RASPRAVE 24, Zagreb 1989, str. 73 – 76

UDK: 556.047
Stručni rad

ODREĐIVANJE SREDNJE VISINE SLIVA

Determination of the mean height of the catch area

MILAN ZUPAN
Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Primljeno 21. rujna 1988, u konačnom obliku 12. travnja 1989.

Sažetak: Srednja apsolutna visina sliva jedan je od geografskih faktora u kompleksu problema otjecanja voda sa slivnog područja. U članku su prikazana dva načina izračunavanja srednje visine sliva, pomoću hipsometrijske krivulje i pomoću aritmetičke sredine. Za modus i medijanu razrađen je analitički postupak točnijeg određivanja njihovog položaja.

Ključne riječi: hipsometrijska krivulja, medijana, modus, centar.

Abstract: The mean absolute height of the catch area is one of the geographic factors in the complex problem of water drainage from such areas. Presented are two methods for the calculation of the mean catch area height: first, by the use of hypsometric curve, and second, by arithmetic mean. Also, the analytic procedure for a more precise determination of the position of mode and median is discussed.

Key words: hypsometric curve, median, mode, center.

U cijelom kompleksu problema otjecanja voda sa slivnog područja svakako se izdvaja određivanje geografskih faktora sliva, kao što su veličina i opseg sliva, udaljenost težišta sliva od točke promatranja, srednji pad sliva, srednja visina itd.

Za utvrđivanje topografske vododjelnice i određivanje površine sliva A (km^2) planimetriranjem, potrebno je kao podlogu potrebiti kartu u mjerilu 1:50 000 A $\leq$ 400 km^2, odnosno u mjerilu 1:100 000 za A $\geq$ 400 km^2 da bi se postigla točnost od $\pm$ 1%.

Srednja apsolutna visina sliva određuje se pomoću hipsometrijske krivulje $A_h = f(h)$. Ta krivulja predočena je u ravnini koju čine ordinata na koju se nanose apsolutne visine slojnica i apscisa na koju se nanose površine koje zatvaraju pojedine slojnice sa vododjelnicom, obično izražene u postocima. Pomoću površine A_h, koju omeđuju ordinata, apscisa i hipsometrijska krivulja pretvorena u pravokutnik sa istom površinom, određuje se srednja apsolutna visina sliva.

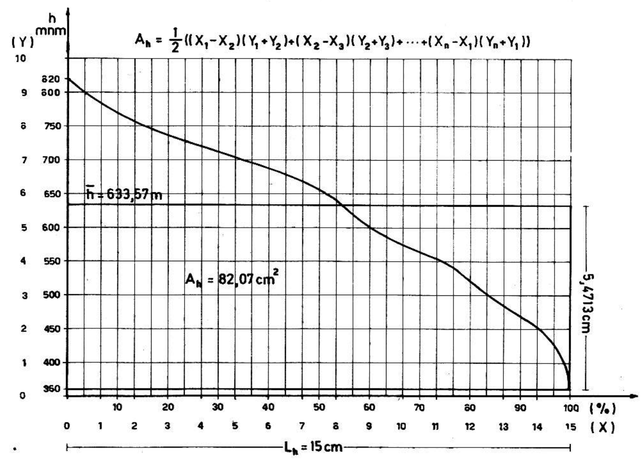
$$\bar{h} = h_p + \frac{A_h}{L_h} \cdot \Delta h,$$

pri čemu je h_p najniža apsolutna kota promatranog sliva a L_h stvarna dužina apscise.

Za primjer uzeto je slivno područje potoka »Duboka«, gdje je zorno prikazan postupak određivanja apsolutne srednje visine sliva pomoću hipsometrijske krivulje.

