

## Stohastička povezanost velikih voda Vuke i Dunava

### The Stochastic Relation Between Flood of the Vuka and Danube

KSENIJA SREBRENOVIĆ

Republički hidrometeorološki zavod SR Hrvatske, Zagreb

**Sažetak:** Definiranje međusobno stohastičke povezanosti vodnih režima pritoke i glavnog recipijenta u analizi velikih voda neobično je interesantno za inženjersko dimenzioniranje niza hidrotehničkih zahvata na uređenju sliva pritoke. U ovom radu su razmatrani vodni režimi Vuke i Dunava. Očito je da geneza velikih voda Dunava i velikih voda na slivu Vuke nije identična, te stoga sigurno postoji velika vjerojatnost da unutrašnje velike vode Vuke naiđu na male, odnosno niske vodostaje u Dunavu i obrnuto. Upravo stoga je potrebno pored definiranja maksimalnih unutarnjih voda, utvrditi i stohastičku povezanost tih voda s vodnim nivoima Dunava na njihovu toku. Ta je povezanost definirana na temelju dvodimenzionalne normalne distribucije, elipsom 95 postotnog rasipanja.

**Ključne riječi:** Regresivna analiza, korelacija, dvodimenzionalna normalna raspodjela, elipsa rasipanja.

**Abstract:** Definition of stochastic relations between the tributary and main recipient water regimes in flood analysis is extremely interesting for technical design of the series of hydrotechnical measures to be undertaken for regulation of the tributary drainage basin. This study considers the water regimes of the Vuka and Danube. It is obvious that the genesis of Danube floods and floods in the Vuka drainage basin are not identical. Therefore, it is highly probable that internal Vuka floods meet the low water levels on the Danube, and vice versa. It is therefore necessary, aside from defining maximum internal waters, to determine the stochastic relation between these waters and Danube water levels, at their points of discharge. This relation is defined on the basis of two-dimension normal distribution, using 95% ellipse dispersion.

**Key words:** regression analysis, correlation, two-dimensional normal distribution, dispersion ellipse.

#### 1. KORELACIJSKA ANALIZA

Budući da ne postoje mjereni podaci o vodnim količinama unutar sliva Vuke (ili su oni veoma oskudni i nekvalitetni) potražiti ćemo korelativnu vezu između evidentiranih vodostaja. U račun ćemo uzeti maksimalne vodne nivoe izvjesnog perioda trajanja. S obzirom na to da veliki vodni valovi Dunava traju po više mjeseci, logično je pretpostaviti da neće vodostaj Vuke koji odgovara maksimalnom vodostaju na Dunavu dobro definirati unutrašnji vodni režim i obrnuto. Stoga je u račun uzet prosječni vodostaj perioda od 11 dana (5 dana prije formiranja maksimuma i 5 dana poslije) na stanicama Dunav—Vukovar i Vuka—Korpaš. Vodokazni profil Korpaš na Vuki lociran je u km 72.2, gdje se ne osjeća usporno djelovanje Dunava. Proračun je temeljen na evidentira-

nim podacima iz perioda 1931—1972. godine s tim da su svake godine odabrana dva najveća vodna vala. Vodostaji (varijable) su obilježeni na slijedeći način:

— slučaj a)

$x_1$  ... maksimalan vodostaj Dunava—Vukovar (prosjeak 11-dnevnih vodostaja u periodu kulminacije vodnog vala)  
 $y_1$  ... korespondentan vodostaj Vuke-Korpaš

— slučaj b)

$x_2$  ... maksimalna Vuka i  
 $y_2$  ... korespondentan Dunav.

Dakle, varijable  $x_1$  i  $x_2$  prezentiraju visoki vodni režim Dunava odnosno Vuke, dok  $y_1$  i  $y_2$  predstavljaju korespondentni režim na Vuki odnosno Duna-

vu. Korelativni proračun rezultirao je slijedećim parametrima:

— slučaj a)

$$\bar{x}_1 = 436,5 \text{ cm} \quad \bar{y}_1 = 81,2 \text{ cm} \quad n = 81$$

$$\sigma_{x_1} = \pm 110,15 \text{ cm} \quad \sigma_{y_1} = \pm 48,4 \text{ cm}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 2864920$$

$$r_1 = -0,058$$

— slučaj b)

$$\bar{x}_2 = 150,7 \text{ cm} \quad \bar{y}_2 = 259,7 \text{ cm} \quad n = 82$$

$$\sigma_{x_2} = \pm 58,26 \text{ cm} \quad \sigma_{y_2} = \pm 114,10 \text{ cm}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 3154044$$

$$r_2 = -0,100$$

Dakle, korelativni koeficijent  $r$ , koji se računa po formuli

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1)$$

je jako malen, gotovo je ravan nuli u jednom i drugom analiziranom slučaju.

Aproksimativna metoda za testiranje ove tvrdnje polazi od standardne devijacije  $\sigma_r$  koeficijenta korelacije  $r$ , koja se može proračunati ovako:

$$\sigma_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{N}} \quad (2)$$

Granice unutar kojih se nalazi koeficijent  $r$  su dane intervalom od tri standardne devijacije  $\sigma_r$  s obadje strane  $r$ , tj.  $r \pm 3 \sigma_r$ . Ako su ove granice različitih predznaka, kao što je to u našem slučaju

$$\begin{aligned} \text{a) } r_1 + 3 \sigma_{r_1} &= -0,058 + 3 \cdot 0,111 = 0,275 \\ r_1 - 3 \sigma_{r_1} &= -0,058 - 3 \cdot 0,111 = -0,391 \\ \text{b) } r_2 + 3 \sigma_{r_2} &= -0,100 + 3 \cdot 0,110 = 0,230 \\ r_2 - 3 \sigma_{r_2} &= -0,100 - 3 \cdot 0,110 = -0,430 \end{aligned}$$

tada se može uzeti da je  $r = 0$ . Dakle, na temelju ovog aproksimativnog testa može se tvrditi da visoki vodni režim Dunava ( $x_1$ ) i korespondentni režim Vuke ( $y_1$ ) predstavljaju nekorelirane slučajne veličine ( $r = 0$ ). Do istog zaključka došli smo i za par veličina ( $x_2, y_2$ ).

