

# Mehaničko ponašanje i primjeri primjene okvirnih greda

Riko Rosman

## Ključne riječi

okvirna greda,  
mehaničko ponašanje,  
unutarnje sile,  
progibi, opterećenje,  
period osnovnih  
vlastitih vibracija

## Key words

frame beam,  
mechanical behaviour,  
internal forces,  
deflections, load,  
basic eigenvibration  
period

## Mots clés

poutre échelle,  
comportement  
mécanique, forces  
internes, déflexions,  
charge, périodes des  
vibrations propres

## Ключевые слова

рамная балка,  
механическое поведение,  
внутренние силы,  
изгибы, нагрузка,  
период основных  
собственных  
колебаний

## Schlüsselworte

Rahmenbalken,  
mechanisches Verhalten,  
innere Kräfte,  
Durchbiegungen,  
Belastung,  
Periode der eigenen  
Hauptschwingungen

R. Rosman

Stručni rad

## Mehaničko ponašanje i primjeri primjene okvirnih greda

Opisan je cjelovit, približan i jednostavan postupak utvrđivanja unutarnjih sila okvirnih greda koji prikazuje mehaničko ponašanje sustava, uz pretpostavku da se pri opterećenju u sredini pojasnih štapova i stupaca pojavljuju točke infleksije progibnih linija. Prikazan je postupak utvrđivanja perioda osnovnih vlastitih vibracija grede, kako bi se utvrdio njezin odziv na dinamičke utjecaje. Dan je veći broj primjera detalja primjena sustava u raznim područjima graditeljstva.

R. Rosman

Professional paper

## Mechanical behaviour of frame beams and examples of their practical use

An integrated, approximative and simple procedure for determining internal forces of frame beams, showing mechanical behaviour of the system, is described. In this procedure, it is assumed that inflection points of deflection lines occur, during load application, in the middle of chord members and elements. The procedure for determining basic eigenvibration periods for beams, in order to define beam response to dynamic actions, is presented. A number of examples, with details about the use of the system in various fields of civil engineering, are given.

R. Rosman

Ouvrage professionnel

## Le comportement mécanique des poutres échelles et les exemples de leur utilisation

Un procédé intégré, approximatif et simple pour déterminer les forces internes des poutres échelles, visant à montrer le comportement mécanique du système, est décrit. Dans ce procédé, il est supposé que les points d'inflexion des lignes de déflexion apparaissent, au cours de l'application de la charge, dans le milieu des membres et des éléments de la poutre échelle. Le procédé de détermination des périodes des vibrations propres de la poutre, afin de définir sa réponse aux charges dynamiques, est présenté. Quelques exemples détaillés de l'application de ce système dans les domaines différents de génie civil sont également fournis.

P. Росман

Отраслевая работа

## Механическое поведение и примеры применения рамных балок

В работе описан целостный, приближенный и простой способ установления внутренних сил рамных балок, показывающий механическое поведение системы, при предположении, что при нагрузке в середине поясных стержней и колонн появляются точки инфлексии сгибающихся линий. Показан способ установления периода основных собственных колебаний балки, с целью утвердить её ответ на динамические влияния. Дано большее число примеров деталей применения системы в разных областях строительства.

R. Rosman

Fachbericht

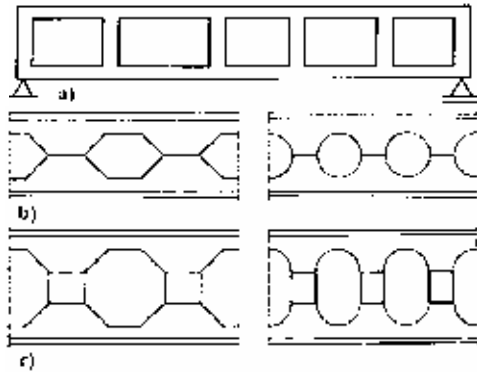
## Mechanisches Verhalten und Beispiele der Anwendung von Rahmenbalken

Beschrieben ist ein komplettes, annäherndes und einfaches Verfahren für die Festlegung der inneren Kräfte von Rahmenbalken welches das mechanische Verhalten des Systems darstellt, unter der Voraussetzung dass bei der Belastung in der Mitte der Gurtstäbe und der Ständer Inflexionspunkte der Durchbiegungslinien auftreten. Dargestellt ist ein Verfahren der Feststellung der Periode der eigenen Hauptschwingungen des Balkens um dessen Antwort auf dynamische Einflüsse festzustellen. Dargelegt ist eine grössere Anzahl von Beispielen der Anwendung des Systems in verschiedenen Gebieten des Bauwesens.