Srednja apsolutna visina sliva potoka »Duboka« iznosi

$$\bar{h} = 360 + \frac{82{,}07}{15} \cdot 50 = 633{,}57 \text{ m}$$



Slika 1. Hipsometrijska krivulja sliva potoka Duboka

Fig. 1. Hypsometric curve of Duboka river basin

Razmatranjem tablice 1 može se uočiti da jedinične vrijednosti površine 1 km^2 između dviju izohipsa u drugoj koloni predstavljaju elemente numeričkog statističkog skupa. Broj jediničnih vrijednosti površine, ili površina koja predstavlja broj elemenata statističkog skupa u jednom intervalu, naziva se apsolutna frekvencija tog intervala. Za granice intervala ili klase uzete su apsolutne visine izohipsa. Linijskim grafikonom kojim se prikazuje distribucija frekvencije, dobiva se poligon frekvencije (sl. 2).

Ako se frekvencije postupno zbrajaju, redom u jednom nizu, dobiva se kumulativni niz frekvencija, koji se može pokazati relativnim vrijednostima izraženim u postocima

Tabela 1. Parametri za određivanje srednje apsolutne visine sliva

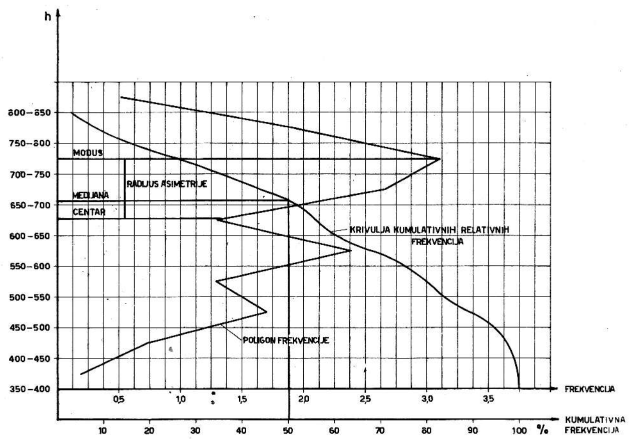
Tab. 1. Parameters for determination of mean absolute height of basin

Apsolutna kota izohipse	Površina između izohipsa	Suma površina između izohipsa	Suma površina između izohipsa	Koordinate točaka	
h(m)	(km^2)	(km^2)	(%)	X	Y
820	0	0	0	0	9,4
800	0,52	0,52	3,29	0,49	9,0
750	1,94	2,46	15,55	2,33	8,0
700	3,11	5,57	35,21	5,28	7,0
650	2,66	8,23	52,02	7,80	6,0
600	1,30	9,53	60,24	9,04	5,0
550	2,38	11,91	75,28	11,29	4,0
500	1,29	13,20	83,44	12,52	3,0
450	1,70	14,90	94,18	14,13	2,0
400	0,73	15,63	98,80	14,82	1,0
360	0,19	15,82	100,00	15,00	0,2
				0,00	0,2
	Σ 15,82			0,00	9,4

Tabela 2. Krivulja frekvencije i kumulativne frekvencije

Tab. 2. Frequency curve and cumulative frequency

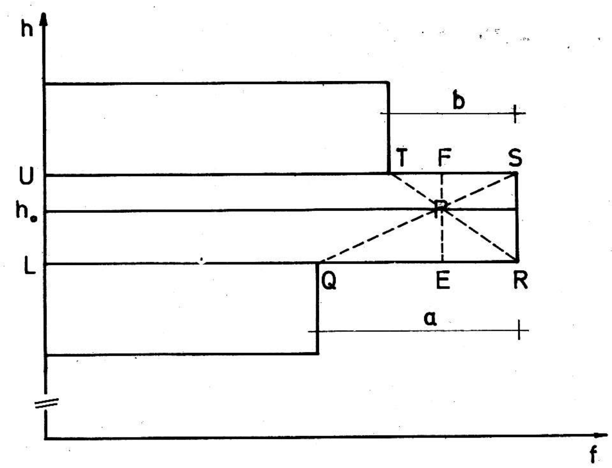
Interval (mn. J. m.)	Frekvencija f_i (km^2)	Kumulativna frekvencija (km^2)	Kumulativna frekvencija (%)
800–850	0,52	0,52	3,29
750–800	1,94	2,46	15,55
700–750	3,11	5,57	35,21
650–700	2,66	8,23	52,02
600–650	1,30	9,53	60,24
550–600	2,38	11,91	75,28
500–550	1,29	13,20	83,44
450–450	1,70	14,90	94,18
400–450	0,73	15,63	98,80
350–400	0,19	15,82	100,00
	Σ 15,82		



Sl. 2.