### 1. Ispitivanje nezavisnosti dvije slučajne varijable

No, međutim iz činjenice da je koeficijent korelacije  $r = 0$ , ne smije se izvesti zaključak da su promatrani parovi ( $x_1, y_1$ ) ili ( $x_2, y_2$ ) međusobno nezavisne slučajne varijable. Obrnuta tvrdnja vrijedi; stohastička nezavisnost  $x$  i  $y$  nužno povlači i njihovu nekoreliranost. Stoga je potrebno da ispitamo nezavisnost para slučajnih varijabli  $x$  i  $y$ . Metodu kontrole uveo je Pearson  $\chi^2$  — testom, koja razmatra diskretne slučajeve varijable. Zato da bi mogli koristiti ovaj postupak moramo originalnu kontinuiranu raspodjelu vodostaja (varijabli)  $x$  i  $y$  pretvoriti u diskretnu pomoću svrsishodno odabranih razreda. U tabeli 1 i 2 promatrane

parove ( $x_i, y_i$ ), odnosno ( $x_2, y_2$ ) svrstali smo u razrede (polja) veličine

$$\Delta x = \Delta y = 50 \text{ cm}$$

Ako i-tom razredu varijable  $x$  odgovara učestalost  $n_i$ , a k-tom razredu varijable  $y$  učestalost  $n_k$  parova ( $x, y$ ), te ako je broj razreda u kojima se pojavila varijabla  $x$  jednak  $r$ , odnosno broj razreda s varijablom  $y$  je  $q$ , tada suma:

pripada  $\chi^2$  raspodjeli sa stupnjevim slobode

$$f = (q - 1) (r - 1) \quad (4)$$

gdje je  $n_{ik}$  učestalost zajedničke pojave para ( $x, y$ ) u i-tom i k-tom razredu.

U tabeli 1 i 2 određene su veličine  $\chi^2$  i  $f$ . Budući da je  $f > 30$  u našem slučaju, to vrijednost  $\sqrt{2\chi^2}$ , izračunata iz sume  $\chi^2$ , slijedi normalnu raspodjelu, čija je srednja vrijednost približno jednaka  $\sqrt{2(f-1)}$ . Dakle, definirajući parametar

$$t = |\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2(f-1)}| \quad (5)$$

uu tabeli normalne raspodjele nalazimo odgovarajuću vrijednost funkcije  $P(t)$  s kojom iz jednadžbe  $p = 2 [100 - P(t)]$ , nalazimo vrijednost  $p$  na kojoj temeljimo donošenje odluke.

Korištenjem formula 3, 4, 5 proračun veličina  $p$  je prikazan u tabeli 1 za slučaj a) odnosno za slučaj b) stanja režima voda Vuke i Dunava u tabeli 2. Na temelju tih rezultata možemo konstatirati da je vjerojatnost međusobne nezavisnosti slučajnih varijabli:

$$\begin{aligned} x_1 \text{ i } y_1 \text{ (slučaj a) } & p = 40,6\%, \text{ odnosno} \\ x_2 \text{ i } y_2 \text{ (slučaj b) } & p = 46,6\%. \end{aligned}$$

### 2. DVODIMENZIONALNA NORMALNA DISTRIBUCIJA — ELIPSA RASIPANJA

Kada se slučajne varijable  $x$  i  $y$  mogu smatrati stohastički nezavisnim veličinama (što znači da su i nekorelirane) tada se vjerojatnost njihove zajedničke pojave  $p(x, y)$ , odnosno funkcija gustoće može jednostavno proračunati iz:

$$p(x, y) = p_1(x) p_2(y) \quad (6)$$

gdje su:  $p_1(x)$  i  $p_2(y)$  ... marginalne funkcije gustoće slučajnih veličina  $x$  i  $y$ .

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad (6a)$$

Ako su varijable  $x$  i  $y$  stohastički nezavisne  $r = 0$  i normalno distribuirane s parametrima ( $\bar{x}, \sigma_x$ ) i ( $\bar{y}, \sigma_y$ ), to je prema 6 i 6a funkcija gustoće njihove dvodimenzionalne normalne distribucije:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x-\bar{x}}{\sigma_x} \right)^2 + \left( \frac{y-\bar{y}}{\sigma_y} \right)^2 \right]} \quad (7)$$

Skup svih točaka u ravnini koordinatnog sistema:  $x$  i  $y$  odnosno skup parova varijabli  $(x, y)$  kojima pripada ista gustoća vjerojatnosti  $p(x, y) = \text{const.}$  je prema jednadžbi

$$\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2 = c^2$$

gdje  $c^2$  označava konstantu. Ova jednadžba predstavlja elipsu s centrom  $(\bar{x}, \bar{y})$  i poluosima  $(c\sigma_x, c\sigma_y)$ . Osovine ove elipse, koja se naziva elipsa rasipanja su paralelne s koordinatnim osima  $x$  i  $y$ .

Nužan i dovoljan uvjet da par varijabli  $(x, y)$ , leži unutar elipse definirane jednadžbom 8 izražava se nejednadžbom:

$$\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2 < c^2$$

Ako uvedemo u razmatranje standardne varijable  $t_1, t_2$

$$t_1 = \frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}, \quad t_2 = \frac{y-\bar{y}}{\sigma_y} \quad (10)$$

dobivamo da njihova suma kvadrata:

$$t_1^2 + t_2^2 = \chi^2 \quad (11)$$

pripada poznatoj  $\chi^2$  raspodjeli sa dva stupnja slobode:  $f = 2$ .

