

Trodimenzijski numerički model prednapete natege

Mirela Galić, Željana Nikolić, Pavao Marović

Ključne riječi

prednapeta natega, numeričko modeliranje, prostorna konstrukcija, trodimenzijski model, krivocrtni konačni elementi

Key words

prestressed tie, numerical modelling, spatial structure, three-dimensional model, curvilinear finite elements

Mots clés

tirant précontraint, modelage numérique, structure spatiale, modèle tridimensionnel, éléments finis curvilignes

Ключевые слова

предварительно напряжённый кабель, числовое моделирование, пространственная конструкция, трёхмерная модель, криволинейный конечный элемент

Schlüsselworte

Vorspannkabel, numerisches Modellieren, räumliche Konstruktion, dreidimensionales Modell, krummlinige endliche Elemente

M. Galić, Ž. Nikolić, P. Marović

Izvorni znanstveni rad

Trodimenzijski numerički model prednapete natege

Prikazane su osnove numeričkog modeliranja prednapete natege za analizu prostornih prednapetih armiranobetonskih konstrukcija. Natege su modelirane jednodimenzionalnim krivocrtnim elementima ukomponiranim u trodimenzijski konačni element betona. Razvijeni model je uključenu program PRECON3D. Primjena modela prikazana je na numeričkim primjerima, a njezina valjanost provjerena je usporedbom dobivenih rezultata s numeričkim i eksperimentalnim rezultatima poznatima iz literature.

M. Galić, Ž. Nikolić, P. Marović

Original scientific paper

Three-dimensional model of a prestressed tie

Basic notions of numerical modelling of prestressed ties, as used in the analysis of spatial prestressed reinforced-concrete structures, are presented. The ties are modelled by one-dimensional curvilinear elements contained in a three-dimensional finite element of concrete. The model developed in this way is entered in the PRECON3D program. The use of the model is presented through numerical examples, and its validity is checked by comparing the results with numerical and experimental results taken from literature.

M. Galić, Ž. Nikolić, P. Marović

Ouvrage scientifique original

Modèle tridimensionnel du tirant précontraint

Les éléments de modelage numérique des tirants précontraints, utilisés dans l'analyse des structures précontraintes spatiales en béton armé, sont présentés. Les tirants sont modélés par les éléments unidimensionnels curvilignes inclus dans l'élément tridimensionnel fini du béton. Le modèle développé est inclus dans le programme PRECON3D. L'application du modèle est présentée par les exemples numériques, et son valeur est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec les résultats numériques et expérimentaux pris de la littérature.

M. Галич, Ж. Николитч, П. Марович

Оригинальная научная работа

Трёхмерная числовая модель предварительно напряжённого кабеля

В работе показаны основы числового моделирования предварительно напряжённого кабеля для анализа пространственных предварительно напряжённых железобетонных конструкций. Кабели моделированы одномерными криволинейными элементами, укрупненными в трёхмерный конечный элемент бетона. Развита модель включена в программу PRECON3D. Применение модели показано на числовых примерах, а её пригодность проверена сравнением полученных результатов с числовыми и экспериментальными результатами, известными из литературы.

M. Galić, Ž. Nikolić, P. Marović

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

Dreidimensionales numerisches Vorspannkabelmodell

Dargestellt sind Grundlagen des numerischen Modellierens eines Vorspannkabels für die Analyse räumlicher vorgespannter Stahlbetonkonstruktionen. Die Vorspannkabel modellierte man mit eindimensionalen krummlinigen Elementen, inkomponiert in das dreidimensionale endliche Element des Betons. Das entwickelte Modell ist in das Programm PRECON3D eingegliedert. Die Anwendung des Modells ist an numerischen Beispielen dargestellt, und dessen Gültigkeit durch Vergleich der gewonnenen Ergebnisse mit den aus der Literatur bekannten numerischen und experimentalen Ergebnissen bestätigt.

Autori: Mr. sc. **Mirela Galić**, dipl. ing. građ.; prof. dr. sc. **Željana Nikolić**, dipl. ing. građ.;
prof. dr. sc. **Pavao Marović**, dipl. ing. građ., Građevinsko-arhitektonski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split

1 Uvod

Prednapete se armiranobetonske konstrukcije u građevinarstvu uvelike primjenjuju osobito pri premoščivanju velikih raspona. Praćenje ponašanja tih konstrukcija zahtijeva poznavanje stanja naprezanja i deformacija u betonskoj konstrukciji, a to nije moguće bez dobrog opisa geometrije natega i analize sila u prednapetoj natezi. U literaturi su do sada objavljeni različiti modeli za analizu prednapetih konstrukcija koji se rabe u istraživanjima, a čija je primjena sve prisutnija u inženjerskim proračunima.

Postoji niz mogućnosti diskretizacije prednapetih konstrukcija. Najjednostavnija je diskretizacija betonske konstrukcije linijskim konačnim elementima kod kojih se prednapete natege ne opisuju s pomoću posebnih elemenata, već se proračunava utjecaj prednapinjanja koji se sastoji od uzdužne tlačne sile i momenta savijanja zbog ekscentričnosti natege. Ovaj se utjecaj zadaje u čvorovima kao jednakovrijedno čvorno opterećenje. Primjena ovog modela ograničena je na vrlo jednostavne linijske konstrukcije u fazi izbora dimenzija.

Gredni su elementi [1, 2] formulirani za visoke grede na osnovi Timošenkove gredne teorije ili za vitke grede na osnovi Bernoullijeve hipoteze. Pomaci promatrane točke grede opisuju se kao funkcija translacijskih pomaka odgovarajuće točke na osi grede i rotacije odgovarajućeg presjeka oko glavnih osi tromosti. Bernoullijeva je teorija jednakovrijedna Kirchoffovoj teoriji ploča te zahtijeva C^1 kontinuitet među elementima.

Za analizu konstrukcija s ravninskim stanjem naprezanja često se rabe četveročvorni ili osmeročvorni izoparametarski elementi u koje se može ukomponirati prednapeta natega u obliku posebnog elementa. Kod četveročvornog ravninskog elementa betona element natega može biti linearan [3], dok se kod osmeročvornog elementa diskretizira natega s tročvornim linijskim elementom [4-8] pa je moguće opisivati parabolične natege.

