RASPRAVE 23, Zagreb 1988, str. 85-91

UDK 556.113.3
Originalni znanstveni rad

ANALIZA TOKA (ILI PROTJECANJA) VODE U VERTIKALAMA OMOČENOG PRESJEKA

Analysis of water flow in the verticals of watered cross-section

EUGEN ČAVLEK
Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Primljeno 30. srpnja 1988, u konačnom obliku 4. studenog 1988.

Sažetak: U ovom radu razmatrana je promjena brzine gibanja vode u turbulentnom režimu, u vertikalama omočenog prosjeka u prirodnim koritima. Određene su vrijednosti pripadnih parametara kao i jednadžba za određivanje srednje brzine toka pri dnu.

K l j u č n e r i j e č i: Karmanova konstanta, srednja brzina vode, koeficijent hrapavosti, dinamička brzina.

Abstract: In this work, the author considers the change in the speed of water flow in a turbulent regime in the verticals of watered cros-section of natural waterbeds. The values of the parameters at issue are determined, as well as the equation for calculating the mean speed of the flow at bottom.

Key words: Karman's constant, mean water velocity, friction factor, friction velocity

Pri razmatranju gibanja vode u uvjetima laminiranog toka relativno je jednostavno, na osnovi teoretskih izvoda, odrediti jednadžbe raspodjele brzine u omočenom poprečnom presjeku. Jedan od tih izraza je poznati Poiseuillov zakon. Također je jednostavna i Darcyjeva jednadžba za koeficijent trenja, $\lambda = 64/Re$.

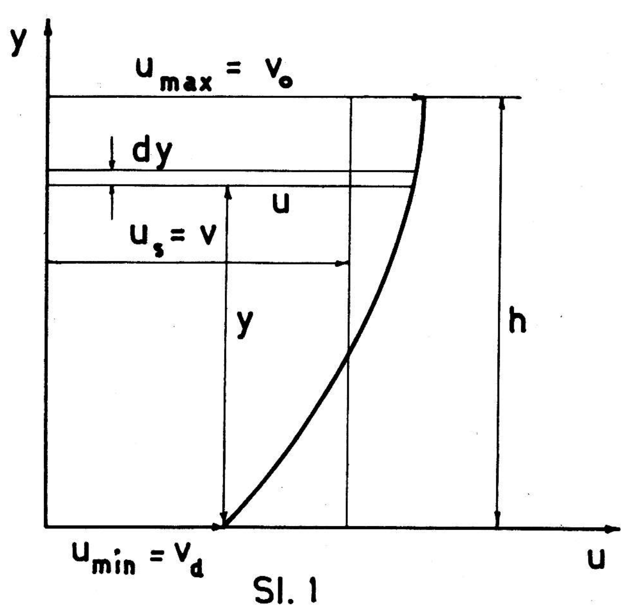
U slučaju turbulentnog gibanja taj postupak zbog prirode samog stanja nije jednostavan, o čemu svjedoči i oblik jednadžbe za koeficijent trenja, koji prema Thijsseu za hrapava korita glasi:

$$1/\lambda = 2{,}03 \log (12{,}2\ R/k_f)$$

Pri definiranju krivulje raspodjele brzine u vertikalama omočenog presjeka vodotoka, korišten je minimum ulaznih podataka i činjenica da je uzrok gibanju vode gravitacija, a da je brzina ovisna o hidrauličkom padu I te o dubini h (sl. 1).

Kako bi se izvod mogao izraziti bezdimenzionalno, uvode se veličine za relativnu dubinu

$$\eta = \frac{y}{h}, \tag{1}$$



Sl. 1. Raspodjela brzine
Fig. 1. Velocity

a razlika između poznate najveće brzine i brzine u bilo kojoj dubini dijeljena je sa poznatim izrazom za dinamičku brzinu
$v^* = (g\,h\,I)^{1/2}$.