Vjerojatnost da je nejednadžba 9 zadovoljena iznosi:

$$P\{\chi^2 < c^2\} \quad \text{za } f = 2 \quad (12)$$

odnosno vjerojatnost da par varijabli  $(x, y)$  leži unutar elipse definirane izrazom:

$$\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2 = \chi^2_{f=2} \quad (13)$$

iznosi  $P$ . Za  $P = 95\%$ , odnosno za 95%-tnu elipsu rasipanja  $\chi^2 P = 95\%$  iznosi 5,991 (za  $f = 2$ ).

Jednadžba 95%-tne elipse rasipanja za naš analizirani slučaj b) koji prezentira visoki režim Vuške  $x_2$  i korespondentni režim Dunava  $y_2$  glasi:

$$\left(\frac{x_2 - 150,7}{58,26}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - 259,7}{114,10}\right)^2 = 5,991$$

Ta elipsa imade poluosi

— u smjeru osi  $x_2$ :  $a = 58,26 \sqrt{5,991} = 142,6 \text{ cm}$

— u smjeru osi  $y_2$ :  $b = 114,10 \sqrt{5,991} = 279,3 \text{ cm}$

kada bi se ta elipsa prezentirala grafički kao što je učinjeno npr. na sl. 4. moglo bi se konstatirati, da broj točaka  $(x_2, y_2)$  koje leže izvan te elipse, nije ništa veći od teoretskog očekivanog broja točaka. Razlozi za ovo leže u dokazanim pretpostavkama, koje dovode do mogućnosti primjene jednadžbe 7 (odnosno dvodimenzionalne normalne distribucije nezavisnih varijabli) na razmatrani niz parova  $(x_2, y_2)$ , a te su:

1) Varijable  $x_2$  i  $y_2$  su stohastički nezavisne. Pre-

mda je ova konstatacija statistički neoboriva, obzirom na izvršene testove, ipak ostaje činjenica da proračunati  $r$  (koji je također opterećen pogreškama uzorka) nije jednak nuli ( $r_2 = -0,10$ ).

2) Varijable  $x_2$  i  $y_2$  normalno distribuirane, odnosno funkcije gustoće  $p_1(x_2)$  i  $p_2(y_2)$  pripadaju normalnoj raspodjeli.

Iz tabele 2 obzirom na rasipanje točaka oko pravaca  $\bar{x}_2$  i  $\bar{y}_2$ , te s obzirom na učinjene testove prilagodbe varijabli  $x_2$  i  $y_2$  normalnoj distribuciji, može se konstatirati, da se statistički ne bi moglo dokazati, da se varijable  $x_2$  i  $y_2$  ne pokoravaju normalnoj raspodjeli.

Zbog skučenog prostora prikazujemo na slici 1 normalnu distribuciju samo varijable  $y_2$ , kao i klasični test prilagodbe po Kolmogorovu, na sl. 2., za koje nije potreban komentar.

Međutim, pretpostavka navedena pod 2) nije dovoljna, jer ako su marginalne distribucije normalne, funkcija gustoće  $p(x, y)$  može biti, ali ne mora biti neophodno normalna.

Stoga ćemo u proračun ipak uvesti koeficijent korelacije  $r$ , te testiranjem dokazati da se  $p(x, y)$  pokorava dvodimenzionalnoj normalnoj distribuciji. Račun će se odnositi na razmatrani slučaj b).

U tom slučaju  $x$  i  $y$  nisu stohastički nezavisne. U jednadžbu 7 mora se uvesti koeficijent korelacije  $r$ , koji karakterizira mjeru zavisnosti  $x$  i  $y$ , te ta jednadžba dobiva oblik:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2 - 2r\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y} + \left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2\right]} \quad (14)$$

Međutim, forma dvodimenzionalne normalne distribucije izražena formulom 7 je mnogo jednostavnija i pogodnija za proračune od općeg oblika 14 pa se prirodno nameće ideja da se izvjesnom transformacijom koordinatnog sistema  $x, y$  u neki novi koordinatni sistem, kojeg smo obilježili sa  $y_1$  i  $y_2$ , pokuša prevesti 14 u formu 7. Drugim riječima želimo umjesto para varijabli  $(x, y)$  promatrati drugi par  $(y_1, y_2)$ , čije su veličine u određenoj funkcijskoj zavisnosti s parom  $(x, y)$ , ali su istovremeno međusobno stohastički nezavisne. U tom cilju koristimo slijedeću linearnu transformaciju:

$$\begin{aligned} x - \bar{x} &= y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha \\ y - \bar{y} &= y_1 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha \end{aligned} \quad (15)$$

gdje je:

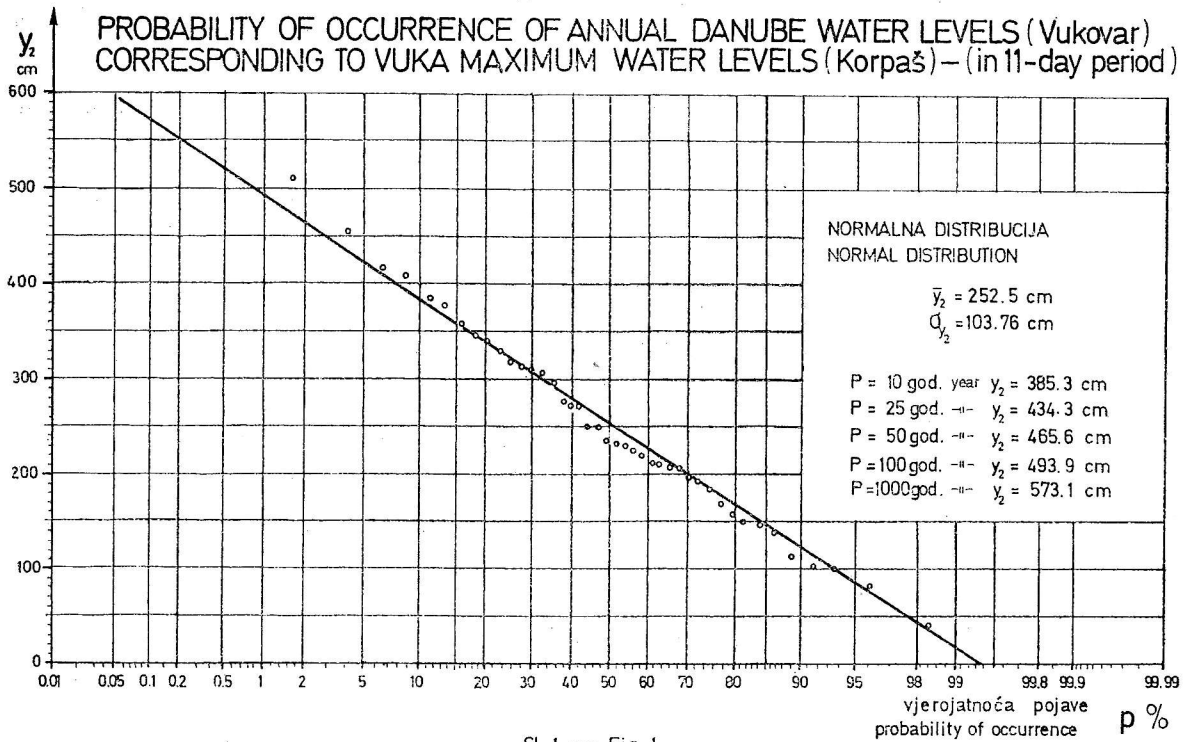
$$\tan 2\alpha = \frac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \quad (16)$$

Za ovu vrijednost  $\alpha$  varijable  $y_1$  i  $y_2$  su stohastički nezavisne, pa je funkcija gustoće 14 prešla u oblik:

$$p(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{\sigma_{y_1}^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_{y_2}^2}\right)} \quad (17)$$

VJEROJATNOST POJAVE GODIŠNJIH VODOSTAJA DUNAVA (Vukovar) KORESPONDENTNIH MAKSIMALNIM NA VUKI (Korpaš) – (u 11-dnevnom periodu)

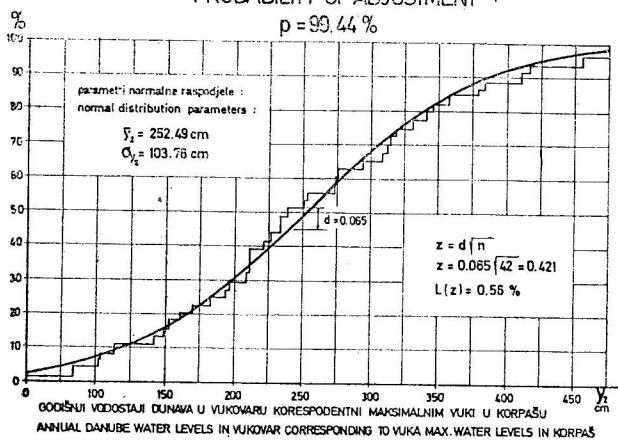
PROBABILITY OF OCCURRENCE OF ANNUAL DANUBE WATER LEVELS (Vukovar) CORRESPONDING TO VUKA MAXIMUM WATER LEVELS (Korpaš) – (in 11-day period)



Sl. 1 ..... Fig. 1

VJEROJATNOST PRILAGODBE :  
PROBABILITY OF ADJUSTMENT :  
p = 99,44 %

$$\left(\frac{y_1}{\sigma_{y_1}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sigma_{y_2}}\right)^2 = \chi^2; f = 2 \quad (20)$$

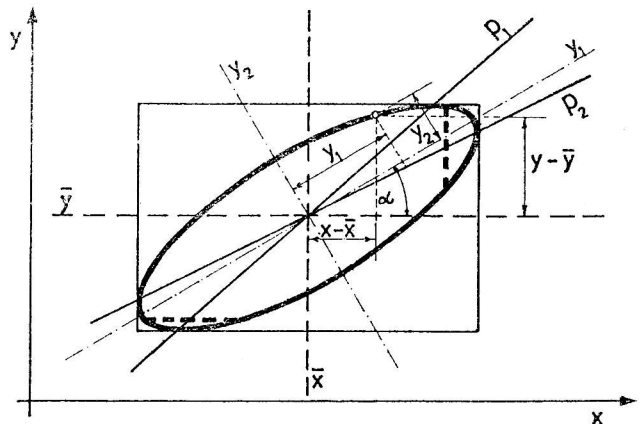


Sl. 2 ..... Fig. 2

Jednadžbe 19 i 20 elipse rasipanja su identične, ali je potonja daleko prikladnija za proračun.

Vjerojatnost da par veličina (x, y) leži unutar elipse 20 je:

$$P \{ \chi^2 < c^2 \} \quad \text{za } f = 2$$



Sl. 3 ..... Fig. 3

Varijance  $\sigma_{y_1}^2$  i  $\sigma_{y_2}^2$  veličina  $y_1$  i  $y_2$  izražavaju se pomoću varijanci  $\sigma_x^2$  i  $\sigma_y^2$ , te koeficijenta korelacije r slučajnih veličina x i y relacijama:

$$\begin{aligned} (\sigma_{y_1} + \sigma_{y_2})^2 &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2} \\ (\sigma_{y_1} - \sigma_{y_2})^2 &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Elipsa rasipanja koja odgovara funkciji 14 imade jednadžbu:

$$\frac{1}{1-r^2} \left[ \left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2 - 2r\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y} + \left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2 \right] = c^2 \quad (19)$$

koja je prema funkciji 17 ovako definirana:

Na slici je prikazana pozicija elipse rasipanja, pozicija regresivnih linija u odnosu na elipsu, te transformacija koordinatnog sistema (x, y) u sistem (y<sub>1</sub>, y<sub>2</sub>).