Autor: Akademik prof. dr. sc. **Riko Rosman**, dipl. ing. građ., Šenoina 8, Zagreb

1 Uvod

Okvirne grede, ili prema konstruktoru koji ih je uveo u praksu često su nazivane Vierendeelovim gredama (slika 1.a). U usporedbi s odgovarajućom rešetkastom gredom one su neekonomične, ali su njihovi obično pravokutni otvori često povoljniji što se tiče uporabe prostora ili osvjetljenja.



Slika 1. Jednopoljna okvirna greda (a); isječki greda s polygonalnim i okruglim otvorima (b); isječki greda s umetnutim limovima (c)

Posebna su vrsta okvirnih greda sačaste grede. One se dobiju rezanjem I-profila u dva dijela, uzdužnim pomakom jednog u odnosu na drugog i onda zavarivanjem dijelova u višu i time čvršću i kruću cjelinu. Otvori mogu biti lećastog ili okruglog oblika (slika 1.b). Umetanjem limova između polovica I-profila dobivaju se, uz nešto veći trošak za materijal i rad, grede još veće visine, nosivosti i krutosti (slika 1.c).

Okvirni su nosači, već prema broju polja, višestruko ili mnogostruko statički neodređeni sustavi. Njihov proračun tema je teorije konstrukcija. Ovdje će se u cijelosti razraditi jedan približan sasvim jednostavan postupak utvrđivanja unutarnjih sila i time stjecanje uvida u njihovo mehaničko ponašanje. Osnove postupka potječu još od Engessera [1], a temelje se na spretno odabranom statički određenom sustavu, konkretno na pretpostavci da se u sredini svih pojasnih štapova i stupaca pojavljuju točke infleksije progibnih linija i time nulte točke momenta savijanja. Metoda je egzaktna ako su stupci savojno nedeformabilni, a svi štapovi osno nedeformabilni.

Metoda uglavnom daje dovoljno točne rezultate za preliminarne analize, a često i za konačne proračune.

Kako su okvirne grede vrlo deformabilne, razradit će se i dva postupka utvrđivanja progiba. Pokazat će se da glavni doprinos progibima grede daje savijanje njezinih štapova. Ako greda mora preuzeti i dinamičke utjecaje, njezin odziv ovisi i o periodu njezinih osnovnih vlastitih vibracija, pa su dani jednostavni obrasci za utvrđivanje

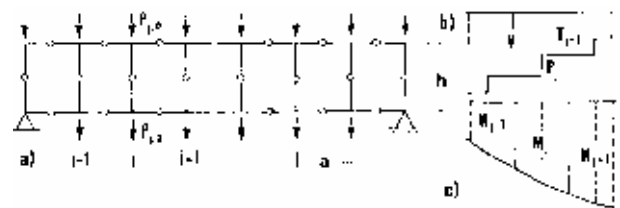
tog perioda. Pri tome se primjenjuje postupak rastavljanja sustava u podsustave.