Relativni manjak srednje brzine može se izraziti kao

$$\varphi = \frac{V_o - u}{V_*} \tag{2}$$

Veličina φ zavisna je o dubini, odnosno o veličini η. Za tu svrhu mogu se primijeniti direktne logaritamske jednadžbe Karmana određene integriranjem Prandtlova izraza za gradijent brzine.

$$\varphi = -\frac{1}{k_1}\ln\eta \tag{3}$$

$$\varphi = -\frac{1}{k_2}\left[\ln(1-(1-\eta)^{1/2}) + (1-\eta)^{1/2}\right] \tag{4}$$

ili jednadžba zasnovana na teoriji o vrtložnom gibanju

$$\varphi = \frac{2^{1/2}}{k_3}\left(\arcsin(1-\eta)^{1/2} - \eta^{1/2}(1-\eta)^{1/2}\right), \tag{5}$$

gdje su k_1, k_2, k_3 veličine koje po svom smislu predočuju univerzalnu Karmanovu konstantu k. Nikuradze je pokusima utvrdio da je $k \approx 0{,}4$, međutim za korita vodotoka sa pokretnim nanosom k je promjenljiv. Očito je iz (3), (4) i (5)

$$\varphi = \frac{1}{k} f(\eta) \tag{6}$$

Iz (2) i (6) slijedi da je promjena brzine u vertikali

$$u = v_o - \frac{v_*}{k} f(\eta), \tag{7}$$

što predstavlja jedan oblik utvrđivanja krivulje raspodjele brzine.

Srednja brzina u vertikali s obzirom na (3)

$$v = v_o - \frac{V_*}{k_{1_o}}\int_0^1 \ln\eta\, d\eta = v_o - \frac{V_*}{k_1} \tag{8}$$

S obzirom na (4)

$$v = v_o - \frac{V_*}{k_2}\int_0^1 \left[\ln(1-(1-\eta)^{1/2}) + (1-\eta)^{1/2}\right] d\eta$$

$$v = v_o - \frac{5}{6}\frac{v_*}{k_2} \tag{9}$$

S obzirom na (5)

$$v = v_o - \frac{2^{1/2} V^*}{k_3}\int_0^1 \left[\arcsin(1-\eta)^{1/2} - \eta^{1/2}(1-\eta)\right] d\eta$$

$$v = v_o - \frac{2^{1/2}\pi V_*}{8 k_3} \tag{10}$$

Kako je struktura jednadžbi (8), (9) i (10) ista, može se usvojiti opći oblik

$$v = v_o - \frac{v_*}{k} \tag{11}$$

Iz te jednadžbe vidljivo je da veličina 1/k

$$1/k = \frac{v_o - v}{v_*} \tag{12}$$

predstavlja relativni manjak srednje brzine na vertikali, dat promjenom koja se ne može postići jer bi tada bila brzina $v = v_o$. Uzevši u obzir značenje dinamičke brzine, iz (12) slijedi da je

$$k = \frac{(g\,h\,I)^{1/2}}{v_o - v} \tag{13}$$

Vrijednost k za brzinu u proizvoljnoj dubini vertikale odredit će se pomoću odnosa

$$k = -\frac{\ln (g\,h\,I)^{1/2}}{v_o - u} \tag{14}$$

gdje je brzina u zavisna o h.
Npr. za $\eta = 0.6$

$$k = -\frac{\ln\eta_{0,6}\,(g\,h\,I)^{1/2}}{v_o - u_{0,6}}$$

Srednja brzina na vertikali predočena jednadžbom (11) može se izraziti poznatom Chezyjevom jednadžbom

$$v = c_v (h\,I)^{1/2} \tag{15}$$

jer je u ovom slučaju hidraulički polumjer $R \approx h$.

Da bi Chezyjev koeficijent postao također bezdimenzionalna veličina, dijeljen je sa $g^{1/2}$

$$c_v^* = \frac{c_v}{g^{1/2}} \tag{16}$$

pa (15) glasi:

$$v = c_v^* (g\,h\,I)^{1/2} = c_v^*\, v^* \tag{17}$$

Uvrštenjem tog izraza u (12) dobiva se izraz za parametar k u drugom obliku

$$k = \frac{v_*}{v_o - c_v^* v_*} \tag{18}$$

Poznavajući hrapavost na nekoj dionici vodotoka te v_o i h u vertikalama poprečnog presjeka, mogu se odrediti: srednja brzina vode $v = f(v_o)$ i raspon vrijednosti parametara k_η, $k_\eta = f(h)$.