Elipsa je situirana u centar  $(\bar{x}, \bar{y})$  ishodišta koordinatnog sistema  $y_1, y_2$ , sa poluosima  $(\chi_p \sigma_{y_1}, \chi_p \sigma_{y_2})$ . Može se opisati sa pravokutnikom, čije su stranice paralelne sa koordinatnim sistemom  $x$  i  $y$ , a imaju dužinu  $2 \alpha_x \chi_p$  i  $2 \sigma_y \chi_p$ .

Regresijski pravac  $y$  o  $x$ , definiran jednačbom

$$y - \bar{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) \dots p_1 \quad (21)$$

prolazi kroz centar vertikalnih odsječaka elipse, dok drugi regresijski pravac  $x$  o  $y$ , čija je jednačba:

$$x - \bar{x} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}) \dots p_2 \quad (22)$$

prolazi kroz centar horizontalnih odsječaka elipse. To je zbog toga, što je za regresijski pravac  $p_1$  suma kvadrata odstupanja po ordinati  $y$ , a za  $p_2$  po apscisi  $x$  minimalna.

Glavna os elipse, koja imade jednačbu:

$$y = \bar{y} + \operatorname{tg} \alpha (x - \bar{x}) \quad (23)$$

također se naziva i ortogonalna regresija, jer je suma kvadrata poprečnih devijacija od tog pravca minimalna.

Za naš promatrani slučaj visokog vodnog režima Vuke ( $x_2$ ) i korespodentnog režima Dunava ( $y_2$ ) prema iznesenim statističkim parametrima u poglavlju 1. imamo (indeks 2 varijabli  $x$  i  $y$  smo u slijedećem prikazu izostavili):

— regresijski pravci (formule 21 i 22)

$$p_1 \dots y = -0,100 \cdot 114,10 / 58,26 (x - 150,70) + 259,67 = -0,1962 x + 289,23$$

$$p_2 \dots x = -0,100 \cdot 58,26 / 114,10 (y - 259,67) + 150,70 = -0,0512 y + 163,99$$

nagib glavne osi elipse (formula 16)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(-0,100) 58,26 \cdot 114,10}{58,26^2 - 114,10^2} = 0,1381$$

$$2\alpha = 7,86^\circ \quad \alpha = 3,93^\circ$$

— jednačba glavne osi elipse (formula 23)

$$y = 259,67 + 0,0687 (x - 150,70) = 0,0687 x + 249,31$$

Svi ovi pravci prezentirani su na grafičkom prikazu parova varijabli  $(x, y)$  na sl. 14 koji je također poslužio da se prikaže i elipsa 95 postotne vjerovatnosti. Ona je konstruirana na temelju relacija 18 iz kojih su proračunate devijacije  $\sigma_{y_1}$  i  $\sigma_{y_2}$  koordinatnog sistema  $(y_1, y_2)$  s centrom u točki  $(\bar{x} = 150,70, \bar{y} = 259,67)$ .

Rješenje jednačbi:

$$\frac{(\sigma_{y_1} + \sigma_{y_2})^2}{\sqrt{1 - 0,100^2}} = 58,26^2 + 114,10^2 + 2 \cdot 58,26 \cdot 114,10 = 29641,06$$

$$\frac{(\sigma_{y_1} - \sigma_{y_2})^2}{\sqrt{1 - 0,100^2}} = 58,26^2 + 114,10^2 - 2 \cdot 58,26 \cdot 114,10 = 3185,02$$

odnosno

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1} + \sigma_{y_2} &= 172,166 \\ \sigma_{y_1} - \sigma_{y_2} &= -56,436 \end{aligned}$$

daje:

$$\sigma_{y_1} = 57,87 \text{ cm} \quad \sigma_{y_2} = 114,30 \text{ cm}$$

pa je jednačba 95% -tne elipse (formula 20):

$$\left(\frac{y_1}{57,87}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{114,30}\right)^2 = 5,991$$

$$\text{jer je } \chi^2 = 5,991 \text{ za } f = 2 \\ P = 95\%$$

Poluosi te elipse iznose:

$$\text{— glavna: } a = 114,30 \sqrt{5,991} = 279,8 \text{ cm} \\ (\text{u smjeru osi } y_2)$$

$$\text{— sporedna: } b = 57,87 \sqrt{5,991} = 141,7 \text{ cm} \\ (\text{u smjeru osi } y_1)$$

Elipsa je upisana u pravokutnik

$$\text{dužine: } 2 \cdot 58,26 \cdot \sqrt{5,991} = 285,2 \text{ cm} \\ (\text{u smjeru osi } x)$$

$$\text{širine: } 2 \cdot 114,10 \cdot \sqrt{5,991} = 558,55 \text{ cm} \\ (\text{u smjeru osi } y)$$

Iz grafičkog prikaza ove elipse 95% -tne vjerovatnosti može se lagano konstatirati, da se svega 4 točke, koje smo označili sa A, B, C i D nalaze izvan nje. To je upravo teoretski broj parova varijabli  $(x, y)$  koji se može nalaziti izvan te elipse. Naime, 5% od ukupnog broja podataka  $n = 82$  iznosi:  $0,05 \times 82 = 4,1$ . Prema tome, mogli bismo zaključiti da se zajednička funkcija distribucije  $p(x, y)$  varijabli  $x$  i  $y$  može prezentirati dvodimenzionalnom normalnom raspodjelom. Da ovu konstataciju doista dokažemo prikazat ćemo jednostavan test, koji se temelji na relacijama 19 i 20.

