

## O MODELIRANJU BINARNIH METEOROLOŠKIH SLJEDOVA S POSEBNIM OSVRTOM NA ČESTINE TOPLIH I HLADNIH RAZDOBLJA

### On modelling binary meteorological sequences with special emphasis on frequencies of warm and cold spells

JOSIP JURAS

Geofizički zavod, Prirodoslovno matematički fakultet, Zagreb

**Sažetak:** Prikazani su razni pristupi pri analizi čestina toplih i hladnih razdoblja koji su korišteni u literaturi. Ukazano je na relativno mali broj radova na ovom području u usporedbi s velikim brojem modela za kišna i sušna razdoblja. Glavne teškoće pri modeliranju temperaturnih nizova posljedica su njihove nestacionarnosti. Također, statistička struktura nizova koji su dobijeni kategorizacijom (u dvije kategorije) iz kontinuiranih vrijednosti nekog meteorološkog elementa vrlo je složena, iako struktura izvornog vremenskog niza ima jednostavni oblik autoregresije. U radu se ukazuje na to da zbog sličnosti autokorelacionih funkcija diskretiziranog procesa autoregresije prvog reda AR (1) i modela DARMA (1, 1) postoji mogućnost da se kvalitativni (diskretni) nizovi meteoroloških veličina (koje su u svojoj osnovi kontinuirane) uspješno modeliraju pomoću modela DARMA (1,1). Čak što više, dva parametra koji određuju oblik autokorelacione funkcije ovog modela mogu se procijeniti iz koeficijenta autokorelacije osnovnog niza. Na nekim primjerima prikazane su mogućnosti ovog modela i uspoređene s drugim metodama uobičajenim pri modeliranju diskretnih vremenskih nizova.

**Ključne riječi:** Binarni nizovi, topla i hladna razdoblja, metoda simulacije vremenskih nizova, DARMA model

**Abstract:** Different methods applicable in the analysis of the frequency of warm and cold spells are presented. It is pointed out that only a few papers on this subject exist, compared to a great number of papers on the frequency of dry and wet spells modelling. One reason for this can be found in the nonstationarity of the temperature series. The other reason is that although the temperature series can be represented by the simple first-order autoregressive process, the sequences of the arbitrary defined cold and warm days have a very complicated statistical structure. The autocorrelation function of the discret sequences which originate from the basic AR (1) model is very similar to the autocorrelation function of DARMA (1, 1) model. Two parameters which describe the autocorrelation within the discret series are closely related to each other and both to the single correlation parameter of the basic continuous series. The capability of model is tested on some examples and the results are compared to the others obtained by the methods common in the temperature series modelling.

**Key words:** Temperature time series, warm and cold spells, simulating time series, DARMA (1, 1) model.

#### 1. UVOD

Teorija sljedova (koraka, nizova) u širokoj je upotrebi u klimatologiji pri ispitivanju stacionarnosti i nezavisnosti vremenskih nizova. Međutim teorija sljedova za nizove zavisnih kontinuiranih promjenljivih danih u diskretnim trenucima, a takve su gotovo sve meteorološke veličine, vrlo je složena i još nedovoljno razvijena. Zbog toga je razumljivo da u meteorološkoj literaturi postoji relativno malo radova koji se bave stohastičkim modeliranjem temperaturnih sljedova, iako je njihova praktična važnost nesumnjiva. Teškoće koje su vezane uz procjene parame-

tara i raspodjelu dužina sljedova kontinuiranih varijabli imale su za posljedicu da se pri ispitivanju sljedova temperatura koriste vrlo različite metode. Pojedini istraživači zadržavaju se samo na razmatranju empiričkih čestina sljedova dana sa nekom zajedničkom karakteristikom s obzirom na temperaturu (Lowndes, 1963; Hamilton, 1988). Kriterij, na osnovi kojeg se kontinuirane vrijednosti temperatura kategoriziraju (diskretiziraju) u dvije ili više kategorija posve je proizvoljan. Katkada se uzima srednja vrijednost za određeno razdoblje, a katkada neka uobičajena čvrsta granica, na primjer 30°C za maksimalne temperature. Oslanjanje na empiričke relativne čestine dužina sljedova može dati sasvim pogrešnu sliku o vje-

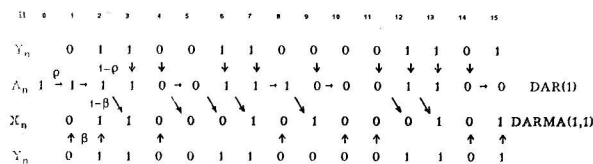
rojatnosti za vrlo dugačke sljedova koji imaju upravo najveći praktični značaj. Zbog toga veću pouzdanost imaju procjene koje su dobivene na osnovi različitih statističkih modela. Međutim ne treba zaboraviti da empiričke relativne čestine predstavljaju nezamjenjivu osnovu za formuliranje modela i njegovu provjeru. Na osnovi podataka Lowndesa (1963), Caskey (1964) je pokazao da čestina toplih razdoblja dužih od 3 dana eksponencijalno opada, što je karakteristično za model Markovljevih lanaca. Sličan je pristup i Sakamoto (1970) pri analizi toplih razdoblja u Nevadi. Da bi eliminirao nestacionarnost temperaturnih nizova, Sakamoto analizira čestine toplih nizova unutar razdoblja od samo sedam dana koristeći model Markovljevih lanaca prvog i drugog reda. Među najznačajnije radova na ovom području treba ubrojiti radove Kagana i Fedodčenko (1970a, 1970b, 1975). U ovim radovima za procjenu parametara sljedova autori se koriste analitičkim metodama na osnovi teorije presijecanja (ruski: vybrosa, engl.: crossing) i metodom simulacije. Metodu simulacije koriste i Mearns et al. (1984) pri ispitivanju mogućih posljedica koje bi globalno zatopljenje moglo imati na povećanje čestine dužih vrućih razdoblja. Neki rezultati iz navedenih radova poslužiti će za ilustraciju jednog novog mogućeg pristupa pri modeliranju zavisnih vremenskih sljedova.

U drugom odlomku daje se kratki prikaz osnovnih karakteristika modela autoregresije i pokretnog srednjaka za diskretne slučajne promjenljive – DARMA (1, 1) model. Prikazan je način generiranja podataka i oblik autokorelacione funkcije (akf) ovog modela. U trećem odlomku razmatra se oblik akf procesa koji nastaje diskretizacijom kontinuirane slučajne varijable, koja se podvrgava Markovljevom procesu, u binarnu varijablu. U četvrtom odlomku prikazane su različite metode za procjenu parametara modela. U petom odlomku na nekoliko primjera ilustrira se mogućnost primjene modela DARMA (1, 1) za određivanje karakteristika sljedova dana sa istim obilježjem s obzirom na temperaturu zraka. U zaključcima daju se neke opće napomene o mogućnosti i limitirajućim faktorima pri upotrebi razmatranog modela.