2 Odziv na opterećenje

2.1 Unutarnje sile

Slika 2.a prikazuje mehaničku shemu jedne jednopoljne okvirne grede sukladno približnoj analizi. Značenje je oznaka:  $a$  duljina polja,  $h$  visina grede,  $j$  redni broj stupca,  $P_{j,o}$  i  $P_{j,u}$ , opterećenja gornjeg odnosno donjeg pojasa na mjestu  $j$ . Ukupno je opterećenje na mjestu  $j$

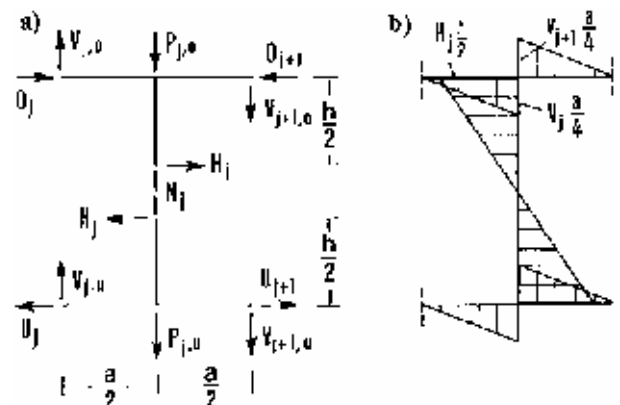
$$P_j = P_{j,o} + P_{j,u} \tag{1}$$



Slika 2. Mehanička shema okvirne grede prema pojednostavnjenoj analizi i opterećenje (a); isječak dijagrama grede poprečne sile (b); isječak dijagrama vrednog momenta savijanja (c)

Radi pojednostavnjenja praktičnog postupka i zapisa rabi se referencijska ili zamjenjujuća greda, punostijena greda istog raspona i ukupnog opterećenja silama  $P_j$ . Na slici 2.b i 2.c vide se isječci pripadnih dijagrama poprečne sile odnosno momenta savijanja za polja  $j$  i  $j + 1$  grede uz čvor  $j$ . Sa  $V_j$  označena je poprečna sila polja  $j$ , a sa  $M_j$  moment savijanja čvora  $j$ .

Slika 3.a prikazuje isječak okvirne grede od polovice stupca  $j$  i polovice susjednih pojasnih štapova te oznake sila u štapovima.



Slika 3. Isječak mehaničke sheme na slici 2.a s opterećenjem i reznim silama (a); momentni dijagram tog isječka (b)

Srednja vrijednost  $(M_{j-1} + M_j)/2$  vrednog momenta savijanja u polju  $j$  ostvaruje se u okvirne grede parom

sila  $U_j$  i  $O_j$  u donjem odnosno gornjem pojasu tog polja, pa je

$$U_j = -O_j = \frac{M_{j-1} + M_j}{2h} \quad (2)$$

Kao obično, vlačne se štapne sile smatraju pozitivnima, tlačne negativnima.

Ako su presjeci obaju pojasa jednaki, gredna poprečna sila  $V_j$  na njih se dijeli popola,

$$V_{j,o} = V_{j,u} = \frac{V_j}{2}. \quad (3)$$

Poprečna sila  $H_j$  stupca  $j$  dana je razlikom pojasnih sila u susjednim poljima, pa se lako može pokazati da je

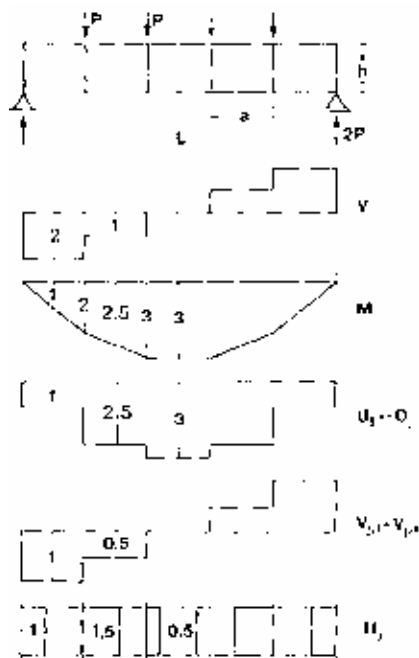
$$H_j = \frac{V_j + V_{j+1}}{2} \frac{a}{h}. \quad (4)$$

Promatranjem ravnoteže vertikalnih sila koje djeluju na promatrani isječak okvirne grede (slika 3.a) lako se može pokazati da uzdužna sila stupca  $j$

$$N_j = \frac{P_{j,u} - P_{j,o}}{2}, \quad (5)$$

ona međutim uglavnom ne utječe znatno na dimenzioniranje stupca.