2.2. Testiranje prilagodbe funkcije gustoće  $p(x, y)$  dvodimenzionalnoj normalnoj distribuciji:

U tu svrhu promatraju se parovi varijabli  $(x_2, y_2)$ , te se za svaki proračuna veličina:

$$\chi^2 = \frac{1}{1 - r^2} \left[ \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \right)^2 - 2r \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y} + \left( \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y} \right)^2 \right] \quad (24)$$

koja se prema izrazu 10 može pisati:

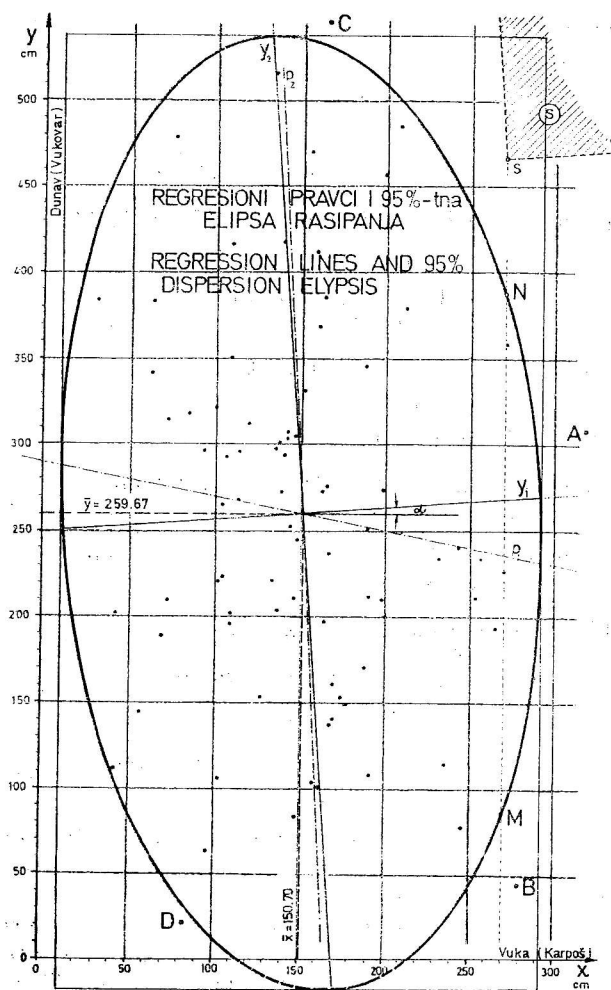
$$\chi^2 = \frac{1}{1 - r^2} [t_1^2 - 2r t_1 t_2 + t_2^2] \quad (25)$$

Distribucija ovih  $\chi^2$  vrijednosti se može komparirati s korespodentnom teoretskom distribucijom, koja glasi:

$$P\{\chi^2\} = 1 - e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \quad (26)$$

odnosno:

$$\log(1 - P\{\chi^2\}) = -0,217 \chi^2 \quad (27)$$



Sl. 4 ..... Fig. 4

Dakle, potrebno je proračunati  $n$  vrijednosti  $\chi^2$  prema formuli 24 zatim ih poredati u rastućem poretku i pridodati svakoj odgovarajuću vjerojatnost  $1 - P\{\chi^2\}$ , proračunatu formulom kumulativne empirijske frekvencije oblika:

$$1 - P\{\chi^2\} = \frac{n - i + 1/2}{n} \quad (28)$$

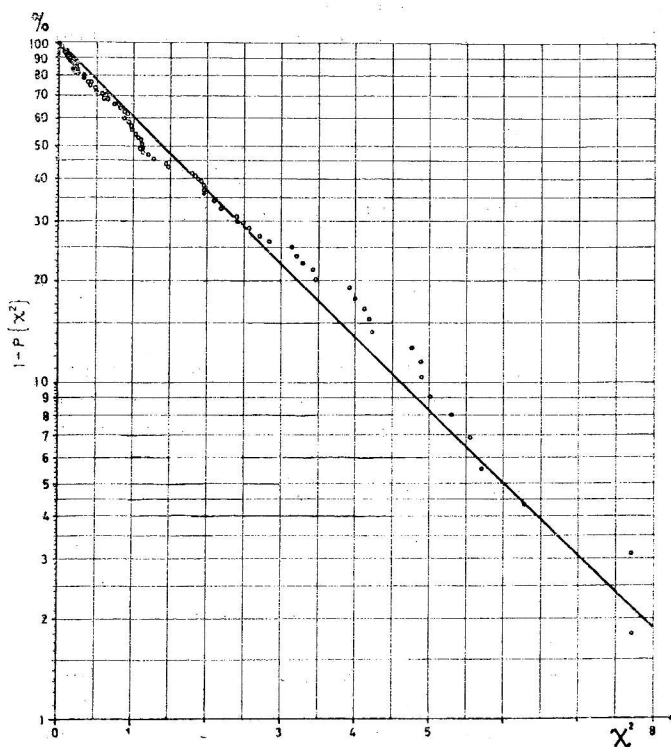
Parove veličina  $\chi^2$  i  $1 - P\{\chi^2\}$  nacrtali smo u linearno-logaritamskom mjerilu u kojem je jednačba 26 a prezentirana pravcem kroz točku  $(0, 1)$  sa nagibom  $-0,217$ .

Varijacije točaka oko tog pravca (teoretske funkcije distribucije  $\chi^2$ ) ne indiciraju da ispitivana distribucija signifikantno odstupa od teoretske  $\chi^2$ -distribucije, zbog toga je hipoteza da opažanja  $(x, y)$  pripadaju dvodimenzionalnoj normalnoj distribuciji potpuno na mjestu.