## 2. NEKE KARAKTERISTIKE MODELA DARMA (1, 1)

Modele DARMA (p, q) za diskretne slučajne varijable razvili su u nizu radova Jacobs i Lewis (1978). Još u toku njihovog objavljivanja Buishand (1979) je primjenio model DARMA (1, 1) za analizu kišnih i sušnih razdoblja. Vrlo pregledan opis svojstava modela DARMA i primjere za njihovu primjenu mogu se naći u radovima Chang et al. (1984a, 1984b). Ovdje će biti prikazan samo način na koji se generira niz binarne slučajne varijable kao i oblik akf za ovaj model.

Slučajna varijabla  $X_n$  poprima jednu od dviju mogućih vrijednosti (0 ili 1) na osnovi vjerojatnosne kombinacije elemenata  $Y_n$  i  $A_{n-1}$ .  $Y_n$  predstavlja niz identično i nezavisno raspodijeljenih slučajnih varijabli koje poprimaju vrijednost 1 s vjerojatnošću  $\pi_1$  a vrijednost 0 s vjerojatnošću  $\pi_0$ . Autoregresivni dio modela  $A_n$  poprima vrijednost prethodne vrijednosti  $A_{n-1}$  s vjerojatnošću  $q$  vrijednost  $Y_n$  s vjerojatnošću  $1 - q$  (Sl. 1). Koja će od ovih vrijednosti generirati određenu vrijednost  $A_n$ , posve je slučajna događaj, ali vjerojatnost da će to biti  $A_{n-1}$  jednaka je iznosu parametra modela  $q$ . Niz ovako generiranih binarnih varijabli  $A_n$  predstavlja DAR (1) model koji je poznatiji pod imenom Markovljev lanac (prvoga reda).



Sl. 1. Shematski prikaz generiranja binarnog niza  $X_n$  modelom DARMA (1, 1). Binarni niz  $A_n$  predstavlja model DAR (1). Slučajni niz  $Y_n$  u prvom i posljednjem retku je identičan!

Fig. 1. Schematic representation of the DARMA (1, 1) process which generates binary sequence  $X$ . Binary sequence  $A$  represent DAR (1) process. The sequences of  $Y$  in the first and last row are identical. The parameters of model are:  $\pi_1 = q = \beta = 0.5$

Niz vrijednosti  $X_n$  modela DARMA (1, 1) generiraju se iz vrijednosti  $Y_n$  s vjerojatnošću  $\beta$  ili poprimaju vrijednost  $A_{n-1}$  s vjerojatnošću  $1 - \beta$ . Slučajne varijable  $A_n$  i  $X_n$  imaju istu marginalnu razdiobu kao i  $Y_n$ . Prema tome: model je potpuno određen sa tri parametra  $\pi_1$ ,  $q$  i  $\beta$ . Posljednji parametar  $\beta$  daje modelu daleko veće mogućnosti da opiše raznolikost osobina diskretnih nizova koje susrećemo u praksi nego li što to pruža model Markovljevih lanaca koji je međutim daleko jednostavniji. Potrebno je istaknuti da iako niz vrijednosti  $X_n$  nije Markovljev bivarijantni niz  $\{X_n, A_n\}$  predstavlja bivarijantni Markovljev lanac jer ovisi samo o  $A_{n-1}$ . Uvjetne vjerojatnosti pojedinih kombinacija parova  $\{X_n, A_n\}$  za dani  $A_{n-1}$  daju se izraziti pomoću parametara modela što daje modelu relativno jednostavnu strukturu koja je, kao što je već istaknuto, ipak znatno složenija od modela Markovljevih lanaca.

Autokorelaciona funkcija modela DARMA (1, 1) (Jacobs and Lewis, 1978) može se prikazati relacijom

$$d_k = cq^{k-1} \quad (1)$$

gdje je  $c$  koeficijent autokorelacije za korak 1 i može se izraziti parametrima modela u obliku

$$c = (1 - \beta)(q + \beta - 2q\beta) \quad (2)$$

Zgodnije je zbog toga smatrati  $c$  parametrom modela umjesto veličine  $\beta$  čiji je smisao manje zoran.

## 3. USPOREDBA AUTOKORELACIONIH FUNKCIJA MODELA AR (1) I DARMA (1, 1)

Vremenski niz kontinuiranih vrijednosti temperature zraka u diskretnim i jednakim intervalima vremena pokazuje osobine Markovljevog procesa i kako se radi o kontinuiranim vrijednostima, niz se može dobro opisati modelom autoregresije prvog reda AR (1) (Leith, 1973). Autokorelaciona funkcija za ovaj proces ima dobro poznat oblik

$$\rho_k = \rho_1^k \quad (3)$$

Ako se taj vremenski niz transformira (diskretizira) na binarni niz tako da vrijednostima većim od srednjaka pridružimo vrijednost 1 (obilježje toplo) a manjim od srednjaka vrijednost 0 (obilježje hladno) dolazimo do binarnog diskretnog niza vrijednosti nula i jedinica u diskretnim

| k | $q_k$ | $d_k$ | $d_k/d_{k-1}$ |
|---|-------|-------|---------------|
| 0 | 1     | 1     |               |
| 1 | 0,8   | 0,590 | 0,590         |
| 2 | 0,64  | 0,442 | 0,749         |
| 3 | 0,512 | 0,342 | 0,774         |
| 4 | 0,410 | 0,269 | 0,785         |
| 5 | 0,328 | 0,213 | 0,791         |
| 6 | 0,262 | 0,169 | 0,795         |

**Tabela 1. Primjer autokorelacionih funkcija  $q$  (k) procesa AR (1) i  $d$  (k) za odgovarajući binarni diskretni niz s marginalnom razdiobom  $\pi_0 = \pi_1 = 0.5$**

**Table 1. Example of autocorrelation functions  $q$  (k) for AR (1) process and  $d$  (k) for corresponding binary series with marginal distribution  $\pi_0 = \pi_1 = 0.5$**

intervalima vremena. Takav niz vrijednosti, koje obično nazivamo lancem, neće međutim imati osobine diskretnog modela autoregresije DAR (1). Autokorelaciona funkcija za takav diskretni niz nemože se izraziti samo jednim parametrom kao što to imamo u relaciji (3). Za slučajne varijable koje imaju normalnu razdiobu i koje su diskretizirane srednjakom, postoji jednostavna relacija koja daje vezu između odgovarajućih koeficijenata korelacije  $q$  i  $d$  kontinuirane i diskretne varijable. Ta relacija ima oblik

$$q = \sin \frac{\pi}{2} d \quad (4)$$

U tab. 1. dane su numeričke vrijednosti za jedan primjer akf kontinuirane slučajne varijable i pripadne akf za diskretnu slučajnu varijablu. Numeričke vrijednosti koeficijenata korelacije diskretiziranog niza manje su od odgovarajućih vrijednosti izvornog niza. Iz tablice je uočljivo da se  $d_k$  nakon prvog koraka smanjuje približno na isti način kao i  $q_k$  i to za faktor 0.8 odnosno za vrijednost  $q_1$ . Takvu osobinu ima upravo akf modela DARMA (1, 1). Ova sličnost akf diskretiziranog niza AR (1) sa akf modela DARMA (1, 1) otvara perspektivu da bi se pomoću modela DARMA (1, 1) moglo uspješno prikazati osobine diskretnih nizova koji za svoju osnovu imaju kontinuirane veličine sa osobinama modela AR (1), a takvim se u prvoj približnosti mogu smatrati nizovi velikog broja meteoroloških elemenata.