Za određivanje raspona navedenih veličina primijenjen je eliptički izraz za raspodjelu brzine u vertikali

$$u = v_o \, [1 - P\,(1-\eta)^2]^{1/2} \tag{19}$$

Srednja brzina može se odrediti integriranjem izraza (19)

$$v = v_o \int (1 - P\,(1-\eta)^2)^{1/2} d\eta$$

Nakon provedenog integriranja srednja brzina kao $v = f(v_o)$ je

$$v = v_o \left[P^{-1/2} \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \right], \tag{20}$$

gdje je $t = \arcsin P^{0,5}$

Bezdimenzionalni parametar P predočuje odnos

$$P = \frac{\gamma\, I\, h^2}{m\, v_o^2} \tag{21}$$

a određen je iz osnovne jednadžbe jednolikog gibanja

$$\tau = \gamma\, h\, I,$$

gdje je

$\tau = \pm \dfrac{dv}{dy}$ - tangencijalno naprezanje

dv/dy - gradijent brzine.

Međutim, prema A. V. Karauševu, izraz (21) može se odrediti na jednostavniji način. Ako je $10 < c < 60$, što je najčešći slučaj u praksi

$$P = 0{,}57 + \frac{3{,}3}{c} \tag{22a}$$

S obzirom da je $R \approx h$, Chezyjev broj je

$$c = h^{1/6}/n$$

$$P = 0{,}57 + \frac{3{,}3\, n}{h^{1/6}} \tag{22b}$$

Uvrštavanjem tog izraza u (20), određena je srednja brzina na vertikali, kao funkcija maksimalne brzine, 0,5 m/s $< v_o <$ 2,5 m/s tablica 1.

Poznavajući srednju brzinu, može se odrediti hidraulički pad

$$I = \frac{v^2}{c^2\, h} = \left(\frac{v\, n}{h^{2/3}} \right)^2 \tag{23}$$

koji je izračunat također u tablici 1, pa se sada može definirati dinamička brzina

$$v^* = (g\, h\, I)^{1/2}$$

te konačno proračunati raspon vrijednosti parametra k_1 pomoću jednadžbe koju dobivamo uvrštenjem izraza (19) u (14).

$$k_\eta = \frac{h\,(1-\eta)\, v_*}{v_o - v_o (1 - P\,(1-\eta)^2)^{1/2}} \tag{24}$$

Izračunate vrijednosti za $k_\lambda = f(\eta)$, pod predpostavkom koeficijenta hrapavosti $n = 0{,}03$, prikazane su u tablicama 1 i 2.

Tabela 2. Određivanje vrijednosti koeficijenta $k = f(_\eta)$

Table 2. Estimate the $k = f(_\eta)$ values

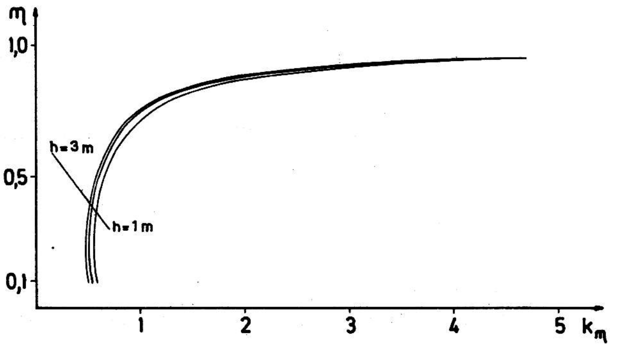
η	k_η		
	h = 1 m	h = 2 m	h = 3 m
0,1	0,58	0,53	0,50
0,2	0,54	0,49	0,47
0,3	0,55	0,50	0,47
0,5	0,65	0,59	0,56
0,7	0,96	0,87	0,82
0,8	1,36	1,23	1,17
0,9	2,58	2,34	2,21
0,95	5,03	4,57	4,31