Na osnovi poprečnih sila štapova njihovi momenti savijanja lako se utvrde na uobičajeni način (slika 3.b).



Slika 4. Primjer okvirne grede s opterećenjem i reakcijama te pripadni dijagrami gredne poprečne sile  $V$  (multiplikator  $P$ ), grednog momenta savijanja  $M$  (multiplikator  $Pa$ ), uzdužnih sila  $U_j$  donjeg i  $-O_j$  gornjeg pojasa (multiplikator  $Pa/h$ ), poprečnih sila  $V_{j,o}$  i  $V_{j,u}$  donjeg i gornjeg pojasa (multiplikator  $P$ ) te poprečnih sila  $H_j$  prečki (multiplikator  $Pa/h$ )

Što se tiče preuzimanja i prijenosa grednih momenata savijanja okvirne se grede ne razlikuju od rešetkastih. Razlika je u prijenosu grednih poprečnih sila; one u okvirnim greda prouzrokuju momente savijanja pojasa i stupaca, a to ih, u usporedbi s rešetkama, čini znatno slabijima, deformabilnijima i time skupljima.

Izvedeni obrasci za unutarnje sile vrijede i za sačaste nosače. Pri utvrđivanju momenata savijanja štapova obično se smatra da su područja čvorova apsolutno kruta, pa su momenti savijanja maksimalni duž rubova čvora.

*Primjer:* Slika 4. prikazuje primjer jedne 5-poljne regularne okvirne grede opterećene silama  $P$  u čvorovima gornjeg pojasa, odnosno dijagrame gredne poprečne sile  $V$  i grednog momenta savijanja  $M$ , dijagrame uzdužnih sila  $U_j = -O_j$  i poprečnih sila  $V_{j,o} = V_{j,u}$  pojasa te poprečnih sila  $H_j$  stupaca.

## 2.2 Progibi

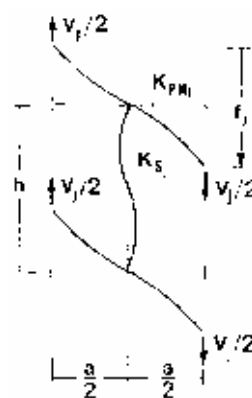
Pokazat će se dva približna postupka proračuna progiba okvirnih greda.

1. U prvog postupka polazi se od utvrđivanja doprinosa  $f_j$  isječka grede od stupca  $j$  i polovica susjednih pojasnih štapova (slika 5.). Radi jednostavnosti pretpostavlja se da su krutost na savijanje pojasa,  $K_{PMj}$ , a i poprečna sila  $V_j$  grede duž tog isječka konstantne. Relativni progib krajeva promatranog isječka grede, uz oznaku  $K_{Sj}$  za krutost na savijanje poprečnog presjeka stupca, na osnovi elementarnih postupaka teorije konstrukcija, jest

$$f_j = \left( \frac{h}{K_{Sj}} + \frac{a}{2K_{PMj}} \right) \frac{a^2}{12} V_j. \quad (6)$$

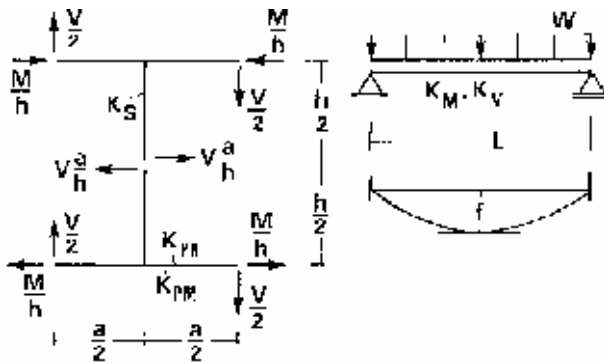
Ukupni progib grede dan je zbrojem doprinosa njegovih isječaka.

Doprinosi izduljenja i posmika štapova u prikazanom postupku nisu uzeti u obzir jer su uglavnom neznatni.