Slika 2. Krivulja frekvencije i krivulje kumulativnih relativnih frekvencija

Fig. 2. Frequency curve and curve of cumulative relative frequencies



Slika 3. Modus u intervalu krivulje frekvencije

Fig. 3. Mode in the interval of frequency curve

(četvrta kolona tablice 2). Grafički prikaz ovih vrijednosti daje krivulju kumulativnih relativnih frekvencija, koja se u vremenskom statističkom obilježju zove krivulja trajanja (tablica 2. i sl. 2).

Iz do sada izloženog vidi se da je krivulja kumulativnih relativnih frekvencija identična hipsometrijskoj krivulji a srednja apsolutna visina promatranog sliva mora biti jednaka centru, što predstavlja prosječnu vrijednost ili aritmetičku sredinu kolektiva.

Za centar može se primjeniti jednadžba

$$\bar{h} = h_o + \frac{\Sigma[\varphi_i(h_i - h_o)]}{N},$$

gdje je φ_i relativna vrijednost frekvencije izražena u postocima, N je opseg kolektiva izražen u postocima, h_o je izraz za modus, što predstavlja mjesto na ordinati gdje je frekvencija najveća, dok je pripadajuća točka na krivulji kumulativnih relativnih frekvencija njena točka infleksije.

Budući da se ordinate točaka poligona frekvencije nanose u sredini intervala, nastaje pitanje na kojem se mjestu intervala nalazi modus. Očito je da na položaj tog mjesta utječu mjesta dviju susjednih klasa. Može se slikovito prikazati kao da susjedne grupe djeluju privlačno na modus upravno proporcionalno s veličinom njihovih frekvencija (sl. 3.).

Iz sličnosti trokuta STP i RQP dobiva se odnos

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{ST}}$$

ili

$$\frac{h_o - L}{a} = \frac{U - h_o}{b}$$

Dalje slijedi s obzirom da je $U = L + i$

$$h_o = L + \left(\frac{a}{a + b}\right) \cdot i$$

L = donja vrijednost intervala u kojem se nalazi modus
a = razlika vrijednosti frekvencije u razredu gdje se nalazi modus i frekvencije ispod tog razreda
b = razlika vrijednosti frekvencije u razredu gdje se nalazi modus i frekvencije iznad tog razreda
i = veličina intervala koja se dobije razlikom vrijednosti gornje i donje razlike klase u kojoj se nalazi modus.

Uvrstivši vrijednosti iz tablice 2 dobiva se

$$h_o = 700 + \left(\frac{0{,}45}{0{,}54 + 1{,}17}\right) \cdot 50 = 713{,}89 \text{ m}$$

U tablici 3, h_i predstavljaju sredine klasa ili srednje visine između dviju izohipsa. Relativne vrijednosti apsolutnih frekvencija označene su sa φ_i.

Prema računu iz tablice 3 centar ili aritmetička sredina kolektiva poprima vrijednost

$$\bar{h} = 713{,}89 + \frac{-8020{,}57}{100} = 633{,}68 \text{ m}$$

Uspoređujući vrijednosti centra sa srednjom visinom sliva dobivenom pomoću hipsometrijske krivulje, vidi se da su one praktično iste (633,68 m = 633,57 m).