Tabela 1. Srednje brzine i koeficijenti k_η kao funkcije maksimalnih brzina

Table 1. Mean velocities and coefficients k as the funktion of maximum velocities

Red br.	v_o m/s	v m/s	v_d m/s	k_η			I ‰		
				h = 1 m	h = 2 m	h = 3 m	h = 1 m	h = 2 m	h = 3 m
1	0,5	0,44	0,25	0,647	0,589	0,557	0,172	0,068	0,040
2	1,0	0,87	0,51				0,686	0,274	0,160
3	1,5	1,31	0,76				1,544	0,616	0,360
4	2,0	1,75	1,01				2,745	1,095	0,640
5	2,5	2,19	1,27				4,289	1,711	1,000

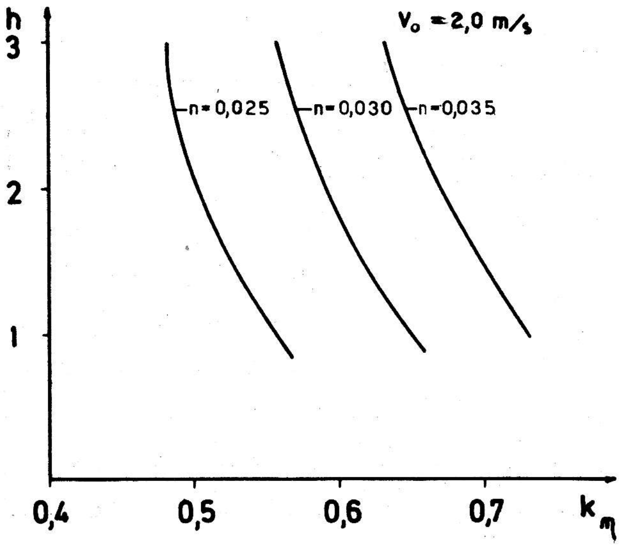
Rezultirajuće krivulje $k_\eta = f\ (h)$ pokazuje vrlo uzak raspon njihovih vrijednosti kod istih dubina, pa se može zaključiti da raspon parametra k_1 varira od $0,5 < k_1 < 4,5$ kod $0,2 < \eta < 0,95$.



Sl. 2. Krivulje k = f (η) za razne dubine
Fig. 2. Curves k = f (η) for diversedepths

Osim izračunatih vrijednosti za k_η (u tablici 1), određene su i vrijednosti pod istim uvjetima i za slučajeve kada je koeficijent hrapavosti n = 0,025 i n = 0,035.

Rezultati tog proračuna prikazani su grafički na sl. 3.



Sl. 3. Raspodjela k = (v_o) za raznu hrapavost
Fig. 3. Distribution k = (v_o) for the diverse roughness

Može se zaključiti da vrijednost za k_η pada porastom vodene razine, a raste povećanjem hrapavosti, ako je maksimalna brzina ista.

Zamjenom veličine u sa v u jednadžbi (19) slijedi jednadžba

$$(1 - \eta)^2 = \frac{1 - v^2 / v_o^2}{P} \qquad (25)$$

pomoću koje se može odrediti položaj srednje brzine u vertikali.

Iterativnim postupkom, uzevši u obzir razne uvjete gibanja (promjenom v_o, h, n), određeno je $\eta = 0,4$.