Trodimenzijski konačni elementi primjenjuju se pri diskretizaciji konstrukcija s izraženim troosnim stanjem naprezanja. Primjer takvih konstrukcija su prednapeti nosači I, T ili sandučastih poprečnih presjeka. Čak i kada nosač ima pravokutan poprečni presjek, prednapete natege mogu zauzimati proizvoljan položaj u prostoru tako da se ne moraju smjestiti u istu ravninu, pa je na mjestima skretanja natega prisutno troosno stanje naprezanja (slika 1.). U navedenim situacijama nužna je diskretizacija nosača s prostornim konačnim elementima u koje se ukomponira prostorna natega. Najjednostavniji prostorni konačni element za diskretizaciju betonske konstrukcije jest osmeročvorni konačni element s linearnim baznim funkcijama. U takav se element može ukomponirati linearni dvočvorni element natege. Naime, za

kvalitetu rješenja nužno je da aproksimacija polja pomaka osnovnog prostornog elementa betona i elementa ukomponirane natege bude istog reda [1]. Kako je u realnim nosačima prednapeta natega zakrivljena, u ovome je radu za diskretizaciju betonske konstrukcije odabran dvadesetočvorni prostorni element s tri stupnja slobode u svakom čvoru, a za diskretizaciju prednapete natege prostorni tročvorni krivocrtni element [9]. Pretpostavlja se čvrsta veza prednapetih natega s betonom, tako da nije moguće klizanje jednog materijala u odnosu prema drugome te postavljanje natega neovisno o mreži konačnih elemenata betona.



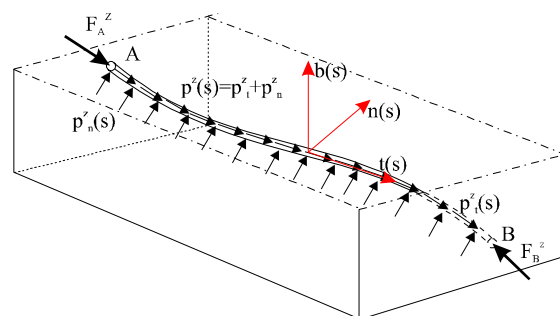
Slika 1. Skretanje natege iz jedne ravnine u drugu

Pri preuzimanju opterećenja nakon završenog prednapinjanja natege funkcioniraju kao klasična armatura uz poštivanje posebnih uvjeta deformabilnosti, što je nužno osigurati u numeričkom modelu. Stoga elementi za diskretizaciju prednapete natege mogu služiti i za diskretizaciju klasičnih armaturnih šipki, a numerički model, koji će se prikazati u ovome radu, za proračun prednapetih i klasičnih armiranobetonskih konstrukcija.

2 Matematička formulacija prednapinjanja

Uobičajeni je pristup pri modeliranju prednapetih konstrukcija zasnovan na metodi uravnoteženog opterećenja [10] gdje se natega i betonski dio elementa promatraju kao odvojena slobodna tijela. Jednadžba virtualnog rada definira se posebno za betonski dio presjeka, a posebno za nategu te se potom utjecaji zbrajaju.

U nastavku će se izložiti matematička formulacija prednapinjanja načelom virtualnih pomaka analizirana na betonskoj konstrukciji s jednom ukomponiranom nategom.



Slika 2. Uključivanje utjecaja sila prednapinjanja

Opterećenja natege koja nastaju kao posljedica prednapinjanja (slika 2.) definiraju se u lokalnom koordinatnom sustavu natege t-n-b čija je os t usmjerena tangencijalno duž osi natege, os n je u pravcu normale na tu krivulju, a os b je u smjeru binormale na nategu.

Matematička formulacija svih utjecaja kojima je izložena betonska konstrukcija s ukomponiranom prednapetom nategom može se izraziti načelom virtualnih pomaka u obliku:

$$\int_{V_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\sigma} dV_0 + \int_{V_0} (\delta \mathbf{u}) \mathbf{v} dV_0 + \int_{S_0} (\delta \mathbf{u}) \mathbf{s} dS_0 + \int_{l_0} (\delta \mathbf{u}(s)) \mathbf{p}^z(s) ds + (\delta \mathbf{u}_A) \mathbf{F}_A^z + (\delta \mathbf{u}_B) \mathbf{F}_B^z = 0 \quad (1)$$

gdje je $\int_{V_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\sigma} dV_0$ virtualni rad unutarnjih sila betona i

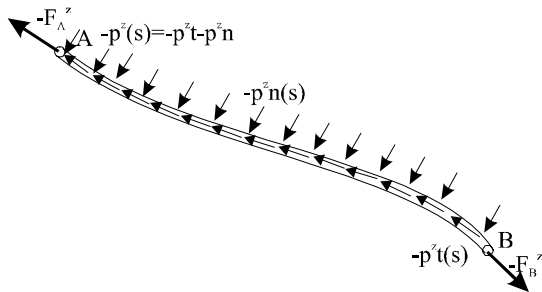
armature, $\int_{V_0} (\delta \mathbf{u}) \mathbf{v} dV_0$ i $\int_{S_0} (\delta \mathbf{u}) \mathbf{s} dS_0$ su virtualni radovi

volumenskih i površinskih sila,

a $\int_{l_0} (\delta \mathbf{u}(s)) \mathbf{p}^z(s) ds + (\delta \mathbf{u}_A) \mathbf{F}_A^z + (\delta \mathbf{u}_B) \mathbf{F}_B^z$

virtualni rad sila prednapinjanja.

Sukladno metodi uravnoteženog opterećenja, natega se može izdvojiti iz betonske konstrukcije i promatrati kao zasebno tijelo, kao što je prikazano na slici 3.



Slika 3. Natega izdvojena iz betonske konstrukcije

Uvjet ravnoteže natege predstavljen je izrazom:

$$-A_s \int_{l_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}(s) \boldsymbol{\sigma}(s) ds - \left[\int_{l_0} \delta \mathbf{u}(s) \mathbf{p}^z(s) ds + (\delta \mathbf{u}_A) \mathbf{F}_A^z + (\delta \mathbf{u}_B) \mathbf{F}_B^z \right] = 0 \quad (2)$$

gdje su A_s ploština poprečnog presjeka natege, s lučna duljina natege do presjeka u kojem se proračunava naprezanje, l_0 ukupna duljina natege, $\mathbf{p}^z(s)$ vektor linijskog opterećenja duž natege, a \mathbf{F}_A^z i \mathbf{F}_B^z vektori sidrenih sila.

Zbrajanjem izraza (1) i (2) virtualni rad linijskog opterećenja $\mathbf{p}^z(s)$ i sidrenih sila \mathbf{F}_A^z i \mathbf{F}_B^z iščezava. Virtualni rad unutarnjih i vanjskih sila na prednapetoj betonskoj konstrukciji može se zapisati u obliku:

$$- \int_{V_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\sigma} dV - A^z \int_{l_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}(s) \boldsymbol{\sigma}(s) ds + \int_{V_0} (\delta \mathbf{u}) \mathbf{v} dV_0 + \int_{S_0} (\delta \mathbf{u}) \mathbf{s} dS_0 = 0 \quad (3)$$

Izrada modela prednapetog elementa zahtijeva definiranje geometrije elementa natege i sile prednapinjanja, određivanje utjecaja tih sila na betonski dio elementa te sumiranje vanjskog opterećenja i opterećenja nastalog zbog prednapinjanja.