### 3. KOMENTAR PRORAČUNA STOHAŠTIČKE POVEZANOSTI VODNIH REŽIMA VUKE I DUNAVA

Visoki vodni režim Vuke ( $x_2$ ) i korespondentni Dunava ( $y_2$ ) u 3 postotnom godišnjem trajanju

### RELACIJA IZMEĐU $\chi^2$ I KUMULATIVNE FREKVENCije RELATION BETWEEN $\chi^2$ AND CUMMULATIVE FREQUENCY



Sl. 5 ..... Fig. 5

predstavlja gotovo stohastički nezavisan slučajni sistem, tako da poznavanje vrijednosti veličine  $x_2$  ne daje gotovo nikakvu informaciju o slučajnoj veličini  $y_2$ . Njihov koeficijent korelacije iznosi svega  $r = -0,100$ , te svojom veličinom ukazuje na vrlo malu zavisnost varijabli  $x_2$  i  $y_2$ . To se najbolje može konstatirati iz prezentirane 95 postotne elipse rasipanja. Uzimamo da varijabla  $x_2$  koja karakterizira visoki vodni režim Vuke poprmi diskretnu vrijednost koja odgovara 2 postotnoj vjerojatnoći pojave, odnosno povratnom periodu  $P = 50$  godina. Za taj period faktor učestalosti ili standardizirana normalna varijabla s parametrima  $(0,1)$  iznosi  $t = 2,054$  pa je veličina varijable  $x_2$ :

$$x_2 = \bar{x}_2 + t\sigma_{x_2} = 150,7 + 2,054 \cdot 58,26 = 270,4 \text{ cm}$$

Taj pravac siječe elipsu u dvije točke koje smo obilježili sa M i N. Koordinatu  $y_2$  tih točaka izračunat ćemo analitički. Najjednostavnije je koristiti za jednačbu elipse izraz 25

$$t^2 - 2rt_1 \cdot t_2 + t_2^2 = (1 - r^2) \chi^2$$

Supstitucijom poznatih veličina ( $r, t_1$  i  $\chi^2$ ) dobivamo:

$$2,054^2 - 2(-0,10) \cdot 2,054 t_2 + t_2^2 = (1 - 0,1^2) \cdot 5,991$$

odnosno:

$$t_2^2 + 0,4108 t_2 - 1,7122 = 0$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe iznose:

$$(t_2)_1 = 1,1191 \quad (t_2)_2 = -1,5299$$

te je koordinata  $y_2$ :

$$\text{točke N } y_2 = \bar{y}_2 + (t_2)_1 \sigma_{y_2} = 259,67 + 1,1191 \cdot 114,10 \\ = 387,4 \text{ cm}$$

$$\text{točke M } y_2 = \bar{y}_2 + (t_2)_2 \sigma_{y_2} = 259,67 - 1,5299 \cdot 114,10 \\ = 85,1 \text{ cm}$$

Dakle sa 95% -tnom sigurnosti možemo tvrditi da će 50-godišnjem visokom režimu Vuke odgovarati vodostaj Dunava u velikom dijapazonu od 85,1 cm do 387,4 cm. Poznavajući veličinu  $y_2$  dobivamo vrlo malu informaciju o slučajnoj veličini  $y_2$ . Točke N i M su simetrično položene s obzirom na prvi regresijski pravac  $p_1$ . Vjerojatnost da se par varijabli  $(x_2, y_2)$  nađe u području S koje je definirano točkom N sa koordinatama:  $x_2 = 270,4$  cm i  $y_2 = 387,4$  cm (vidi skicu), iznosi:

$$F(x_2, y_2) = P\{x_2 > 270,4, y_2 < 387,4\} \\ = [1 - p_1(x_2)][1 - p_2(y_2)]$$

Uvjetna slučajna veličina  $y_2$  je distribuirana po normalnom zakonu s paramtrima: očekivanom vrijednosti (regresijski pravac  $p_1$ ):

$$z = \bar{y}_2 + r \frac{\sigma_{y_2}}{\sigma_{x_2}} (x - \bar{x}) = 236,2 \text{ cm}$$

i standardnom devijacijom:

$$\sigma_z = \sigma_{y_2} (1 - r^2) = 113,53 \text{ cm}$$

te je njezin faktor učestalosti:

$$t_z = \frac{387,4 - 236,2}{113,53} = 1,332$$

Shodno tome je  $p_2(y_2/x_2) = 0,908$ , pa je

$$p(x_2, y_2) = 0,02 \cdot 0,092 = 0,00183 \\ \text{ili } P = 547 \text{ god.}$$

Dakle, vjerojatnost da par varijabli  $(x_2, y_2)$  poprimi vrijednosti:  $x_2 = 270,4$  cm i  $y_2 = 387,4$  je jednaka 0,183% ili drugim riječima taj događaj imade povratni period  $P = 547$  godina.

Dvodimenzionalna normalna distribucija vodnih režima Vuke i Dunava omogućuje nam da proračunamo vjerojatnost istovremene pojave velikih voda raznih frekvencija.

Na pr. razmotrimo vjerojatnost zajedničke pojave vodnih režima Vuke i Dunava od kojih je svaki povratnog perioda većeg od 50 godina. Prema prezentiranoj marginalnoj distribuciji (sl. 1) varijable  $y_2$ , ta veličina iznosi  $y_2 = 465,6$  cm.