Osim usvojenog eliptičkog izraza za raspodjelu brzine (19) često se u hidrometrijskoj praksi upotrebljava potencijalni oblik

$$u = v_o\, \eta^{1/m}, \qquad (26)$$

pa je srednja brzina

$$v = v_o \int_0^{n=1} \eta^{1/m}\, d\eta\,,$$

odnosno

$$v = v_o \left(\frac{m}{m+1}\right)$$

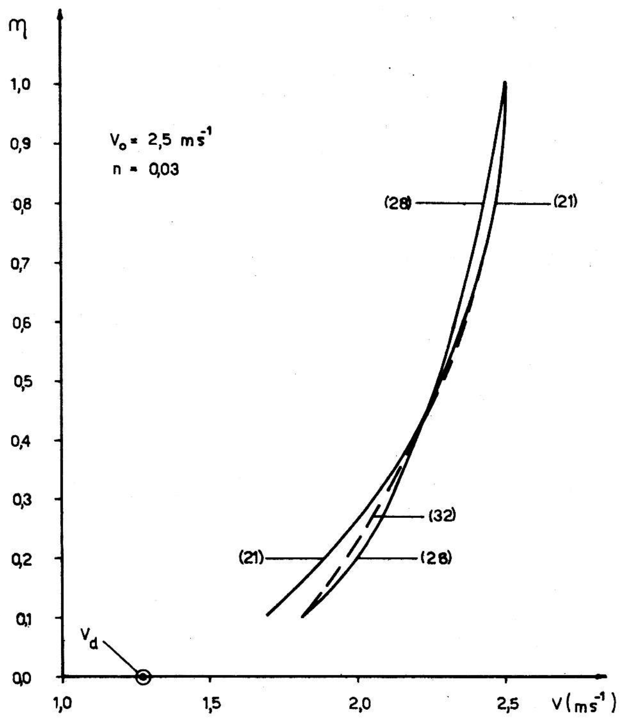
slijedi:

$$1/m = \frac{v_o - v}{v} \qquad (28)$$

dakle, također oblik relativnog manjka srednje brzine, slično izrazu 1/k.

S obzirom da je prethodni proračun pokazao da je $v_o \approx 1,14$ v (vidi tablicu 1), slijedi iz (28) da je $1/m \approx 0,14$, odnosno $m \approx 7$.

Prema tome jednadžba za srednju brzinu u vertikali, određena na osnovi (27) glasi:



Sl. 4. Krivulje raspodjele brzine u vertikali omoćenog presjeka
Fig. 4. Curves of the velocity distribution in the vertical of flow cross-sectional area

$$v = v_o \eta^{0,14} \quad (29)$$

Na slici 4 prikazana je krivulja u = f (h) prema (29) uz već proračunatu krivulju prema (19). Crtkana krivulja predstavlja zakon raspodjele prema poznatom obrascu Bazina

$$u = v_o - K (h\, I)^{1/2} (1 - \eta)^2, \quad (30)$$

gdje je za široka korita (B > 5 h) K ≈ 20.

U tablici 3 izvršena je usporedba proračunatih brzina u = f (η) prema svim trima formulama (19), (29) i (30).

Na osnovi tog proračuna utvrđena je vrijednost broja K, koja iznosi za

h = 1,0 m K = 13
h = 2,0 m K = 15
h = 3,0 m K = 16

Ako se u nazivnik izraza (28) uvrsti izraz za brzinu (17), tada je

ili s obzirom na (12)

$$k = 22\, n\, h^{-1/6} \quad (31)$$

Izjednačenje izraza (11) i (27) daje

odnosno, jer je m = 7

$$\frac{v_*}{k} = v_o - v_o \left(\frac{m}{m+1}\right) \quad (32)$$

$$k = \frac{v_*}{0,125\, v_o}$$

te su na taj način određena dva izraza za veličinu k, izraz (31) gdje je k = f (n, h) i izraz (32) gdje je k = f (v_o, I, h).

Uvodno je napomenuto da se navedena razmatranja odnose na gibanje vode u vertikali.