Slika 5. a) Isječak okvirne grede od stupca  $j$  i polovica susjednih pojasnih štapova sa reznim silama – za utvrđivanje progiba po prvom postupku

2. U drugom postupku proračuna progiba opet se najprije promatra isječak grede od jednog stupca i polovica susjednih pojava sa silama na njegovim krajevima (slika 6.). Značenje je oznaka:  $K_{PN}$ ,  $K_{PM}$  osna krutost i krutost na savijanje poprečnog presjeka pojaseva, dakle umnožak modula elastičnosti i ploštine poprečnog presjeka odnosno umnožak modula elastičnosti i momenta tromosti,  $K_S$  je krutost na savijanje poprečnog presjeka stupaca, dakle umnožak modula elastičnosti i momenta tromosti. Te se krutosti sada pretpostavljaju konstantnima duž cijelog raspona grede.



Slika 7. Isječak okvirne grede od stupca  $j$  i polovica susjednih pojasnih štapova sa reznim silama – za utvrđivanje progiba po drugom postupku .Oprećenje i progibna linija ekvivalentne punostijene grede

Gredna poprečna sila,  $V$ , i gredni moment savijanja,  $M$  se duž promatranog isječka smatraju konstantnima.

Potencijalna energija promatranog isječka okvirne grede sastoji se od doprinosa izduljenja pojasa, savijanja pojasa i savijanja stupca,

$$U_{PN} = 2 \frac{1}{2} \left( \frac{M}{h} \right)^2 \frac{a}{K_{PN}} = \frac{aM^2}{h^2 K_{PN}}, \quad (7)$$

$$U_{PM} = 4 \int_0^{a/2} \left( \frac{V}{2} x \right)^2 \frac{dx}{2K_{PM}} = \frac{a^3}{48K_{PM}} V^2, \quad (8)$$

$$U_S = 2 \int_0^{h/2} \left( V \frac{a}{h} x \right)^2 \frac{dx}{2K_S} = \frac{a^2 h}{24K_S} V^2, \quad (9)$$

pa je ukupno

$$U = \frac{a}{h^2 K_{PN}} M^2 + \frac{a}{2} \left( \frac{a^2}{24K_{PM}} + \frac{ah}{12K_S} \right) V^2. \quad (10)$$

U jednačbama (7) i (8) apscisa  $x$  orijentirana je duž osi pojasa odnosno stupca od nulte točke odnosno moneta savijanja.

Za isječak duljine  $a$  punostijene grede krutosti na savijanje  $K_M$  i posmične krutosti  $K_V$  izložene ukupnom opterećenju

$$V = \sum_j P_j \quad (11)$$

izraz za potencijalnu energiju glasi

$$U = \frac{a}{2K_M} M^2 + \frac{a}{2K_V} V^2. \quad (12)$$

Usporede li se međusobno desne strane jednačbi (10) i (12) slijedi da su recipročne vrijednosti krutosti na savijanje i posmične krutosti, dakle odnosne podatljivosti, poprečnog presjeka jednakovrijedne punostijene grede

$$\frac{1}{K_M} = \frac{2}{h^2 K_{PN}}, \quad (13)$$

$$\frac{1}{K_V} = \frac{a^2}{24K_{PM}} + \frac{ah}{12K_S}. \quad (14)$$

Progib u simetrali raspona jednakovrijedne punostijene i time okvirne grede sastoji se od doprinosa savijanja i posmika, dakle grednog momenta savijanja i gredne poprečne sile te, npr. na osnovi Mohrove formule statike konstrukcija, jest

$$f = \left( \frac{5}{48} \frac{L^2}{K_M} + \frac{1}{K_V} \right) \frac{WL}{8}. \quad (15)$$

Proračuni pokazuju, a i očito je, da je doprinos gredne poprečne sile u usporedbi s doprinosom grednog momenta savijanja znatan i da ga se nikako ne smije zanemariti.

Slični obrasci vrijede i za drugačije raspodjele ukupnog opterećenja duž raspona.

### 3 Period osnovnih vlastitih vibracija

Okvirne su grede redovito vrlo osjetljive na dinamičke utjecaje.