3 Numerički model prednapinjanja

3.1 Geometrija natege ukomponirane u element betona

Analiza prednapetih i armiranobetonskih konstrukcija zahtijeva definiranje ponašanja betona i armature odnosno natege te njihova zajedničkog djelovanja. U modelu koji će se predstaviti u ovome radu prednapete natege i armaturene šipke modelirani su jednodimenzijским tročvornim konačnim elementima ukomponiranima u prostorni konačni element betona. Izbor mreže konačnih elemenata betonske konstrukcije neovisan je o geometriji i položaju armature i natege.

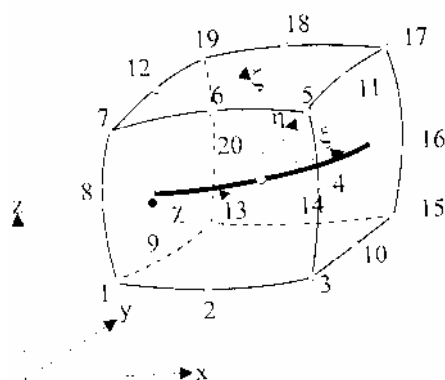
Diskretizacija betonske konstrukcije obavit će se trodimenzijским izoparametarskim dvadesetoročvornim konačnim elementima koji u svakome čvoru imaju tri translacijska stupnja slobode [11]. Za opis geometrije konstrukcije u prostoru rabi se globalni koordinatni sustav x-y-z, dok se vrijednosti deformacija i naprezanja izračunavaju u Gaussovima točkama čiji je položaj definiran u lokalnom koordinatnom sustavu ξ - η - ζ .

U trodimenzijskoj je analizi geometrija natege opisana prostornom krivuljom drugog stupnja [9] koja se definira s pomoću svojih projekcija, tj. s pomoću koordinata krajnjih čvorova elementa i položaja tangenata u tim čvorovima. Za diskretizaciju natege primijenjen je tročvorni krivolinijski jednodimenzijški element.

U svrhu detaljnijeg opisa geometrije ovog elementa te preslikavanja i izračunavanja ukupne krutosti elementa betona s ukomponiranom armaturom, osim spomenutih, globalnoga koordinatnog sustava i lokalnoga koordinatnog sustava, uvodi se linijski koordinatni sustav armature.

U linijskom koordinatnom sustavu definirane su bazne funkcije 1D izoparametarskog konačnog elementa. Ovaj je koordinatni sustav označen normiranom koordinatom χ koja se pruža duž 1D elementa, što se može vidjeti na slici 4.

Nakon postavljanja mreže konačnih elemenata betona, u globalnome se koordinatnom sustavu definira položaj armature pri čemu se krajnji čvorovi elementa armature



Slika 4. Koordinatni sustavi prostornog elementa betona s ugrađenom armaturom

moraju nalaziti na stranicama osnovnog prostornog elementa. Za simulaciju armature upotrijebljeni su izoparametarski tročvorni linijski elementi opisani Lagrangeovim polinomom trećeg stupnja, pa je osim krajnjih čvorova potrebno poznavati i položaj srednjeg čvora. Model ima mogućnost interpolacije srednjeg čvora koja se obavlja numerički. Postupak interpolacije srednjeg čvora armature za tročvorni izoparametarski linijski element razrađen je po pravcu, po kvadratnoj paraboli [5] te po prostornoj paraboli drugog stupnja [9].

Prednost je modela s ugrađenom armaturom fleksibilnost pri diskretizaciji sustava jer se armatura smatra zasebnim elementom i zadaje se odvojeno od mreže prostornog elementa betona. Geometrija 1D elementa armature opisana je prostornom krivuljom drugoga reda koja se u parametarskom obliku može izraziti:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_x t^2 + b_x t + c_x; & y(t) &= a_y t^2 + b_y t + c_y; \\ z(t) &= a_z t^2 + b_z t + c_z \end{aligned} \quad (4)$$

gdje je t parametar koji se nalazi u određenom intervalu $t \in [t_1, t_2]$.

Rješavanjem sustava jednadžbi (4) po parametru t dobije se sustav:

$$\begin{aligned} y &= y(x) = Ax^2 + Bx + C; \\ z &= z(x) = Dx^2 + Ex + F \end{aligned} \quad (5)$$

koji predstavlja ortogonalne projekcije prostorne krivulje na ravnine x - y odnosno x - z . Nepoznati se koeficijenti (A, B, C, D, E i F) izračunavaju s pomoću globalnih koordinata krajnjih čvorova 1D elementa i položaja tangenata u čvoru na promatrane projekcije krivulje, u odnosu na os x [9, 12, 13].

3.2 Matrica deformacija natege

Prednapeta natega prenosi samo uzdužnu silu. Zbog djelovanja te sile, element se deformira u smjeru svoje osi,

odnosno diferencijalna duljina luka ds mijenja se u $(ds + \epsilon_s ds)$. Za definiranje krutosti armature potrebno je odrediti matricu deformacija B_s , odnosno relativnu deformaciju ϵ_s armaturnog elementa. U globalnom koordinatnom sustavu x - y - z definirani su pomaci u, v i w paralelno s koordinatnim osima, a deformacija elementa armature može se definirati u linijskom koordinatnom sustavu preko normirane koordinate χ .

Matrica deformacija elementa natege ukomponirane u 3D element betona [9] može se izraziti u obliku: B_s

$$B_s = \begin{bmatrix} B_{s11} & B_{s12} & B_{s13} & B_{s21} & B_{s22} & B_{s23} \dots \\ B_{s31} & B_{s32} & B_{s33} \dots & B_{sn1} & B_{sn2} & B_{sn3} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Članovi matrice deformacija B_s su:

$$\begin{aligned} B_{s11} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial y}{\partial \chi} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial z}{\partial \chi} \\ B_{s12} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial y}{\partial \chi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \chi} \frac{\partial z}{\partial \chi} \\ B_{s13} &= \frac{\partial N_i}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial z}{\partial \chi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \chi} \frac{\partial y}{\partial \chi} \end{aligned} \quad i=1, \dots, n \quad (7)$$

gdje je n broj čvorova, a N_i bazne funkcije osnovnog prostornog konačnog elementa betona [11].