Relativni manjak srednje brzine u cijelom omočenom presjeku bit će analogno izrazu (13)

$$k_A = \frac{v_*}{v_o - v_A} \quad (33)$$

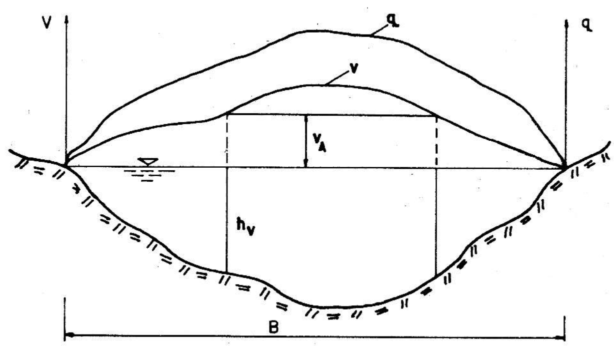
gdje je $v^* \approx (g\, R\, I)^{1/2} = (g\, h_s\, I)^{1/2}$, ako je širina vodene površine u omočenom presjeku dovoljno velika (B > 5 h_s).

Linija srednjih brzina predočuje na grafikonu (sl. 5) spojnicu srednjih brzina iz pojedinih vertikala.

Spojnica specifičnih protoka q = v h_v iz pojedinih vertikala predočuje liniju protoka.

Površina ispod linije protoka predočuje ukupan protok Q, iz čega slijedi srednja brzina omoćenog presjeka v_A = Q/A. Nanese li se u odgovarajućem mjerilu v_A u crtež, dobiva se položaj vertikala, u kojima je v = v_A.

Na sl. 5 vidi se, da to mogu za čitav presjek biti samo dva položaja, pa prema tome izraz (33) ima samo teoretsko značenje.



Sl. 5. Krivulje srednjih brzina i protoka
Fig. 5. Curves of the mean velocity and the discarge

Tabela 3. Usporedba proračunatih brzina u = f (η)

Table 3. Comarison of the calculating velocities u = f (η)

η	(19) v_o			(29) v_o			(30) v_o		
	0,5	1,5	2,5	0,5	1,5	2,5	0,5	1,5	2,5
0,1	0,34	1,02	1,64	0,36	1,09	1,81	0,36	0,09	1,81
0,2	0,38	1,13	1,89	0,40	1,20	2,00	0,39	1,17	1,96
0,3	0,41	1,23	2,05	0,42	1,27	2,11	0,42	1,25	2,08
0,5	0,46	1,37	2,28	0,45	1,36	2,27	0,46	1,37	2,29
0,7	0,48	1,45	2,42	0,48	1,43	2,38	0,48	1,45	2,42
0,8	0,49	1,48	2,47	0,48	1,45	2,42	0,49	1.48	2,47
0,9	0,50	1,49	2,49	0,49	1,48	2,46	0,50	1,49	2,49

Razmatranja vršena za k_η (24) pokazuju, a to je vidljivo iz tabele 1 odnosno sl. 2, da se izvršena analiza odnosi na područje $\eta > 0{,}2$, pa ostaje da se razmotri tok pri dnu, čije poznavanje je vrlo važno pri izučavanju deformacija korita i pronosa nanosa.

Analogno (2), relativni manjak brzine pri dnu, v_d, je

$$\varphi_d = \frac{v_o - v_d}{v_*} \qquad (34)$$

Za $\eta = 0$ može se od predloženih jednadžbi (3), (4) i (5), koristiti (5), čije rješenje glasi

$$\varphi_d = \frac{2^{1/2}\,\pi}{2\,k_3} \qquad (35)$$

Za tu svrhu je potrebno odrediti parametar k_3. Iz jednadžbe (10) slijedi

$$k_3 = 0{,}555\,\frac{v_*}{v_o - v} \qquad (36)$$

Tabela 4. Definiranje parametra k_3

Table 4. Definition of the parameter k_3

h	v_o	v	v_*	φ	k_3	k
1	1,0	0,87	0,082	1,585	0,36	0,65
	2,0	1,75	0,164	1,524	0,36	
2	1,0	0,88	0,073	1,644	0,33	0,59
	2,0	1,75	0,147	1,701	0,33	
3	1,0	0,88	0,069	1,739	0,32	0,56
	2,0	1,75	0,137	1,825	0,31	

Na osnovi proračunatih vrijednosti u tablici 4 određen je $k_3 = 0{,}56\,k$.