Već prema njihovoj funkciji i položaju u građevini ponekad je potrebno utvrditi period njihovih osnovnih vlastitih vibracija.

Na osnovi postupka rastavljanja sustava u podsustave, greda se može smatrati serijski sastavljenom od jedne grede opterećene savijanjem i jedne opterećene posmikom. Periodi su tih greda [3]:

$$T_M = \frac{2}{\pi \sqrt{g}} \sqrt{\frac{GL^3}{K_M}} \quad (16)$$

odnosno

$$T_V = \frac{2}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{GL}{K_V}}; \quad (17)$$

sa  $G$  označena je težina koja pri dinamičkoj pobudi vibrira, a  $g$  je gravitacijsko ubrzanje ( $9,81 \text{ m/s}^2$ ).

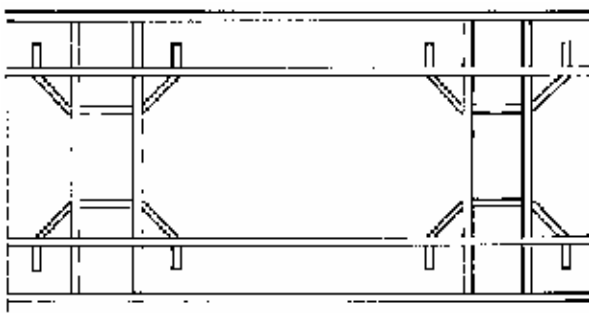
Približna je vrijednost perioda takve grede prema tome [2]

$$T = \sqrt{T_M^2 + T_V^2} \quad (18)$$

Očito je  $T$  veći i od  $T_M$  i od  $T_V$ , jer je takva greda deformabilnija od svake grede pojedinačno.

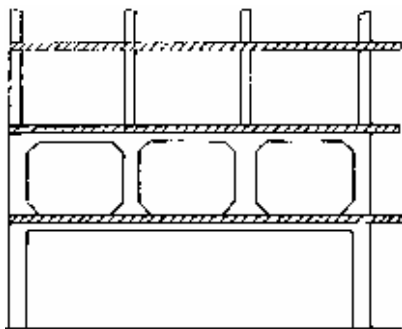
#### 4 Detalji i primjeri primjene okvirnih greda

Okvirne se grede primjenjuju u zgradarstvu, napose kada to iziskuju funkcionalni ili arhitektonski razlozi, rjeđe u mostogradnji i npr. u natkrivenih pješačkih mostova. Sačasti nosači često se rabe kao nosači stropova velikih raspona jer imaju bitno veću nosivost i krutost od osnovnog profila od kojeg se proizvode.



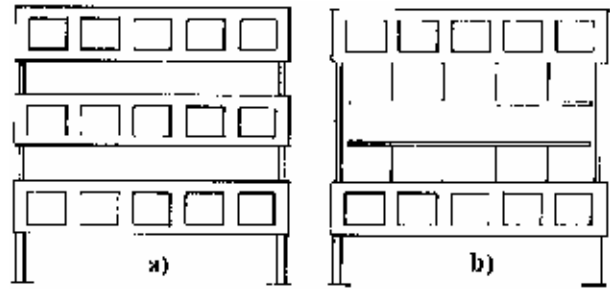
Slika 7. Isječak čelične okvirne grede sa štapovima od I-profila i pojačanim čvorovima

Slika 7. prikazuje isječak, jedno polje, jedne jako opterećene čelične okvirne grede. Pojasi i stupci su od I-profila, a ležajna pojačanja od limova [4].



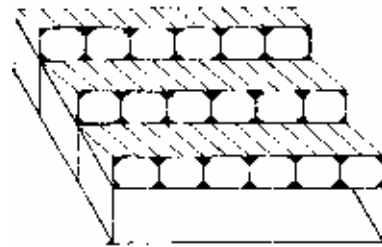
Slika 8. Tropoljna armiranobetonska okvirna greda u prvom katu jedne zgrade koja prihvaća akcije stupova drugog kata i time premošćuje veliku dvoranu u prizemlju neometanu stupovima

Na slici 8. vidi se trokoljna armiranobetonska okvirna greda raspona  $\sim 10 \text{ m}$  u prvom katu jedne veće zgrade. Ona prihvaća akcije unutarnjih stupova drugog kata i tako premošćuje veliku dvoranu u prizemlju u kojoj su stupovi iz funkcionalnih razloga nepoželjni.



