems in lower primary school classes. Specifically which categories of errors children make while solving these problems and to determine whether the results are in accordance with Lewis and Mayer's (1987) consistency hypothesis.

Participants were 285 first to fourth grade elementary school students. They were tested individually with consistent language and inconsistent language comparative problems. The results show that there are differences in achievement regarding the type of problem and grade, as well as an interaction between these two variables. The students were more successful in solving consistent language problems than inconsistent language problems. This difference was largest for the 1st grade students, and it was smaller in every subsequent grade, although 4th grade students were also more successful in solving consistent language problems.

To better understand the reasons for these differences, we analyzed children's errors in solving both kinds of problems. When solving inconsistent language problems, the participants most frequently committed a reversal error, using the opposite arithmetical operation to solve the problem. These results are in accordance with Lewis and Mayer's (1987) consistency hypothesis, which asserts that individuals develop a schema for the consistent language relational statements and because of that use the opposite arithmetical operation in inconsistent language problems.

Keywords: mathematical word problems, compare problems, inconsistent language problems, consistent language problems, errors

Primljeno: 26.10.2010.