Osim izračunavanja aritmetičke sredine gdje sudjeluje svaka jedinica sa svojom brojčanom vrijednosti obilježja, postoji srednja vrijednost gdje svaka vrijednost sudjeluje samo na osnovi svog položaja u nizu. Ovakva se srednja vrijednost naziva medijana. Na sl. 2 vidimo da je medijana veličina koja odgovara 50% vrijednosti na krivulji kumulativnih relativnih frekvencija, pa dosljedno tome ona dijeli površinu koja zatvara poligon frekvencije s ordinatom na dva jednaka dijela. Sve vrijednosti manje od medijane mogu postati po volji još manje, a veće još veće. Medijana se zbog tih promjena neće mijenjati. Vidi se da je medijana mnogo manje osjetljiva srednja vrijednost nego što je to aritmetička sredina. Drugim riječima na vrijednost medijane ne utječu ni ekstremno velike ni ekstremno male vrijednosti obilježja. Za veoma asimetrične distribucije preporučuje se da se izračuna medijana umjesto aritmetičke sredine.

Tabela 3. Određivanje centra ili aritmetičke sredine kolektiva

Tab. 3. Determination of centre or arithemic mean of collective

h_i (mn. J. m.)	φ_i (%)	$h_i - h_o$ (m)	$\varphi_i (h_i - h_o)$	$\varphi_i (h_i - h_o)^2$
820	3,29	106,11	349,10	37043,20
775	12,26	61,11	749,21	45784,14
725	19,66	11,11	218,42	2426,68
675	16,81	−38,89	−653,74	25423,98
625	8,22	−88,89	−730,68	64949,77
575	15,04	−138,89	−2088,91	290128,10
525	8,15	−188,89	−1539,45	290787,37
475	10,75	−238,89	−2568,07	613485,65
425	4,61	−288,89	−1331,78	384738,76
360	1,20	−353,89	−424,67	150285,76
			Σ −8020,57	Σ 1905053,41

Zato će se u daljnjoj analizi na navedenom primjeru ispitati veličina asimetričnosti distribucije. Kod simetrične razdiobe veličine centra, modusa i medijane padaju zajedno, dok kod nesimetričnih razdioba dakako to nije slučaj, pa udaljenost između centra i modusa predstavlja stupanj te nesimetričnosti. To vrijedi samo zato jer se za približno aproksimativnu sredinu uzela veličina modusa. Ta se udaljenost naziva radiusom asimetrije d. Kod pozitivne asimetrične raspodjele aritmetička sredina poprima najvišu vrijednost, nižu vrijednost ima medijana a najnižu modus. Kod negativne asimetrične distribucije poredak veličine je obrnut.

Izrazom za $d = \frac{\Sigma \varphi_i (h_i - h_o)}{N}$ dobiva se veličina radijusa asimetrije $d = -80{,}21$ m, što ukazuje da je asimetričnost raspodjele negativna i praktično velika.

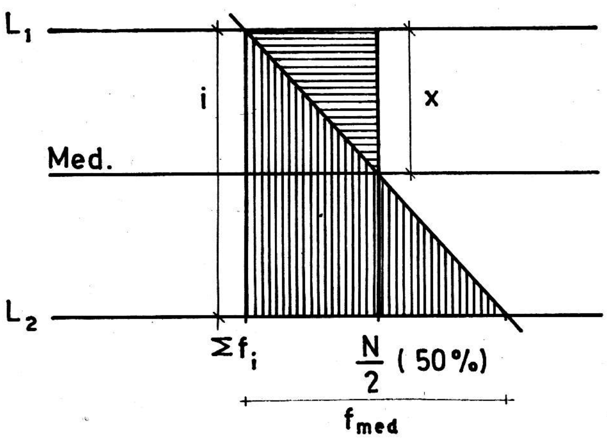
Na osnovi sl. 4 razrađen je točni postupak određivanja medijane

$$\text{Med} = L_1 - x$$

$$\frac{x}{i} = \left[\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_1}{f_{med}}\right]$$

$$x = \left[\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_i}{f_{med}}\right] \cdot i$$

$$\text{Med} = L_1 - \left[\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_i}{f_{med}}\right] \cdot i$$