3.3 Matrica krutosti natege

Matrica krutosti elementa armature dobiva se linijskom numeričkom integracijom u Gaussovima točkama jednodimenzijanskog elementa armature. U istim Gaussovima točkama izračunavaju se vrijednosti Cartesyjevih derivacija $\partial N_i / \partial x, \partial N_i / \partial y$ i $\partial N_i / \partial z$ potrebnih za izračunavanje matrice deformacija linijskog elementa. Položaj Gaussovih točaka na jednodimenzijanskom elementu zadan je u linijskom koordinatnom sustavu preko normirane koordinate χ s pomoću koje se određuju pripadne koordinate u globalnom koordinatnom sustavu. Koordinata Gaussove točke u globalnome koordinatnom sustavu može se izraziti preko baznih funkcija linijskog elementa $H_k = H_k(\chi)$ [9] i koordinate krajnjih čvorova tog elementa:

$$\begin{aligned} x^{g.p.} &= \sum_{k=1}^n H_k(\chi) x_k, & y^{g.p.} &= \sum_{k=1}^n H_k(\chi) y_k, \\ z^{g.p.} &= \sum_{k=1}^n H_k(\chi) z_k \end{aligned} \quad (8)$$

gdje je n broj čvorova jednodimenzijanskog elementa ($n = 3$), x_k, y_k i z_k su koordinate čvorova jednodimenzijanskog elementa u globalnome koordinatnom sustavu, a $x^{g.t.}, y^{g.t.}$ i $z^{g.t.}$ koordinate Gaussovih točaka jednodimenzijanskog elementa u globalnome koordinatnom sustavu.

Bazne funkcije prostornih elementa ovise o lokalnom koordinatnom sustavu ξ - η - ζ , a položaj Gaussovih toča-

ka u kojima su proračunate vrijednosti članova matrice deformacija je prema izrazu (7) definiran u globalnome koordinatnom sustavu x-y-z. Zbog toga je potrebno izvršiti preslikavanje položaja Gaussovih točaka iz globalnog ($x^{g.t.}, y^{g.t.}, z^{g.t.}$) u lokalni ($\xi^{g.t.}, \eta^{g.t.}, \zeta^{g.t.}$) koordinatni sustav. Položaj Gaussovih točaka u globalnome koordinatnom sustavu može se izraziti sa tri nelinearne jednadžbe [9]:

$$\begin{aligned} x^{g.p.} - \sum_{i=1}^n N_i(\xi_{g.p.}, \eta_{g.p.}, \zeta_{g.p.})x_i &= 0 \\ y^{g.p.} - \sum_{i=1}^n N_i(\xi_{g.p.}, \eta_{g.p.}, \zeta_{g.p.})y_i &= 0 \\ z^{g.p.} - \sum_{i=1}^n N_i(\xi_{g.p.}, \eta_{g.p.}, \zeta_{g.p.})z_i &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

čije se rješenje dobije Newtonovom iterativnom metodom.

Matrica krutosti elementa natege se može izračunati numeričkom integracijom po linijskom elementu:

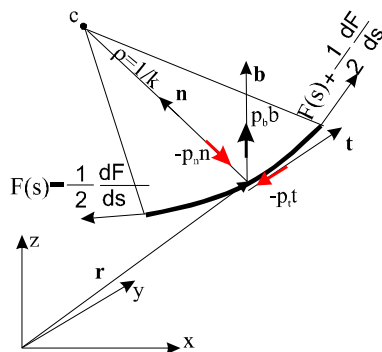
$$\mathbf{K}_s = \int_{V_s^e} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dV_s^e \quad (10)$$

gdje je \mathbf{D}_s matrica elastičnosti natege, a dV_s^e diferencijalni element volumena natege koji se može izraziti kao funkcija elementa duljine i ploštine poprečnog presjeka $dV_s = A_s d\chi$.

3.4 Modeliranje prijenosa sile prednapinjanja

Sila u proizvoljnom presjeku natege ovisi o intenzitetu zadanih sila na sidrima i gubicima. Obično su poznate vanjske sile na krajevima natege te je potrebno odrediti utjecaj prednapinjanja u unutarnjim točkama natege.

Posljedica prednapinjanja natege jest raspodijeljeno linijsko opterećenje koje se može prikazati preko normalnom p_n , tangencijalnom p_t i binormalnom p_b komponentom (slika 5.). Međusobna se veza ovih komponenata i zadanih vanjskih sila može izraziti uspostavljajući ravnotežu na diferencijalno malom elementu natege.



Slika 5. Diferencijalni element luka izložen silama prednapinjanja

Jedinični vektori tangente, normale i binormale na element luka u promatranoj točki $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ i $\mathbf{b}(s)$ mogu se izraziti u obliku:

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} ; \quad \mathbf{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} ; \quad (11)$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

gdje je \mathbf{r} vektor položaja promatrane točke u odnosu na ishodište globalnoga koordinatnog sustava, dok je $k(s)$ zakrivljenost natege. Ravnoteža na diferencijalno malom elementu glasi:

$$\begin{aligned} -\left(F(s) - \frac{1}{2} \frac{dF}{ds} ds\right) \left(\mathbf{t} - \frac{1}{2} \frac{dt}{ds} ds\right) \\ + \left(F(s) + \frac{1}{2} \frac{dF}{ds} ds\right) \left(\mathbf{t} + \frac{1}{2} \frac{dt}{ds} ds\right) \\ + (-p_t \mathbf{t} - p_n \mathbf{n} + p_b \mathbf{b}) ds = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

odnosno:

$$F \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \frac{dF}{ds} \mathbf{t} = p_t \mathbf{t} p_n \mathbf{n} - p_b \mathbf{b} \quad (13)$$

Koristeći se geometrijskim odnosom:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s) \mathbf{n} \quad (14)$$

izraz (12) može se zapisati kao:

$$\mathbf{F}(s)k(s)\mathbf{n} + \frac{d\mathbf{F}}{ds} \mathbf{t} = p_t(s)\mathbf{t} + p_n(s)\mathbf{n} - p_b(s)\mathbf{b} \quad (15)$$

ili u skalarnom obliku kao:

$$p_n(s) = k(s)F(s) \quad (16)$$

$$p_t(s) = \frac{dF(s)}{ds} \quad (17)$$

$$p_b(s) = 0 \quad (18)$$

Tangencijalna se komponenta opterećenja $p_t(s)$ može prikazati kao funkcija normalnog opterećenja $p_n(s)$ i koeficijenta trenja između natege i betona:

$$p_t(s) = \pm \mu p_n(s) \quad (19)$$

Jednadžba ravnoteže na prikazanom elementu u pravcu normale i tangente može se zapisati u obliku:

$$F(s)k(s) ds - p_n(s) ds = 0 ; \quad dF(s) - p_t(s) ds = 0 \quad (20)$$

Kombiniranjem izraza (19) i (20) i integriranjem na intervalu $[s_1, s_2]$ gdje je $s_2 > s_1$ podrazumijevajući da je s glatka krivulja na tom intervalu, dobijemo:

$$F(s_2) = F(s_1) e^{\pm \mu \int_{s_1}^{s_2} k(s) ds} \quad (21)$$

Za određivanje normalne i tangencijalne komponente opterećenja duž natege potrebno je odrediti zakrivljenost prostorne natege $k(s)$ koja redovito zahtijeva dvostruko preslikavanje iz lokalnoga linijskoga koordinatnog sustava natege χ , najprije u lokalni koordinatni sustav ξ - η - ζ , a zatim u globalni koordinatni sustav x - y - z 3D elementa betona. Zakrivljenost prostornog natega $k(s)$ može se prikazati u obliku:

$$k(s) = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{d\chi^2} \left(\frac{d\chi}{ds}\right)^2 + \frac{dx}{d\chi} \frac{d^2\chi}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\chi^2} \left(\frac{d\chi}{ds}\right)^2 + \frac{dy}{d\chi} \frac{d^2\chi}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{d\chi^2} \left(\frac{d\chi}{ds}\right)^2 + \frac{dz}{d\chi} \frac{d^2\chi}{ds^2}\right)^2} \quad (22)$$

gdje su komponente d^2x/ds^2 , d^2y/ds^2 i d^2z/ds^2 definirane kao:

$$\frac{d^2i}{ds^2} = \frac{d}{d\chi} \left(\frac{di}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} \right) \frac{d\chi}{ds} = \frac{d^2i}{d\chi^2} \frac{d\chi}{ds} \frac{d\chi}{ds} + \frac{di}{d\chi} \frac{d^2\chi}{ds^2}, \quad (23)$$

$i = x, y, z$

$$\frac{di}{d\chi} = \sum_{k=1}^3 \frac{dH_k}{d\chi} i_k, \quad i = x, y, z \quad (24)$$

$$\frac{d^2i}{d\chi^2} = \sum_{k=1}^3 \frac{d^2H_k}{d\chi^2} i_k, \quad i = x, y, z \quad (25)$$

3.5 Skretanje natege iz jedne ravnine u drugu

U slučaju kada se natega ne može cijelom svojom duljinom smjestiti u jednu ravninu, utjecaji zbog prednapinjanja ovise o zakrivljenosti natege koju karakterizira promjena otklona osi od tangente, ali i o promjeni položaja binormale u promatranim presjecima duž natege. Binormale nisu međusobno paralelne već zatvaraju neki kut ψ . Posljedica ove promjene jest uvrtnanje natega φ , što se matematički može izraziti kao:

$$\varphi = \frac{d\psi}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{b}_0}{ds} \right| \quad (26)$$

gdje je ψ kut što ga čine jedinični vektori \mathbf{b} i \mathbf{b}_0 binormala povučeni u dva promatrana susjedna presjeka.

Deriviranjem binormale, koja se može izraziti u obliku vektorskog umnoška $\mathbf{b}_0 = \mathbf{t}_0 \times \mathbf{n}_0$, po duljini luka dobiva se izraz:

$$\frac{d\mathbf{b}_0}{ds} = \mathbf{t}_0 \times \frac{d\mathbf{n}_0}{ds} - \mathbf{n}_0 \times \frac{d\mathbf{t}_0}{ds} \quad (27)$$

dok se član $\frac{d\mathbf{t}_0}{ds}$ može izraziti kao:

$$\frac{d\mathbf{t}_0}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = k(s)\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{n}_0}{\rho} \quad (28)$$

Uvrštavanjem izraza (28) u (27) dobivamo:

$$\frac{d\mathbf{b}_0}{ds} = \mathbf{t}_0 \times \frac{d\mathbf{n}_0}{ds} \quad (29)$$

Kako je vektor koji prikazuje derivaciju jediničnog vektora okomit na taj vektor, slijedi da je $\frac{d\mathbf{b}_0}{ds}$ okomit na \mathbf{b}_0 , tj. na binormalu. Vektorski je umnožak okomit na jedan i na drugi vektor u vektorskom umnošku, odnosno

na \mathbf{t}_0 i $\frac{d\mathbf{n}_0}{ds}$ (vidi izraz 29). Dakle, vektor $\frac{d\mathbf{b}_0}{ds}$ je okomit i na tangentu. Kako je vektor okomit i na binormalu i na tangentu, on se podudara s glavnom normalom krivulje u promatranoj točki pa je:

$$\frac{d\mathbf{b}_0}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{b}_0}{ds} \right| \mathbf{n}_0 \quad (30)$$

odnosno prema izrazu (26):

$$\frac{d\mathbf{b}_0}{ds} = \pm \varphi \mathbf{n}_0 \quad (31)$$

Koristeći se Frenetovom formulom koja pokazuje vezu između zakona promjene glavnih smjerova prostorne krivulje, zakrivljenosti $k(s)$ i uvrtnanja, uvrtnanje natege u promatranom presjeku može se izraziti skalarnim komponentama vektora $\frac{dr}{ds}$, $\frac{d^2r}{ds^2}$ i $\frac{d^3r}{ds^3}$:

$$\varphi = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \quad (32)$$

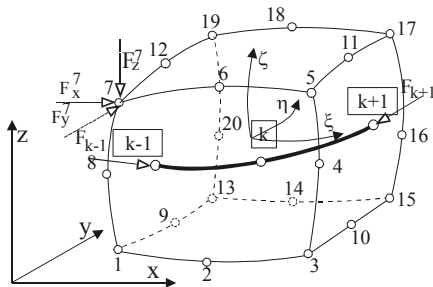
Prema tome, ako natega cijelom svojom duljinom ne leži u jednoj ravnini, dolazi do uvrtnanja natege prikazanog izrazom (32) koje ima za posljedicu pojavu momenta uvrtnanja te dodatnih posmičnih naprezanja. Unatoč tome, na mjestima skretanja natege iz jedne ravnine u drugu ne pojavljuje se komponenta opterećenja u smjeru binormale na nategu, što je pokazala jednadžba ravnoteže (12) na diferencijalno malom elementu natega.

3.6 Ekvivalentne čvorne sile zbog prednapinjanja

U općem slučaju natega je proizvoljno postavljena u prostorni element betona. Sile prednapinjanja djeluju na beton na sidrima i kao raspodijeljeno opterećenje duž

natega. Metoda konačnih elemenata temelji se na postavljanju jednadžbi ravnoteže u čvorovima konstrukcije, pa je u njima potrebno postaviti i opterećenje. Zbog toga je potrebno izračunati ekvivalentne čvorne sile uzrokovane sidrenim silama i raspodijeljenim opterećenjem uzduž natege.

Točka u kojoj djeluje sidrena sila (x_k, y_k, z_k) zadana je geometrijom natege u globalnom koordinatnom sustavu konstrukcije te u lokalnom koordinatnom sustavu elementa natege (slika 6.). Prije određivanja ekvivalentnih čvornih sila potrebno je odrediti pripadne koordinate točke (ξ_k, η_k, ζ_k) u lokalnome koordinatnom sustavu elementa betona.