#### 4. ODREĐIVANJE PARAMETARA MODELA DARMA (1, 1)

Model DARMA (1, 1) određen je sa tri parametra: marginalnom vjerojatnošću  $\pi_1$  te vrijednostima  $c$  i  $q$  kojima je određen oblik akf. Marginalnu vjerojatnost  $\pi_1$  lako možemo odrediti izbrojavanjem jedinica unutar razmatranog razdoblja. Ako međutim raspolažemo sa razdiobom dužina nizova kategorija (jedinica i nula) tada se na osnovi srednjih trajanja  $\mu_1$  i  $\mu_0$  može odrediti marginalna vjerojatnost  $\pi_1$  prema relaciji

$$\pi_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_0} \quad (5)$$

Ovako određena vjerojatnost može se nešto razlikovati od vrijednosti određenih za kalendarsko razdoblje jer počeci i krjevi nizova ne poklapaju se s granicama kalendarskog razdoblja.

Parametar  $c$  predstavlja bitnu veličinu kojom je određena akf. Ako se raspolaže vrijednostima empiričke akf, tada se za parametar  $c$  uzima vrijednost koeficijenta autokorelacije (k. ak) za jedinični korak u vremenu ( $d_1$ ). Parametar  $c$  predstavlja razliku uvjetnih vjerojatnosti za nastavak niza i početak niza

$$\left. \begin{aligned} c &= p_{11} - p_{01} \\ c &= 1 - p_{10} - p_{01} \end{aligned} \right\} (6)$$

Uvjetna vjerojatnost za prekid niza ( $p_{10}$ ) obrnuto je proporcionalna srednjem trajanju niza ( $\mu_1$ ) pa možemo pisati

$$c = 1 - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_0} \quad (7)$$

Parametar  $q$  u relaciji (1) određuje iznos opadanja akf sa povećanjem koraka. Njega se može odrediti na više načina koje ćemo svaki posebno razmotriti.

(a) Najjednostavniji način za određivanje parametara  $q$  je na osnovi razdiobe dužina trajanja nizova. Razlika između koeficijenata korelacije za korak 1 i korak 2 može se izraziti srednjim trajanjem nizova i relativnim čestinama nizova jediničnog trajanja (Buishand, 1979):

$$d_1 - d_2 = \frac{\mu_1 + \mu_0}{\mu_1 \mu_0} [1 - f_0(1) - f_1(1)],$$

dok sam parametar  $q$  dobijemo kao omjer vrijednosti  $d_2$  i  $d_1$ .

(b) Rjedi je slučaj da raspolažemo empiričkom akf za diskretni niz. Tada za procjenu parametra  $q$  Chang et al. (1984) predlažu da se koristi relacija

$$q = \frac{d_2 + d_3 + \dots + d_k}{d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1}} \quad (9)$$

ili da se parametri  $c$  i  $q$  odrede na taj način da zbroj kvadrata odstupanja između teoretske i empiričke akf bude minimalan, tj. da se minimalizira izraz

$$\sum_{k=1}^n (c_0^k - d_k)^2 \quad (10)$$

Različite metode procjene parametra  $q$  vode obično dosta različitim numeričkim vrijednostima. Ako se želi modelom dobro opisati čestine kraćih nizova, tada se preporuča relacija (8). Obično je naš interes veći za procjene čestina dužih nizova (koji u empiričkim podacima često nisu ni prisutni). U tom slučaju preporučuje se relacije (9) i (10) i pri tome uzimanje u obzir što većeg dijela empiričke akf (što veći  $n$ ).

(c) Ova nejednoznačnost u procjeni parametra  $q$  opravdava mogućnost iznesenu u odlomku 3. da se parametar  $q$  procijeni iz vrijednosti  $c$  i  $\pi_1$ , na osnovi sličnosti akf diskretnih i kontinuiranih vrijednosti. Prednost ove metode je i u tome da se model DARMA (1, 1) svodi od troparametarskog na dvoparametarski. Veza između korelacionog parametra  $c$  diskretnog niza i parametra  $q$  modela autoregresije prvog reda dana je preko združenih vjerojatnosti koja se za kontinuirane veličine određuju pomoću bivarijatne normalne razdiobe (BNR). Združena vjerojatnost da su dvije uzastopne vrijednosti u nizu, koji ima osobine modela AR (1), obje manje od nekog praga  $t$ , dana je integralom

$$P(y_1 \leq t, y_2 \leq t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t z(y_1, y_2, \varrho) dy_1, dy_2 \quad (11)$$

gdje je  $z$  funkcija gustoće BNR

$$z(y_1, y_2, \varrho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2 \varrho}{2(1-\varrho^2)}\right)$$

S druge strane združena vjerojatnost može se izraziti i pomoću marginalne vjerojatnosti  $\pi_1$  i diskretnog koeficijenta korelacije u obliku

$$P = \pi_1^2 + \pi_1(1 - \pi_1)c \quad (12)$$

Marginalnoj vjerojatnosti  $\pi_1$  odgovara normalna devijata  $t$  u (11). Iako veza između  $\varrho$  i  $c$  nije jednostavna moguće je numeričkom integracijom relacije (11), tablicama ili raznim aproksimativnim relacijama uspostaviti vezu između parametara  $\varrho$  i  $c$ .

## 5. PRIMJERI

### 5.1. Topla i hladna razdoblja u Zagrebu

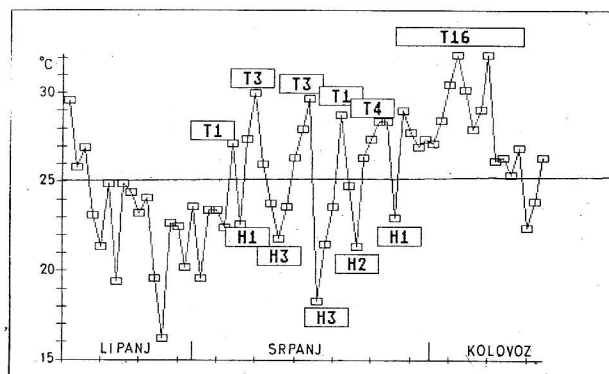
Na osnovi podataka o maksimalnim dnevnim temperaturama zraka u srpnju mjesecu za stanicu Zagreb-Maksimir (razdoblje 1951–80) određena su topla (i hladna) razdoblja u kojima je najviša dnevna temperatura bila neprekidno viša (niža) od 25°C. Uzeta su u obzir sva razdoblja koja su započela u mjesecu srpnju, te razdoblja započeta u lipnju ako su većim dijelom trajala u srpnju. Ovakvim kriterijem želilo se dobiti što veći broj razdoblja a i osigurati bar približno stacionarnost srednjaka. Na primjeru 1980. godine (sl. 2) ilustriran je način odabira toplih i hladnih razdoblja te njihovo trajanje. Hladno razdoblje koje je započelo 18. lipnja i trajalo do 5. srpnja nije uzeto u razmatranje, ali toplo razdoblje koje je započelo 23. srpnja i trajalo do 12. kolovoza uzeto je u obzir iako je većim dijelom trajalo u kolovozu. Apsolutne čestine toplih i hladnih razdoblja navedene su u tab. 2. Na osnovi tih podataka određena je srednja dužina trajanja toplih (6,43 dana) i hladnih razdoblja (2,94 dana). Pomoću tih vrijednosti može se relacijom (5) odrediti vjerojatnost  $\pi_1$  (0,686) za topli dan ( $t_{MX} \geq 25^\circ\text{C}$ ). Pomoću vrijednosti  $\mu_1$  i  $\mu_0$  i relacije (7) možemo također odrediti diskretni  $k$ . ak. za korak od jednog dana ( $d_1 = c = 0,504$ ).