Shodno tome potrebno je proračunati vjerojatnost da nastupi događaj:

$$F[(x_2, y_2) \in S] = P\{x_2 > 270,4, y_2 > 465,6\}$$

odnosno da par  $(x_2, y_2)$  padne u područje S obilježeno na skici 95-postotne elipse rasipanja. Usvajajući da su varijable  $x_2$  i  $y_2$  potpuno međusobno nezavisne dobivamo prema izrazu 6

$$P\{(x_2, y_2) \in S\} = [1 - p_1(x_2)] [1 - p_2(y_2)] = \\ = (1 - 0,98) (1 - 0,98) = 0,0004 = 0,04\% \text{ ili } \\ P = 2500 \text{ god.}$$

Uvodeći u proračun postojeći koeficijent korelacije  $r = -0,10$ , vjerojatnost ovog događaja najlakše je proračunati korištenjem formule 28. No, prije toga potrebno je transformirati koordinate točke S iz koordinatnog sistema  $x_2$  i  $y_2$  u sistem  $y_1$  i  $y_2$ . Prema relacijama 15 dobivamo:

$$270,4 - 150,7 = y_1 \cos 3^\circ,93 - y_2 \sin 3^\circ,93 \\ 465,6 - 259,7 = y_1 \sin 3^\circ,93 + y_2 \cos 3^\circ,93$$

Rješenje ovog sistema jednadžbi daje:

$$y_1 = 133,5 \text{ cm} \quad y_2 = 197,2 \text{ cm}$$

te je prema formuli:

$$F(y_1, y_2) = P\{y_1 < y_1, y_2 < y_2\} = \Phi\left(\frac{y_1}{\sigma_{y_1}}\right) \cdot \Phi\left(\frac{y_2}{\sigma_{y_2}}\right) \quad (29)$$

gdje je  $\Phi$  funkcija Gaussovog integrala

$$P\{(y_1, y_2) \in S\} = [1 - \Phi\left(\frac{133,5}{57,87}\right)] [1 - \Phi\left(\frac{197,2}{114,3}\right)] \\ = (1 - 0,9891) (1 - 0,9477) = 0,0109 \cdot 0,0423 \\ = 0,046\% \text{ ili } P = 2169 \text{ god.}$$

Prema tome, vjerojatnost zajedničke pojave vodnih režima Vuke i Dunava povratnih perioda većih od 50 godina je vrlo mala.

#### ZAKLJUČAK:

Na temelju provedenih analiza i proračuna može se zaključiti:

— Da visoki vodni režim Dunava u Vukovaru i korespondentni Vuke u Korpašu, i obrnuto »visoka« Vuka i korespondentni Dunav, prezentirani historijski evidentiranim nizovima vodostaja iz perioda 1931—1972, predstavljaju slučajne stacionarne procese koji se sa statistički zadovoljavajućom točnošću mogu definirati normalnom distribucijom.

— Da su koeficijenti korelacije kao mjera međusobne stohastičke zavisnosti promatranih parova varijabli vrlo mali. Oni iznose:  $r = -0,058$  za slučaj formiranja maksimuma na Dunavu, odnosno  $r = -0,100$  kod maksimuma na Vuki.

Stoga poznavanje jednog vodnog režima daje relativno male informacije o korespondentnom režimu, što se može konstatirati i iz oblika prezentirane elipse rasipanja.

— Zajednička raspodjela analiziranih parova varijabli daje se dobro definirati dvodimenzionalnim normalnim zakonom, a njihova disperzija prikazati elipsom rasipanja. Sa 95-postotnom sigurnosti možemo tvrditi da će kod 50-godišnjeg visokog vodnog režima Vuke vodostaj Dunava u Vukovaru biti u velikom dijapazonu od 85—387 cm. Za ostale karakteristične frekvencije velikih voda

moгу se rezultati jednostavno definirati iz slike 4.

— Da je vjerojatnost zajedničke pojave visokih vodnih režima na oba vodotoka vrlo mala.

Ako npr. zahtijevamo da obadva vodna režima imaju frekvenciju jednaku ili manju od 2% ( $P \geq 50$  godina) njihovu zajedničku pojavu karakterizira povratni period od 2170 godina.

#### ZAHVALA

Ovo istraživanje je sufinancirala Republička zajednica za znanstveni rad SRH (SIZ III).

#### LITERATURA

- J. Benjamin, A. Cornell: Probability, statistics, and design for civil engineers.  
 A. Hald: Statistical theory with engineering applications, Jons Wiley & sons, inc. New York 1967.  
 V. Serdar: Udžbenik statistike, Školska knjiga, Zagreb, 1966  
 D. Srebrenović: Osnovne matematske statistike primjenjene u hidrologiji, Seminar Jugoslavenskog komiteta za međunarodnu hidrološku deceniju, Zagreb 1971.

#### SUMMARY

This paper analyses the stochastic correlation between flood waters of the Vuka and Danube rivers by applying correlation analysis and bidimensional normal distribution. Based on these analyses and calculations the following can be stated:

— The Danube flood regime in Vukovar and the corresponding regime of the Vuka in Korpaš, and vice versa, »high« Vuka waters and the corresponding Danube River, given by an historically recorded historically recorded series of water levels over the period 1931—1972, present accidental stationary processes that can be, with statistically satisfying accuracy, defined by means of normal distribution.

— The correlation coefficients, as a measure of mutual stochastic dependence of the pair-variables observed, are very low. They are respectively  $r = -0.058$  in the case of creation of the Danube maximum and  $r = -0.1000$  for the maximum on the Vuka.

The study of one water regime therefore provides relatively poor information about the corresponding regime, which can also be concluded from the shape of the dispersion ellipse presented.

— Common distribution of the pair-variables analysed, can be defined successfully by bidimensional normal law, and their dispersion presented by a dispersion ellipse. We can claim, with 95% certainty, that by the 50-year Vuka floods, the Danube water level in Vukovar will range between 85—387 cm. For other characteristic flood frequencies results can be easily determined from Fig. 4.

— The probability of simultaneous occurrence of floods on both watercourses is very low.

If we request for both water regimes a frequency, for example, equal to or lower than 2% ( $P \geq 50$  years), their simultaneous occurrence is characterized by a 2170-year return period.