Slika 6. Ekvivalentne čvorne sile uslijed sidrenih sila

Sila F^k ($k = 1, n$) zadaje se u pravcu tangente na os natege pa je potrebno odrediti njezine komponente F_x^k, F_y^k i F_z^k u smjeru odgovarajućih osi globalnoga koordinatnog sustava. Komponente sile F^k u prvom odnosno posljednjem čvoru natege mogu se izraziti kao:

$$F_x^1 = F^1 \frac{dx}{ds}; \quad F_y^1 = F^1 \frac{dy}{ds}; \quad F_z^1 = F^1 \frac{dz}{ds} \quad (33)$$

$$F_x^n = -F^n \frac{dx}{ds}; \quad F_y^n = -F^n \frac{dy}{ds}; \quad F_z^n = -F^n \frac{dz}{ds} \quad (34)$$

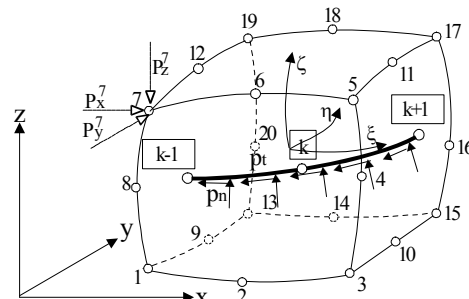
Ekvivalentne čvorne sile uzrokovane sidrenim silama mogu se, koristeći se baznim funkcijama N_i (ξ_k, η_k, ζ_k) čprostornog dvadeseteročvornoga konačnog elementa betona, prikazati u obliku:

$$\begin{pmatrix} F_x^i \\ F_y^i \\ F_z^i \end{pmatrix} = N_i(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \begin{pmatrix} F_x^k \\ F_y^k \\ F_z^k \end{pmatrix} \quad (35)$$

gdje su F_x^i, F_y^i i F_z^i komponente čvornih sila u smjeru osi x, y i z globalnoga koordinatnog sustava za promatrani čvor i .

Zbog prednapinjanja se, osim koncentriranih tlačnih sila na sidrima, pojavljuje i utjecaj duž cijele natege, modeliran kao raspodijeljeno linijsko opterećenje koje možemo razložiti na normalnu i tangencijalnu komponentu. Ove su veličine definirane u linijskome koordinatnom sustavu natege χ . Određivanje ekvivalentnih čvornih

sila je moguće preslikavanjem iz lokalnoga linijskoga koordinatnog sustava χ natege u globalni koordinatni sustav $x-y-z$ cijele konstrukcije te potom definiranjem projekcija tih sila u smjeru odgovarajućih koordinatnih osi (slika 7.).



Slika 7. Ekvivalentne čvorne sile zbog raspodijeljenog opterećenja

Nakon postupka koji je detaljno prikazan u [9], ukupne sile u smjeru glavnih koordinatnih osi ($j = x, y, z$) mogu se prikazati u obliku:

$$P_j = \int_K \left(-p_n \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}}} \rho \frac{d^2j}{ds^2} - p_t \frac{dj}{d\chi} \right) d\chi, \quad (36)$$

$j = x, y, z$

gdje je $\rho = 1/k(s)$ polumjer zakrivljenosti natege, a $k(s)$ je određen jednadžbom (22). Sile u izrazu (36) izračunavaju se numeričkom integracijom u Gausovim točkama elementa natege. Ekvivalentne čvorne sile u smjeru glavnih koordinatnih osi ($j = x, y, z$) u i -tom čvoru konačnog elementa ($i = 1, \dots, 20$) uzrokovane raspodijeljenim opterećenjem uzduž natege mogu se prikazati u obliku:

$$P_j^i = \sum_{k=1}^3 N_k(\xi_{g.p.}, \eta_{g.p.}, \zeta_{g.p.}) P_j^{g.p.}, \quad j = x, y, z \quad (37)$$

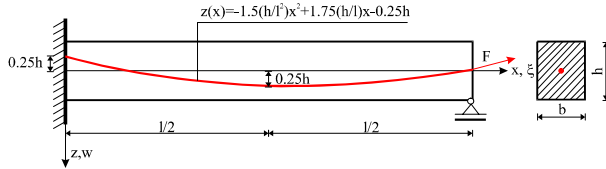
4 Numerički primjeri

Na osnovi opisanoga numeričkog modela prednapinjanja razvijen je računalni program PRECON3D za linearnu analizu prostornih prednapetih armiranobetonskih konstrukcija. Primjena programa prikazana je na analizi dvaju numeričkih primjera, a valjanost provjerena usporedbom dobivenih rezultata s numeričkim i eksperimentalnim rezultatima poznatima iz literature

4.1 Primjer 1.

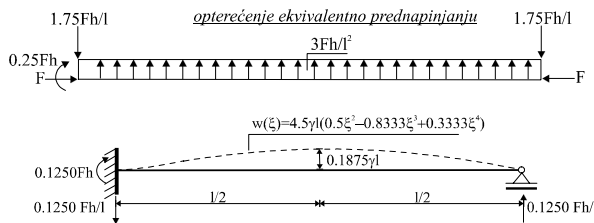
Proračunana je prednapeta greda koja je analizirana u lit. [2]. Greda je duljine l , s lijeve strane ima spriječene pomake u sva tri smjera, a s desne strane je oslobođen jedino pomak u x smjeru. Izložena je samo prednapinjanja

nju, bez utjecaja vanjskog opterećenja. Položaj natege u konstrukciji definiran je funkcijom $z(x)$. Trenje između natege i cijevi te vlastita težina konstrukcije su zanemareni. Na slici 8. prikazana je geometrija zadanog sustava.



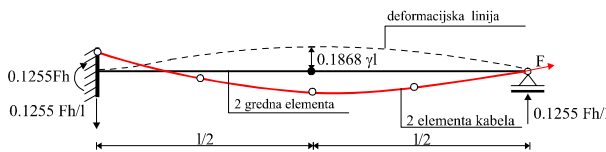
Slika 8. Geometrija sustava

Primjer je riješen analitički i numerički [2]. Pri analitičkom rješavanju sustava najprije se pronađe opterećenje jednakovrijedno prednapinjanju, a potom riješi sustav izložen tom opterećenju za zadane rubne uvjete. Radi prednapinjanja zbog spriječenih pomaka na krajevima nosača javljaju se ležajne reakcije. U nastavku su prikazani deformacijska linija te veličina ležajnih reakcija i pomaka u sredini nosača (slika 9.).