Parametar  $\varrho$  može se odrediti na više načina od kojih ovdje koristimo postupke koji su izloženi u odlomku 4. pod (a) i (c).

(a) Iz srednjih trajanja te relativne čestine toplih i hladnih razdoblja koja su trajala samo jedan dan (0,238 odnosno 0,295), možemo pomoću relacije (8) odrediti razliku  $a$  zatim i omjer  $k$ . ak  $d_2$  i  $d_1$  koji nam daje procjenu za parametar  $\varrho$  (0,541). Relacija (2) omogućava izračunavanje vrijednosti parametra  $\beta$  (0,059) koji je uz  $\pi_1$  i  $\varrho$  treći nominalni parametar modela. Njegova mala vrijednost (kao i mala razlika između  $c$  i  $\varrho$ ) ukazuje da razmatrani niz, prema ovoj metodi procjena parametara, ima osobine modela DAR (1) (Markovljevih lanaca prvog reda).

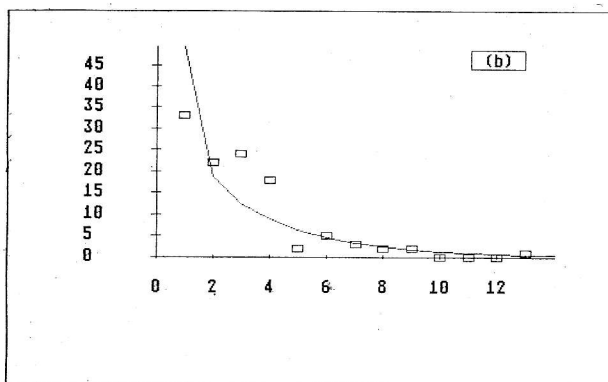
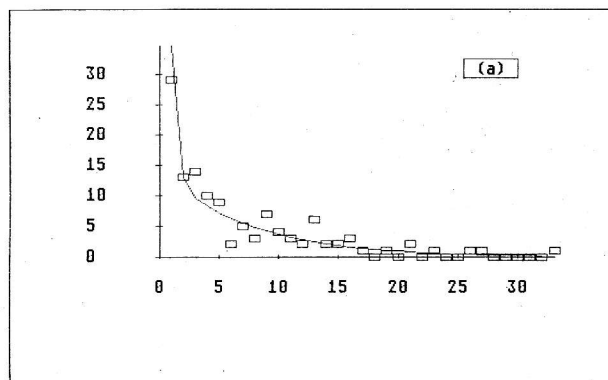
(c) Združena vjerojatnost za dva uzastopna hladna dana prema relaciji (12) iznosi 0,207. Ovu vrijednost uzimamo za vrijednost integrala (11) BNR kojem je gornja granica integracije određena sa vrijednošću  $t = -0,314$  (nor-

malna devijata koja odgovara vrijednosti  $\pi_0$ ). Za zadanu lijevu stranu i granice integracije jednačba (11) vrijedi za  $\varrho = 0,73$  iz čega prema jed. (2) dobivamo i za treći



Sl. 2. Maksimalne dnevne temperature zraka na stanici Zagreb-Maksimir u razdoblju od 15. 6. do 15. 8. 1980, kao ilustracija kriterija za definiciju i odabir toplih i hladnih razdoblja.

Fig. 2. Daily maximum temperatures for Zagreb-Maksimir, for the period from June 15 to August 15 1980, as an example of criteria for definition and selection of warm (T) and cold (H) spells.



Sl. 3. Apsolutne čestine: (a) toplih ( $t_{MX} \geq 25^\circ\text{C}$ ) i (b) hladnih razdoblja u srpnju za stanicu Zagreb-Maksimir u razdoblju 1951–80. Crtkanom krivuljom označene su teoretske čestine prema modificiranom modelu DARMA (1, 1)

Fig. 3. Absolute frequencies: (a) warm ( $t_{MX} \geq 25^\circ\text{C}$ ) and (b) cold spells in July for the station Zagreb-Maksimir for the period 1950–80. The curves indicate theoretical frequencies according to modified DARMA (1, 1) model.

| TOPLA RAZDOBLJA |     |       |         |     |       |         | HLADNA RAZDOBLJA |     |       |         |     |       |         |
|-----------------|-----|-------|---------|-----|-------|---------|------------------|-----|-------|---------|-----|-------|---------|
| grupirani       |     |       |         |     |       |         | grupirani        |     |       |         |     |       |         |
| Duž.            | Op. | DARMA | DAR (1) | Op. | DARMA | DAR (1) | Duž.             | Op. | DARMA | DAR (1) | Op. | DARMA | DAR (1) |
| 1               | 29  | 35    | 19      |     |       |         | 1                | 33  | 49    | 38      |     |       |         |
| 2               | 13  | 13    | 16      | 66  | 58    | 49      | 2                | 22  | 19    | 25      | 79  | 81    | 80      |
| 3               | 14  | 10    | 14      |     |       |         | 3                | 24  | 13    | 17      |     |       |         |
| 4               | 10  | 8,3   | 11      |     |       |         | 4                | 18  | 9,0   | 11      |     |       |         |
| 5               | 9   | 7,2   | 9,7     | 21  | 22    | 29      | 5                | 2   | 6,4   | 7,2     | 25  | 20    | 23      |
| 6               | 2   | 6,3   | 8,1     |     |       |         | 6                | 5   | 4,6   | 4,8     |     |       |         |
| 7               | 5   | 5,5   | 6,9     |     |       |         | 7                | 3   | 3,3   | 3,1     |     |       |         |
| 8               | 3   | 4,8   | 5,8     | 15  | 14    | 18      | 8                | 2   | 2,3   | 2,1     | 7   | 7,3   | 6,5     |
| 9               | 7   | 4,2   | 4,9     |     |       |         | 9                | 2   | 1,7   | 1,4     |     |       |         |
| 10              | 4   | 3,6   | 4,1     |     |       |         | 10               | .   | 1,2   | 0,9     |     |       |         |
| 11              | 3   | 3,2   | 3,5     | 9   | 9,6   | 11      | 11               | .   | 0,9   | 0,6     |     | 2,7   | 1,9     |
| 12              | 2   | 2,8   | 3,0     |     |       |         | 12               | .   | 0,6   | 0,4     |     |       |         |
| 13              | 6   | 2,4   | 2,5     |     |       |         | ≥13              | 1   | 1,5   | 0,8     | 1   | 1,5   | 0,8     |
| 14              | 2   | 2,1   | 2,1     | 10  | 6,3   | 6,4     |                  |     |       |         |     |       |         |
| 15              | 2   | 1,8   | 1,8     |     |       |         |                  |     |       |         |     |       |         |
| 16              | 3   | 1,6   | 1,5     |     |       |         |                  |     |       |         |     |       |         |
| 17              | 1   | 1,4   | 1,3     | 4   | 4,2   | 3,9     |                  |     |       |         |     |       |         |
| 18              | .   | 1,2   | 1,1     |     |       |         |                  |     |       |         |     |       |         |
| 19              | 1   | 1,0   | 0,9     |     |       |         |                  |     |       |         |     |       |         |
| 20              | .   | 0,9   | 0,8     | 3   | 2,7   | 2,3     |                  |     |       |         |     |       |         |
| 21              | 2   | 0,8   | 0,6     |     |       |         |                  |     |       |         |     |       |         |
| 22              | .   | 0,7   | 0,5     |     |       |         |                  |     |       |         |     |       |         |
| 23              | 1   | 0,6   | 0,5     | 2   | 1,8   | 1,4     |                  |     |       |         |     |       |         |
| 24              | .   | 0,5   | 0,4     |     |       |         |                  |     |       |         |     |       |         |
| 25              | .   | 0,6   | 0,3     |     |       |         |                  |     |       |         |     |       |         |
| 26              | 1   | 0,4   | 0,3     | 1   | 1,2   | 0,8     |                  |     |       |         |     |       |         |
| 27              | .   | 0,3   | 0,2     |     |       |         |                  |     |       |         |     |       |         |
| ≥33             | 1   | 1,2   | 0,5     |     |       |         |                  |     |       |         |     |       |         |