Slika 4. Postupak određivanja medijana

Fig. 4. Method for median determination

L_1 = gornja granica medijalnog razreda
Σf_i = zbroj svih frekvencija odozgo premadolje sve do medijalnog razreda neuključujući frekvenciju medijalnog razreda
f_{med} = frekvencija medijalnog razreda
i = veličina medijalnog razreda
N = opseg kolektiva

Medijana u ovom primjeru iznosi

$$\text{Med} = 700 - \left(\frac{7,91 - 5,57}{2,66}\right) \cdot 50 = 656,02 \text{ m}$$

Na kraju preostaje da se ispita koja je srednja vrijednost, aritmetička sredina ili medijana, pogodnija kao vrijednost za apsolutnu srednju visinu sliva. Utvrđivanje će se izvršiti pomoću drugog centralnog momenta kojeg nazivamo varijancom ili srednje kvadratno odstupanje označeno simbolom σ^2. Drugi korjen iz varijance naziva se standardna devijacija koja nam služi kao mjera rasprostranjenosti članova od srednje vrijednosti.

$$\sigma_1 = \pm \left(\frac{\Sigma\, \varphi_i\, (h_i - h_o)^2 - (h_o - \bar{h})^2}{N}\right)^{1/2} = \pm\ 137,79 \text{ m},$$

pri čemu je $\bar{h}$ vrijednost aritmetičke sredine kolektiva ili centar.

Ako se umjesto $\bar{h}$ uvrsti u formulu za standardnu devijaciju medijana kao srednju vrijednost, dobiva se

$$\sigma_1 = \pm \left(\frac{\Sigma\, \varphi_i\, (h_i - h_o)^2 - (h_o - \text{Med})^2}{N}\right)^{1/2} = \pm\ 137,90 \text{ m},$$

U zaključku može se konstatirati da je kod slivnog područja gdje ne postoje ekstremne promjene pada sliva, irelevantno koju srednju vrijednost, aritmetičku sredinu ili medijanu uzimamo kao srednju apsolutnu visinu sliva jer je veličina disperzije u oba slučaja više manje jednaka.

ZAKLJUČAK

Iz rada se vidi da je krivulja kumulativnih relativnih frekvencija, koja se u vremenskom statističkom obilježju zove krivulja trajanja, identična hipsometrijskoj krivulji, a srednja apsolutna visina promatranog sliva mora biti jednaka centru ili aritmetičkoj sredini kolektiva. Osim aritmetičke sredine gdje sudjeluje svaka jedinica sa svojom brojčanom vrijednosti obilježja, postoji srednja vrijednost medijana, gdje svaka vrijednost sudjeluje samo na osnovi svog položaja u nizu. Zbog toga je za veoma asimetrične distribucije bolje da se izračuna medijana umjesto centra.

LITERATURA

I. Pavlić – Statistička teorija i primjena, Zagreb 1970.
A. V. Roždestvenskiji, A. I. Čebotarev – Statističkije metodi v hidrologiji, Lenjingrad 1974.
A. J. Slabotkin – Hidravlika i hidrologija, Moskva 1968.
V. Serdar – Udžbenik statistike, Zagreb 1975.
M. R. Spiegel – Theory and Problems of Statistics, New York 1961.
D. Srebrenović – Problemi velikih voda, Zagreb 1970.
D. Srebrenović – Primjena matematičko statističkih metoda u hidrologiji, Zagreb 1970.

SUMMARY

From the considerations contained in the present paper it is obvious that the curve representing the cumulative relative frequencies is identical to the hypsometric curve, and that the mean absolute hight of the observed catch area must be equal to the arithmetic mean, where each quantity participates with its numerical value, there also exists the median mean value where each datum participates only with its position in the series. Therefore, for expressively asymetric distribution it is better to compute the median in place of the center.