Uvrštenje u (35) daje

$$\frac{v_o - v_d}{v_*} = \frac{2^{1/2}\,\pi}{2 \times 0{,}56\,k}$$

odnosno

$$v_d = v_o - \frac{4\,v_*}{k} \qquad (37)$$

ili s obzirom na (31)

$$v_d = 0{,}58\,h^{2/3}\,I^{1/2}\,n^{-1} \qquad (38)$$

Rezultati proračuna prikazani su u tablici 1, gdje se razabiru slijedeći odnosi brzina u vertikalama:

$$v : v_o = 0{,}88 \qquad (39\text{ a})$$

$$v_d : v_o = 0{,}51 \qquad (39\text{ b})$$

$$v_d : v = 0{,}58 \qquad (39\text{ c})$$

Množenjem brzine pri dnu s visinom vertikale dobiva se

$$q_d = v_d\,h \qquad (40\text{ a})$$

odnosno

$$q_d = 0{,}58\,h^{5/3}\,I^{1/2}\,n^{-1} \qquad (40\text{ b})$$

izraz, koji predstavlja fiktivan protok u vertikali, očigledno $q_d < q$.

Adekvatno je ukupan protok pri dnu određen integriranjem izraza (40) po širini omoćene površine presjeka

$$Q_d = \int_A q_d\,db \qquad (41)$$

pa slijedi da je srednja brzina pri dnu korita

$$v_{d_A} = Q_d/A$$

odnosno konačno

$$v_{d_A} = \frac{0{,}58}{A\;n}\,I^{1/2}\int_0^B h^{5/3}\,db \qquad (42)$$

Kod praktičnog računanja integriranje se zamjenjuje sumiranjem konačnog broja (N) visina vertikala

$$v_{d_A} = \frac{0{,}58}{A\;n}\,I^{1/2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\,h^{5/3}_{i-1} + h^{5/3}_{i}\right) b \qquad (43)$$

ZNAČENJE OZNAKA

- A - površina omočenog presjeka
- b - razmak vertikala
- c_v - Chezyjev broj (u odnosu na vertikalu)
- g - gravitacijsko ubrzanje
- h - visina vode
- h_s - srednja visina vode
- I - hidraulički pad
- k_f - relativna hrapavost
- m - koeficijent proporcionalnosti
- n - koeficijent hrapavosti
- R - hidraulički polumjer
- R_e - Reynoldsov broj
- u - mjesna brzina
- v - srednja brzina protoka
- v_o - maksimalna brzina
- v_d - brzina pri dnu
- v^* - dinamička brzina
- y - visinski razmak
- η - relativna dubina
- γ - zapreminska težina vode
- λ - koeficijent hrapavosti

LITERATURA

E. Čavlek - Hidraulika, Zagreb, 1985.

G. V. Železnjakov - Teoretičeskie osnovji gidrometrii, Leningrad, 1968.

A. V. Karaušev - Rečnaja gidravlika, Leningrad, 1969.

D. B. Simons - Sediment Transport Technology, Fort Collins, Colorado, 1977.

ZAKLJUČAK

Razmatrano je turbulentno protjecanje vode u vodotocima do visine h = 3,0 m. Utvrđen je vrlo uzak raspon vrijednosti parametara protjecanja k_i koji po smislu odgovaraju Karmanovoj konstanti za proticanje u vertikalama omočenog presjeka.

Na osnovi toga definirana su dva izraza u obliku k = f (n, h), jednadžba (31) i k = f (v_o, I, h), jednadžba (32).

Daljnom analizom parametra k, koristeći stečene spoznaje definirana je formula za srednju brzinu vode pri dnu korita, jednadžba (43).

SUMMARY

The turbulent flow of water in beds is considered up to height of 3,0 m. A very narrow range of values for the flow parameters k_i - which by their meaning correspond to Karman's constant by flow in the verticals of watered cross-section-has been found. Based on that fact, two expressions of the form k = f (n, h) and k = f (v_o, I, h) - aquations (31) and (32) - have been defined.

Analysing the parameter k furter, and using the achieved comprehensions, the formula for the mean water velocity at the bottom of the bed has been defined - expression (43).