Tabela 2. Opažene i teoretske čestine toplih ( $t_{mx} \geq 25^{\circ}C$ ) i hladnih ( $t_{mx} < 25^{\circ}C$ ) razdoblja u srpnju za stanicu Zagreb-Maksimir (1951–1980).

Table 2. Observed and theoretical frequencies of warm ( $t_m \geq 25^{\circ}C$ ) and cold ( $t_{mx} < 25^{\circ}C$ ) spells in July for Observatory Zagreb-Maksimir (1951–1980).

nominalni parametar modela  $\beta$  vrijednost 0,21. Vidi se da ova metoda daje nešto veću vrijednost za  $\rho$  i  $\beta$  pa će i teoretska razdioba biti nešto drugačija nego za model DAR (1) koji se nameće na osnovi procjena pomoću metode (a).

Način izračunavanja teoretskih čestina za opći model DARMA (1, 1) detaljno je opisan u radu Chang et al. (1984b) i smatramo da ga nije potrebno ovdje ponavljati.

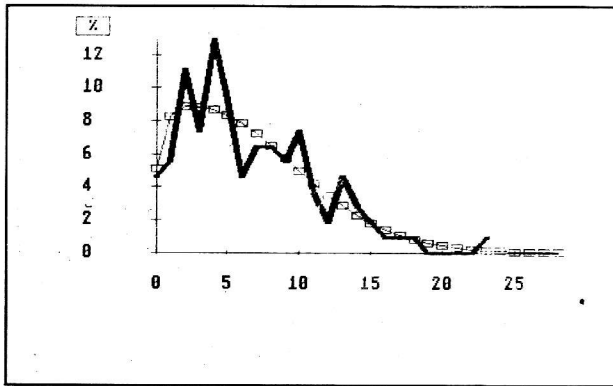
Teoretske razdiobe toplih i hladnih razdoblja sa parametrima određenim pomoću metode (a): model DAR (1) i metode (c): dvoparametarski DARMA (1, 1) model, dane su u tab. 1., dok su na sl. 2. prikazane empiričke i teoretske čestine za model DARMA (1, 1). Na osnovi negrupiranih podataka u tab. 2. teško se može dobiti neka predodžba o valjanosti modela. Tek ako se podaci grupiraju u šire klase, kao i iz sl. 2., jasno se uočava prednost teoretskih procjena prema vrlo grubim procjenama koje daju empiričke relativne čestine. Uočljivo je da model DAR (1) podcjenjuje čestine vrlo kratkih i vrlo dugačkih razdoblja.

Jedna od daljnjih mogućnosti primjene modela DARMA (1, 1) je određivanje razdiobe broja dana s određenom pojavom u vremenskom intervalu od N dana, ako je poznata marginalna vjerojatnost pojave  $\pi_1$  te korelacioni parametri  $c$  i  $\rho$  (ili  $\beta$ ). Da bi ilustrirali mogućnost ove metode

prikazana je empirička i teoretska razdioba broja vrućih dana ( $t_{mx} \geq 30^{\circ}C$ ) u mjesecu srpnju za Zagreb-Grič (sl. 4.). Podaci se odnose na relativno dugačko razdoblje od 108 godina. Veličina  $\pi_1$  (0,2115) određena je na osnovi srednjeg broja vrućih dana (6,6) u razmatranom razdoblju. Korelacioni parametri  $\rho$  i  $\beta$  preuzeti su iz prethodno razmatranog primjera za stanicu Zagreb-Maksimir. Iz slike se uočava da empirička razdioba čak i na osnovi relativno velikog skupa podataka daje vrlo grube procjene (relativni minimum čestina u klasi – 6 dana – koja odgovara srednjaku!). U srpnju 1928. godine bilo je čak 23 vruća dana. Teoretska procjena vjerojatnosti za 23 ili više vrućih dana u srpnju iznosi 0,003.

## 5.2. Usporedba procjena metodom simulacije i modelom DARMA (1, 1)

Kagen et al. (1975) primjenili su metodu simulacija za procjenu razdiobe dužina nizova unutar kojih je vrijednost stohastičke varijate neprekidno viša od određenog praga. Kontinuirana varijata generira se pomoću modela AR (1) sa k. ak.  $\rho_1 = 0,74$ . Da bi dobili koliko toliko izgledene razdiobe, autori navode da su bili prisiljeni koristiti vrlo dugačke simulacije. Razdiobe dužina nizova određene su za različite pragove i to na osnovi 40 simulacija od kojih se svaka sastojala od 1000 članova (što je ekvivalentno broju dana u razdoblju od 110 godina). I sa ovako dugačkim simulacijom dobijene procjene još su daleko od toga da bi se mogle smatrati pouzdanim. Na sl. 5. reproducirana je iz citiranog rada razdioba dužina nizova iznad praga  $t$  koji je za jednu standardnu devijaciju manji od srednjaka ( $t = \mu - \sigma$ ). Za odabranu vrijednost praga imamo da je  $\pi_1 = 0,841$  i pomoću BNR vrijednost zdru-



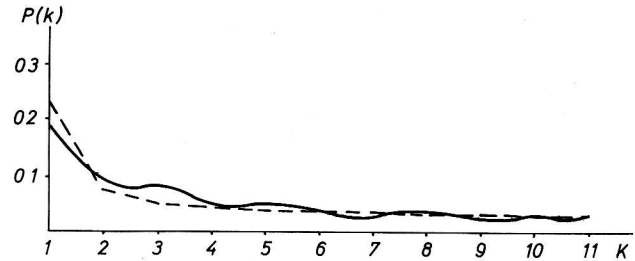
Sl. 4. Razdioba relativnih čestina broja vrućih dana ( $t_{MX} \geq 30^\circ\text{C}$ ) u srpnju za Opservatorij Zagreb-Grič u razdoblju 1880–1987. Teoretske vrijednosti procjenjene modelom DARMA (1, 1) označene su malim pravokutnicima

Fig. 4. The relative frequencies of hot days ( $t_{MX} \geq 30^\circ\text{C}$ ) for July at the Observatory Zagreb-Grič (1880–1987) (thick line) in comparison with the estimates by means of DARMA (1, 1) model (tiny rectangles).