Slika 9. Analitičko rješenje sustava

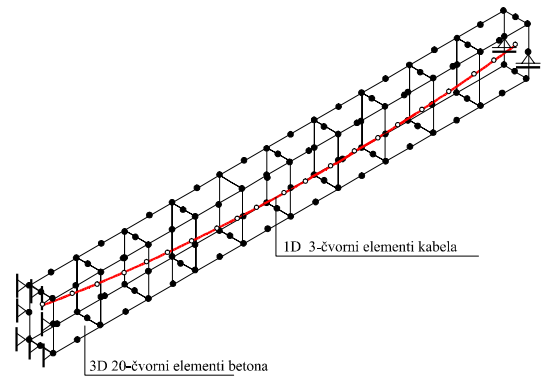
U literaturi [2] ovaj je sustav riješen numerički na dva načina. U svrhu usporedbe s rješenjem primjenom modela primjenjivanog u programu PRECON3D prikazat će se oba rješenja. U prvom koraku je analiziran sustav kod kojeg je beton diskretiziran s dva gredna elementa, a natega s dva tročvorna linijska elementa. Na slici 10. prikazane su veličine ležajnih reakcija, deformacijska linija te pomak u sredini nosača dobiveni ovim numeričkim proračunom.



Slika 10. Pomaci, deformacijska linija i reakcije pri diskretizaciji sustava grednim elementima [2]

Veličine reakcija i pomaka izražene su kao funkcija zadane sile prednapinjanja F , duljine nosača l , visine poprečnog presjeka nosača h te konstante $\gamma = Fl/Ebh^2$, gdje je E Youngov modul elastičnosti, a b širina poprečnog presjeka.

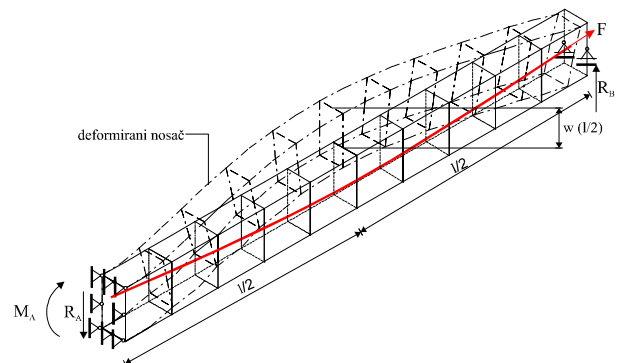
Potom je numerički analiziran isti sustav diskretiziran s deset 3D dvadesetoročvornim elementima, a natega linijskim tročvornim elementima, kako je prikazano na slici 11.



Slika 11. Diskretizacija sustava i rubni uvjeti

Ista je diskretizacija primijenjena i pri rješavanju programom PRECON3D. Na slici 12. prikazani su pomaci nosača zbog prednapinjanja. U tablici 1. prikazane su veličine ležajnih reakcija i pomaka u sredini raspona proračunate programom PRECON3D, veličine dobivene numeričkim proračunima prema [2] za dvije diskretizacije sustava (grednim i prostornim elementima) te veličine dobivene analitički.

Rezultati dobiveni numeričkim proračunom s pomoću programa PRECON3D pokazuju zanemarivo odstupanje (0,24%) u odnosu na rezultate prikazane u lit. [2] i diskretizaciju sustava prostornim elementima.



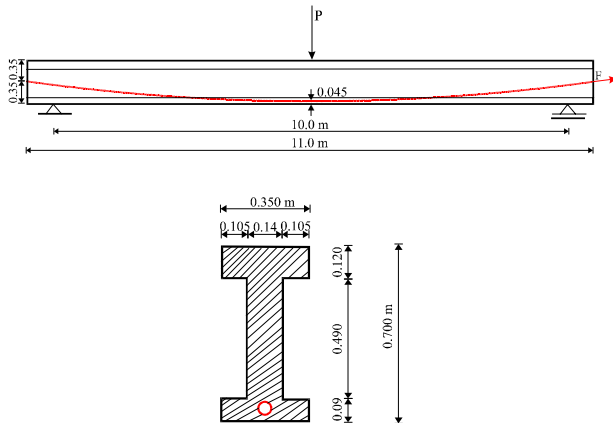
Slika 12. Pomaci nosača uslijed prednapinjanja

Tablica 1. Ležajne reakcije i pomaci u sredini nosača (usporedba rezultata)

Rješenje	Reakcije	Pomaci $w(l/2)$ ($\gamma = Fl/Ebh^2$)
Numeričko - PRECON3D	$R_A=0.1239 Fh/l$ $M_A=0.1239 Fh$ $R_B=0.1239Fh/l$	0,19528 γl
Numeričko [2] (gredni elementi)	$R_A=0.1255 Fh/l$ $M_A=0.1255 Fh$ $R_B=0.1255 Fh/l$	0,18680 γl
Numeričko [2] (prostorni elementi)	$R_A=0.1236 Fh/l$ $M_A=0.1236 Fh$ $R_B=0.1236 Fh/l$	0,19530 γl
Analitičko	$R_A=0.1250 Fh/l$ $M_A=0.1250 Fh$ $R_B=0.1250Fh/l$	0,18750 γl

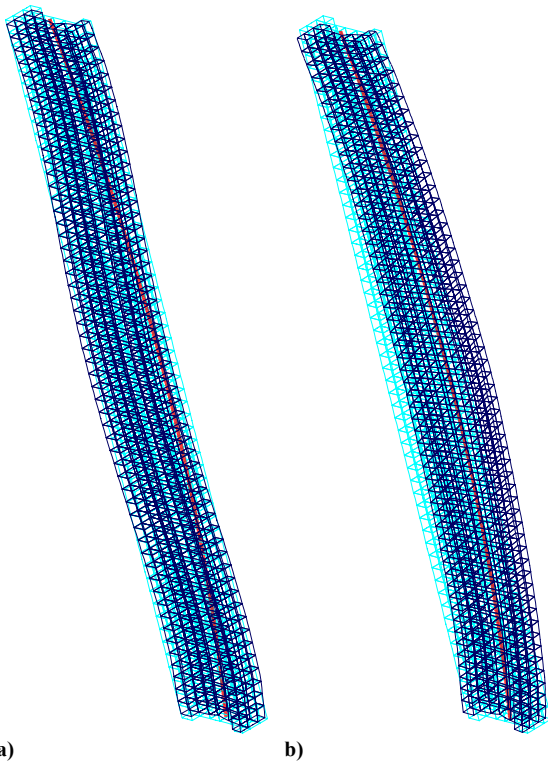
4.2 Primjer 2

Analizira se prednapeta greda I poprečnog presjeka preuzeta iz lit. [14]. Geometrija i opterećenje grede prikazani su na slici 13.