žene vjerojatnosti od 0,772 što uvršteno u (12) daje za parametar  $c$  vrijednost 0,479. Iz jed. (2) dobivamo za  $\beta$  vrijednost 0,233. Sa ovim parametrima model DARMA (1, 1) daje procjene koje su na sl. 5. prikazane crtkanom krivuljom. Teoretske vrijednosti koje su dobivene analitičkom metodom u dobrom su skladu s procjenama koje su dobivene metodom simulacija. Oscilacije koje pokazuje krivulja procjena na osnovi simulacija posljedica su ograničenih mogućnosti same metode, pogotovo u ovom slučaju kada su čestine pojedinih klasa relativno male.

### 5.3. Procjene čestina ekstremnih toplotnih prilika pri hipotetskim promjenama klime

Mearns et al. (1984) ispitivali su u kojoj mjeri bi globalni porast srednje temperature zraka, uvjetovan porastom koncentracije ugljičnog dioksida, mogao utjecati na povećanje čestina ekstremnih temperaturnih prilika (povećanje broja vrućih dana ili dužih vrućih razdoblja). Ustanovili su da i relativno mala promjena srednje temperature zraka od  $1,7^\circ\text{C}$  može u pojedinim mjestima dovesti do značajnog povećanja broja vrućih dana (s maksimalnom temperaturom  $\geq 35^\circ\text{C}$ ) kao i povećanja čestine dužih vrućih razdoblja. Ne raspolažući pogodnim stohastičkim mode-



Sl. 5. Procjena relativnih čestina dužina nizova iznad praga koji je za jednu standardnu devijaciju manji od srednjaka ( $t = -1$ ) uz k. ak.  $\rho = 0.74$ ; model AR (1). Puna linija predstavlja procjene simulacijom (Kagan et al., 1970) a crtkana procjene modificiranim modelom DARMA (1, 1).

Fig. 5. Comparison of probability estimates of run length (above the threshold  $t = -1$ ). Solid line represents estimates obtained by simulation AR (1) process with  $\rho_1 = 0.74$  (Kagan et al., 1972), and dashed line estimates based on modified DARMA (1, 1) model.

lom za procjenu čestina ekstremnih temperaturnih prilika, autori se koriste metodom simulacija. Vremenske nizove maksimalnih dnevnih temperatura simuliraju modelom AR (1) i na osnovi relativnih čestina, unaprijed definiranih događaja, dolaze do procjena njihovih vjerojatnosti. Ekstremne temperaturne prilike autori definiraju kao slučaj: (a) kada u mjesecu srpnju nastupi 5 ili više dana s temperaturom većom od  $35^\circ\text{C}$  ( $95^\circ\text{F}$ ) (u daljnjem tekstu i tabeli 3. koristi se skraćeni naziv – vrući dani); (b) kada u srpnju nastupi bar jedno razdoblje od pet ili više uzastopnih vrućih dana (skraćeni naziv – vruće razdoblje). Na osnovi simulacija 500 vremenskih nizova (mjeseci) autori dolaze do procjene vjerojatnosti za ova dva događaja. U tab. 3. navedeni su podaci iz citiranog rada kao i rezultati koji su dobiveni modelom DARMA. Parametri modela određeni su na slijedeći način: za  $\pi_1$  uzeta je vrijednost koja se navodi da je dobivena simulacijom (nešto se razlikuju od teoretske vrijednosti za normalnu razdiobu uz dani  $\mu$  i  $\sigma$ ). Za  $\rho$  uzeta je vrijednost koja se koristi u simulacijama modela AR (1), dok je parametar  $c$  (odnosno  $\beta$ ) određen postupkom izloženim u 4. pod (c). Vjerojatnost za bar jedno vruće razdoblje, od bar pet uzastopnih vrućih dana, dobivena je na osnovi pretpostavke da razdioba broja nizova, koji imaju malu vjerojatnost, ima Poissonovu razdiobu (LeBoutillier and Way-

| m ( $^\circ\text{F}$ ) | Parametri modela                 |        |                         |      | Procjene   |       |                 |       |
|------------------------|----------------------------------|--------|-------------------------|------|------------|-------|-----------------|-------|
|                        | AR (1)<br>s ( $^\circ\text{F}$ ) | $\rho$ | DARMA (1, 1)<br>$\pi_1$ | c    | Vrući dani |       | Vruća razdoblja |       |
|                        |                                  |        |                         |      | Simul.     | DARMA | Simul.          | DARMA |
| 86,2                   | 6,8                              | 0,58   | 0,111                   | 0,31 | 0,282      | 0,297 | 0,062           | 0,060 |
| 89,2                   | 6,8                              | 0,58   | 0,222                   | 0,36 | 0,706      | 0,725 | 0,206           | 0,223 |
| 89,2                   | 5,9                              | 0,58   | 0,178                   | 0,35 | 0,568      | 0,568 | 0,118           | 0,150 |
| 89,2                   | 7,7                              | 0,58   | 0,239                   | 0,37 | 0,762      | 0,756 | 0,232           | 0,254 |
| 89,2                   | 6,8                              | 0,40   | 0,217                   | 0,23 | 0,748      | 0,756 | 0,098           | 0,099 |
| 89,2                   | 6,8                              | 0,80   | 0,222                   | 0,56 | 0,604      | 0,583 | 0,370           | 0,378 |

Tabela 3. Procjene vjerojatnosti metodom simulacije (Mearns et al., 1984) i modificiranim modelom DARMA (1, 1) za događaj definiran sa: (a) barem pet vrućih dana ( $t_{MX} > 35^\circ\text{C}$ ); (b) bar jedno razdoblje od bar pet uzastopnih vrućih dana u srpnju za mjesto Des Moines (SAD).

Table 3. Comparison of probability estimates obtained by stimulation AR (1) process (Mearns et al., 1984) and by modified DARMA (1, 1) model for events defined: (a) at least five hot days ( $t_{MX} > 35^\circ\text{C}$ ); (b) at least one spell of five or more consecutive hot days in July for Des Moines (U. S. A.).

len, 1988). Modelom DARMA određen je srednji broj nizova od par pet uzastopnih vrućih dana ( $N_5$ ), a vjerojatnost da u nekoj godini nastupi bar jedno takvo razdoblje određena je prema relaciji

$$P = 1 - \exp(-N_5) \quad (13)$$

Vrijednosti dobivene analitičkim putem pomoću modela DARMA (1, 1) u dobrom su skladu s vrijednostima koje autori navode da su dobili metodom simulacije. Pri uspoređivanju parova vrijednosti u tab. 3. treba imati na umu da su obje vrijednosti aproksimativne i da za dobivanje egzaktne vrijednosti za sada još nemamo jednostavnu metodu. U citiranom radu autori ispituju ne samo promjene čestina ekstremnih toplotnih prilika koje bi mogle nastupiti kao posljedica promjena srednje temperature već i promjene koje bi nastupile kao posljedica promjena varijance i k. ak. maksimalnih temperatura. Veliki broj njihovih rezultata, iako su dani pretežno u grafičkom obliku, pruža mogućnosti za daljnju provjeru analitičke metode.

## 6. ZAKLJUČAK

Mogućnosti opisa osobina nizova diskretnih meteoroloških veličina pomoću modela DARMA (1, 1) ispitane su do sada samo na podacima o sušnim i kišnim razdobljima. Izgleda međutim da model pruža mogućnost daleko šire primjene i za nizove drugih meteoroloških veličina koji su dani u kategorijskom obliku (na primjer nizovi dana s maglom, sumaglicom, mrazom, grmljavinom). Razmatrani model u izvornom obliku definiran je sa tri parametra. U ovom radu ukazano je na mogućnost da se dva parametra koji opisuju oblik akf mogu, bez narušavanja bitnih osobina modela, svesti na samo jednu vrijednost  $\varrho$  koja je i po numeričkoj vrijednosti ekvivalentna k. ak. vremenskog niza kontinuiranih vrijednosti. Mišljenja samo da se ovim pojednostavljenjem olakšava izučavanje pojave persistencije meteoroloških veličina. Naime, veliki broj vrlo različitih višeparametarskih modela koji se danas koristi pri opisu osobina diskretnih meteoroloških nizova ima za posljedicu da još nema opće prihvaćene veličine kojom bi se intenzitet pojave persistencije izrazio na najpogodniji način, pa prema tome čak ni približne slike o njenoj prostornoj i vremenskoj promjenljivosti. Mišljenja smo da za diskretne veličine parametar  $\varrho$  pogodna veličina za opis persistencije meteoroloških pojava koje su dane u kategorijskom obliku. Njegova prednost pred parametrom c (koji se najčešće upotrebljava kao mjera persistencije jer to je upravo k. ak. za diskretne veličine) sastoji se u tome da je njegova numerička vrijednost dosta bliza k. ak za kontinuirane vrijednosti i neovisna je o granici kojom se vrši transformacija kontinuirane veličine u diskretnu, što nije slučaj sa parametrom c.

Velike mogućnosti opisani model (u izvornom ili modificiranom obliku) pruža za određivanje razdiobe broja dana sa određenom meteorološkom pojavom. Primjer broja vrućih dana u Zagrebu (sl. 4) lijepo pokazuje da iako se radi o podacima iz razdoblja dužeg od sto godina, empirička razdioba daje dosta grube procijene. O razdiobama broja dana sa određenom pojavom u razdoblju od mjesec dana vrlo je malo poznato, a broj već sredenih podataka za razna mjesta i razne pojave vrlo je velik. Ovi podaci pružaju mogućnost da se na posredni način detaljnije ispita prostorna i vremenska promjenljivost persistencije (parametar  $\varrho$ ) za različite meteorološke pojave.

Za sada možemo samo pretpostaviti da postoji značajna prvilnost u tim promjenama.

Potrebno je na kraju navesti i slučajeve za koje model DARMA (1, 1) neće biti pogodan. Ako diskretni niz potječe iz kontinuiranog niza, tada se može očekivati da će model biti pogodan ukoliko je izvorni niz blizak modelu AR (1). Model AR (1) pretpostavlja stacionarnost srednjaka, varijance, akf i normalnu razdiobu razmatrane veličine. Meteorološki podaci katkada značajno odstupaju od tih pretpostavki. Primjena modela na realne podatke o temperaturi (odlomak 5.1) nije dala tako upečatljive rezultate o vrijednosti modela kao primjena na podatke koji su dobiveni simulacijom modela AR (1). Također se može očekivati da za pojave kod kojih je perzistencija vrlo velika (jer je na primjer interval vremena između članova niza malen) model DARMA (1, 1) možda neće biti pogodan jer se gubi sličnost akf-a koja je razmatrana u odlomku 3. U to se može lako uvjeriti ako se razmatra ponašanje akf diskretnog niza, na način prikazan u tabeli 1, za ak. kontinuiranog niza  $\varrho_1 = 0.9$ . To je vjerojatno i bio razlog da se model DARMA pokazao kao neprikladan za opis razdoba nizova pozitivnih i negativnih vrijednosti Palmerovog indeksa, koji su publicirani u radu Penzar (1976) jer iako se radi o mjesečnim vrijednostima, k. ak je vrlo velik (0.89).

## LITERATURA

- Buishand, R.A., 1978: The binary DARMA (1, 1) proceses as a model for wet-dry sequence. Dept. of Math., Agricultural University, Wageningen, 49 pp.
- Caskey, J. E., 1964: Markov chain model of cold spells at London. *Met. Mag.* 93, 136-138.
- Chang, T. J., M. L. Kavvas and J. W. Delleur, 1984a: Daily precipitation modeling by discrete autoregressive moving average processes. *Water Resour. Res.*, 20, 565-580.
- Chang, T. J., M. L. Kavvas and J. W. Delleur, 1984b: Modeling of sequences of wet and dry days by binary discrete autoregressive moving average processes. *J. Clim. Appl. Meteor.*, 23, 1367-1378.
- Hamilton, M. G., 1988: Very warm spells and very cold spells at Edgbaston, Birmingham during 1920-1979. *Weather*, 43, 2-8.
- Jacobs, P. A., and P. W. Lewis, 1978: Discrete time series generated by mixtures. I: Correlation and runs properties. *J. Roy. Stat. Soc. B40*, 94-105.
- Kagan, R. I., E. I. Fedorčenko, 1970a: O primenenii teorii vybrosov issledovaniju temperaturnyh rjadov. *Trudy GGO*, vyp. 267, 86-89.
- Kagan, R. I., E. I. Fedorčenko, 1970b: O rasčete statističeskikh karakteristik vybrosov slučajnoj funkcii. *Trudy GGO*, vyp. 268, 146-172.
- Kagan, R. I., V. K. Kanaškin, E. I. Fedorčenko, 1972: O rasčete karakteristik vremennyh rjadov metodom statističeskogo modelirovanija. *Trudy GGO*, vyp. 186, 71-82.
- Kagan, R. I., E. I. Fedorčenko, 1975: K rasčetu verojatnosti vybrosa normal'noj posledovatel'nosti *Trudy GGO*, vyp. 348, 69-77.
- LeBoutillier, D. W. and P. R. Waylen, 1988: Stochastic analysis of cold spells. *J. Appl. Meteor.*, 27, 67-76.
- Leith, C. E., 1973: The standard error of time-average estimates of climate means. *J. Appl. Meteor.*, 12, 1066-1069.
- Lowndes, C. A. S., 1963: Cold spells at London. *Met. Mag.*, 92, 165-176.
- Mearns, L. O., R. W. Katz and S. H. Schneider, 1984: Extreme high-temperature events: Changes in their probabilities with changes in mean temperature. *J. Climate. Appl. Meteor.*, 23, 1601-1613.