Slika 13. Prednapeti nosač I poprečnog presjeka

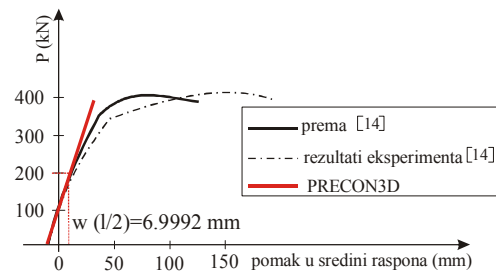
Karakteristike materijala su: modul elastičnosti betona $E_c = 35000 \text{ N/mm}^2$, Poissonov omjer $\nu = 0,25$, modul elastičnosti natege $E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$ i ploština poprečnog presjeka natege $A_s = 1962,5 \text{ mm}^2$. Sustav je diskretiziran s 55 prostornih izoparametarskih dvadeseteročvornih elemenata s 55 ukomponiranih linijskih tročvornih elemenata za diskretizaciju natege.



Slika 14. Deformacija nosača u fazi prednapinjanja a) i u fazi nakon prednapinjanja opterećena koncentriranom silom P b)

Na slici 14. prikazana je deformacija nosača zbog prednapinjanja (slika 14.a) te deformacija nosača koji je u fazi nakon prednapinjanja opterećen koncentriranom silom P (slika 14.b).

Na slici 15. prikazani su pomaci prednapetog nosača u sredini raspona dobiveni s tri različite analize: (1) numerička analiza prema lit. [14]; (2) eksperimentalna analiza prema lit. [14]; (3) numerička analiza provedena opisanim 3D modelom ugrađenim u program PRECON3D [9]. U području linearnog ponašanja konstrukcije vidljiva su dobra slaganja rezultata dobivenih programom PRECON3D s onima iz literature [14].



Slika 15. Pomaci prednapetog nosača u sredini raspona

5 Zaključak

U stvarnim prednapetim armiranobetonskim nosačima često je izraženo troosno stanje naprezanja zbog oblika poprečnog presjeka, skretanja natege iz jedne ravnine u drugu, koncentracije naprezanja u području sidrenja natege i sl. Za pouzdan proračun takvih konstrukcija i praćenje stanja naprezanja i deformacija na lokalnoj razini primjenjuju se trodimenzijski konačni elementi za diskretizaciju konstrukcije s ukomponiranom prostornom nategom.

U ovome su radu prikazane osnove numeričkog modeliranja prednapete natege u prostornim konstrukcijama. Geometrija natege opisana je prostornom krivuljom drugog stupnja koja se zadaje preko svojih ortogonalnih projekcija u ravnini x-y odnosno x-z. Natege se modeliraju jednodimenzijskim krivocrtim elementima. Posljedica prednapinjanja natege su koncentrirane tlačne sile na sidrima i raspodijeljeno linijsko opterećenje koje se može prikazati normalnom i tangencijalnom komponentom. Naime, analizom ravnoteže na diferencijalno malom elementu natege pokazalo se da, čak i na mjestima skretanja natege iz jedne ravnine u drugu, binormalna komponenta opterećenja iščezava. Skretanje natege ima za posljedicu pojavu momenata uvrtnja te dodatnih posmičnih naprezanja.

Razvijeni je model implementiran u računalni program PRECON3D. Primjena modela prikazana je na nekoliko numeričkih primjera, a valjanost je provjerena uspored-

bom dobivenih rezultata s numeričkim i eksperimentalnim rezultatima objavljenima u literaturi. Iako je numeričko modeliranje konstrukcija trodimenzijskim konač-

nim elementima zahtjevno jer dovodi do velikog broja stupnjeva slobode konstrukcije, sve veći kapacitet današnjih računala takvu analizu čini dostupnom.

Zahvala

Autori se zahvaljuju Ministarstvu znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske na djelomičnoj financijskoj pomoći pri izradi ovog rada u sklopu projekata Numerička i eksperimentalna modeliranja inženjerskih sustava, br. 0083061 i Nelinearna stabilnost i nosivost linijskih i plošnih konstrukcija, br. 0083051.

LITERATURA

- [1] Hofstetter, G.; Mang, H.A.: *Computational Mechanics of Reinforced Structures*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1995.
- [2] Antoniak, D.; Konderla, P.: *General FEM model of prestressing tendons*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences (2000) 7, 435-448
- [3] Gotovac, B.; Jaramaz, B.: *Primjena kompozitnih konačnih elemenata*, Građevinar 4 (1982) 7, 259-266
- [4] Elwi, A.E.; Hrudey, T.M.: *Finite element model for curved embeded reinforcement*, Journal of Engineering Mechanics (1989) Vol. 115, No. 4, 741-754
- [5] Nikolić, Ž.: *Razvoj numeričkog modela za naknadno prednapinjanje armirano-betonskih konstrukcija u ravnini*, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, 1993.
- [6] Mihanović, A.; Nikolić, Ž.: *Numerical model for posttensioning concrete structures*, Int. Journal of Engineering Modelling (1993) Vol. 6, No. 1-4, 35-43
- [7] Nikolić, Ž.: *Numeričko modeliranje armiranobetonskih i prednapetih konstrukcija*, Građevinar 47 (1995) 3, 121-129
- [8] Nikolić, Ž.; Mihanović, A.: *Non-linear Finite Element Analysis of Post-tensioned Concrete Structures*, Engineering Computations (1997) Vol. 14, No. 5, 509-528
- [9] Galić, M.: *Numerički trodimenzijski model prednapetih betonskih konstrukcija*, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, 2002.
- [10] Majorana, C.; Natali, A.; Vitaliani, R.: *Analysis of three-dimensional prestressed concrete structures using a non-linear material model*, Engineering Computations (1990) Vol. 7, No. 2, 157-166
- [11] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.: *The Finite Element Method, Volume 1: The Basis*, 5th edition, Butterworth Heinemann, Oxford, 2000.
- [12] Galić, M.; Marović, P.; Nikolić, Ž.: *Numerical model of prestressing tendons embedded into the 3D concrete element*, in Eberhardsteiner, J. and Mang, H.A. (Eds.), Book of Abstracts of the 5th World Congress on Computational Mechanics, Vienna, July 2002, Volume I, Vienna University of Technology, Vienna, p. 1-572, & Internet Proceedings: <http://wccm.tuwien.ac.at>, 2002-2006.
- [13] Marović, P.; Nikolić, Ž.; Galić, M.: *Some aspects of 2D and/or 3D numerical modelling of reinforced and prestressed concrete structures*, Engineering Computations (2005) Vol. 22, No. 5/6, 684-710
- [14] Nguyen, K.T.: *Nonlinear analysis of concrete beams with unbonded tendons*, In: R. de Borst, N. Bićanić, H.A. Mang and G. Meschke, eds., Int. Conf. on Computational Modelling of Concrete Structures - EURO-C 1998, Vol. 2, 749-755, A.A. Balkema, Rotterdam, 1998.