- Penzar, B., 1976: Indeksi suhoće za Zagreb i njihova statistička prognoza. Rasprave i prikazi hidrometeorološkog zavoda u Zagrebu, 13, 1–58.
- Sakamoto, C. M., 1970: Markov chain models for probabilities of hot and cool day sequences and hot spells in Nevada. ESSA Tech. Report EDS 9, 26 pp.

## SUMMARY

This paper deals with the possibility of application of the DARMA (1, 1) model for determination of distribution of length of spells within which the air temperature (daily mean, maximum or minimum) is continuously above (or below) a certain arbitrary defined threshold. Although the application of this model for binary sequences, which in fact originates from the sequences of continuous values, is not, generally speaking, recommendable, the model has shown some good features.

Section 2 shows how the binary sequence of values  $X$  is generated by means of the DARMA (1, 1) model.  $X_n$  acquires the value of the identical and independently distributed random variate  $Y_n$  with probability  $\beta$  or the value of  $A_{n-1}$  with the probability  $1 - \beta$ . The sequence of values  $A$  represents binary values which are generated by means of the DAR (1) model (better known under the name Markov chain of first-order). Value  $A_n$  is formed, either from the immediately preceding value  $A_{n-1}$  (with probability  $\varrho$ ) or from the value  $Y_n$ . Binary sequences  $X$ ,  $A$  and  $Y$  have the same marginal distribution determined by  $P(X_n = 1) = \pi_1$ . Therefore the model is determined by three parameters:  $\pi_1$ ,  $\varrho$  and  $\beta$ . Autocorrelation function (acf) of the model is given by Eq. (1) where  $c$  is autocorrelation coefficient (acc) for lag one. This parameter is a common measure for persistence in meteorological sequences. With the given parameters  $c$  and  $\varrho$ ,  $\beta$  can be computed from Eq. (2). Therefore it seems better to consider  $c$  rather than  $\beta$  as a model parameter since the meaning of the parameter  $\beta$  is less transparent.

Section 3 deals with the similarity of the acf DARMA (1, 1) model and acf of the binary sequence the latter being formed by the transformation from a series of continuous values characterised by AR (1) process features. If the basic series with the characteristic of the AR (1) process is transformed into the binary sequence in a way that the value 0 is associated to all the values below the mean, and value 1 to all the values above the mean, then the acf of a discrete sequence (for the considered example in Tab. 1) is given in the second column. The acf values in this case have been derived from Eq. (2). However, this equation is valid only in the case that the continuous random variate has a normal distribution and the transformation into the binary sequence is defined by the distribution mean. The ratio of successive values  $d_k$  is approximately constant and for large values  $k$  tends towards  $\text{acc } \varrho_1$  of the basic AR (1) process from which the discrete sequence originates. It is noticeable that the acf of such a discrete sequence is very similar to the acf of DARMA (1, 1) model. After the first lag acf shows an exponential decrease (which approximates) of the factor equal to the value of  $\text{acc } \varrho_1$  of a basic continuous series. Such a similarity of acf-s suggests that such sequences could be well described by means of the DARMA (1, 1) model. Moreover both parameters ( $c$  and  $\varrho$ ) which determine the acf form could be approximately estimated from the parameter  $\varrho_1$  of the AR (1) model.

Section 4 deals with methods for the estimation of the DARMA (1, 1) model parameters. Marginal distribution of the variate  $X$  can be established according to Eq. (5), from the mean length of sequences of zeros and ones ( $\mu_0, \mu_1$ ). By means of these parameters on the basis of Eq. (7) we can determine the acc for the lag one.

Several methods for the estimation of parameter  $\varrho$  have been considered:

a) On the basis of mean length of sequences ( $\mu$ ) and relative frequencies of the shortest series  $-f_0(1), f_1(1)$ , Buishand (1979) has given the relation (8) which enables the determination of  $\text{acc } d_2$  and then the ratio  $d_2 / c$  representing the estimation for parameter  $\varrho$ .

b) From the empirical acf of the discrete series ( $d_k$ ) the parameter  $\varrho$  can be established either by Eq. (9) or by finding such  $\varrho$ , which minimizes the expression (10). Estimations by these methods depend on the length of the portion of acf considered ( $n$ -dependent).

c) Due to the ambiguity in procedures of estimation of parameter  $\varrho$  by means of the above mentioned methods as well as the facts brought up in Section 3, this paper suggests the idea that the parameter  $\varrho$  of the DARMA (1, 1) model can be estimated from the parameter  $c$  (and vice versa). The connection between these two parameters of the DARMA (1, 1) model is established by means of the integral (11) of the bivariate normal distribution. By equaling the right hand sides of Eqs. (11) and (12) it is possible to obtain  $\varrho$  from  $c$  and vice versa. The limit of integration  $t$  represents a normal deviate corresponding the marginal distribution  $\pi_1$ . In this case the three-parameter DARMA (1, 1) model is reduced to a model with two parameters only:  $\pi_1$  and  $\varrho$ . This simplification will be so much more appropriate if  $\varrho$  is not too large and the more the continuous series, from which the binary sequence originates, by its characteristics corresponds to the AR (1) process.

Possibilities of the two-parameter DARMA (1, 1) model are illustrated by several examples. The first one (5.1) considers the distribution of warm and cold spells in the month of July for Zagreb. The fact that the concordance of empirical and theoretical frequencies (Fig. 4, Tab. 2) is not striking is probably due to a rather small sample and a significant departure of the characteristics of the daily maximum temperatures from those of the AR (1) process. The DARMA (1, 1) model enables (Buishand, 1979) the estimation of the distribution of the number of days with certain characteristics (example on Fig. 4 – number of hot days for Zagreb-Grič). The distribution is determined by just two, quite natural parameters: mean number of hot days and  $\text{acc } \varrho_1$ .

The example given in 5.2 compares the results obtained by Kagan et al. (1972) by means of the simulation method with the results which can be obtained by the analytic method through the DARMA (1, 1) model. In the quoted paper the authors give a graphical representation of the distribution of the length of sequences within which random variate with the characteristics of the AR (1) process is continually above the threshold defined by a normal deviate  $t = -1$ . For such a low value of threshold and a relatively large  $\text{acc}$ , even for short series the probabilities are relatively small (Fig. 5.). Therefore even a big number of simulations (40 simulations each consisting of a 1000 elements) could not yield reliable estimations of probability distribution.



Mearns et al. (1984) also use the method of AR (1) process simulation to estimate the changes in the probabilities of extreme temperature events which could occur in the case of a global warming (of 1.7°C or 3°F) as a consequence of carbon dioxide increase in the atmosphere. Their results (based on 500 month-simulations for each set of model parameters) as well as the results obtained by the application of a modified DARMA (1, 1) model are summarized in Tab. 3. In the course of comparison one should keep in mind that both values are approximative estimations. There is still no simple analytic method for obtaining the exact values.

In conclusion it is suggested that the parameter  $\rho$  of the modified DARMA (1, 1) model could be accepted as a standard measure for persistence of different meteorological events. For the events defined as the crossing of a certain threshold, the value  $\rho$ , by its numerical value, will be very close to the acc for lag one of the basic series. For real discrete sequences (ex. days with thunderstorm or fog) the value of parameter  $\rho$  is less dependent on marginal distribution than parameter  $c$ , which, though most frequently used as a measure of persistence of meteorological events, is still rarely encountered in meteorological literature.