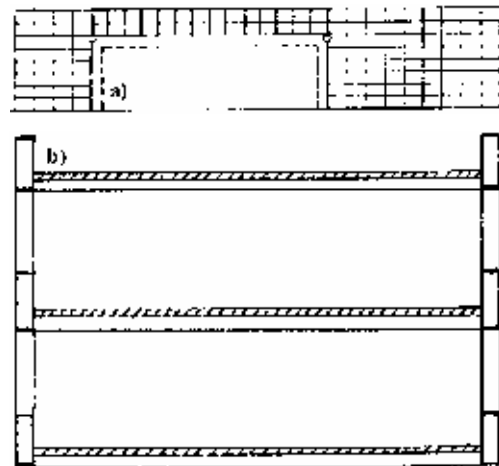
Slika 9. Vertikalni nosivi element zgrade sa 3 okvirne grede (a); vertikalni nosivi element jedne zgrade sa 2 okvirne grede, jednim stropom na vješaljicama i jednim stropom na sekundarnim stupovima (b)

Slika 9.a shematski prikazuje vertikalni nosivi element zgrade sa 3 okvirne grede, a slika 9.b vertikalni nosivi element zgrade sa 2 okvirne grede i 2 stropa na vješaljicama odnosno sekundarnim stupovima [5, 6].



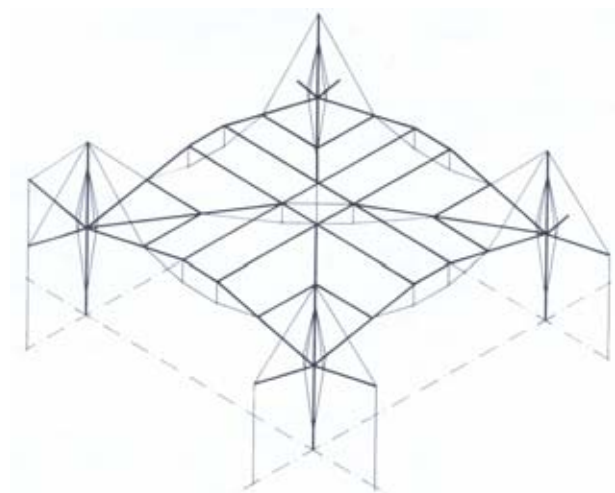
Slika 10. Isječak jedne hale sa šed krovom i okvirima

Na slici 10. vidi se isječak hale sa šed krovom i okvirnim gredama. Dakako da bi primjena rešetkastih umjesto okvirnih greda bila znatno ekonomičnija, ali usvojeno rješenje daje globalno mirniji utisak i povoljnije osvjetljenje [7, 8].



Slika 11. Dvokatna čelična mosna konstrukcija koja iznad postojeće zgrade spaja dvije nove poslovne zgrade (a); poprečni presjek mosta (b)

U konstrukcijskom zahvatu prikazanom na slici 11.a uz jednu postojeću sagrađene su dvije nove poslovne zgrade u masivnoj izvedbi i međusobno povezane, iznad pos



**Slika 12. Modul nosive konstrukcije skladišta tvornice Renault u Swindonu sastavljen od prostornog roštilja čeličnih greda oslabljenih kružnim otvorima i prostornog sustava zatega smještenih djelomično ispod, a djelomično iznad roštilja**

#### LITERATURA

- [1] Engesser, P.: *Näherungsberechnung von Rahmenträgern*, Beton-Kalender 1951., Ernst & Sohn, Berlin
- [2] Rosman, R.: *Näherungsweise Lösung von Eigenwertaufgaben der Baumechanik durch Aufspalten in Teilaufgaben*, Bautechnik 67 (1990), 375-382
- [3] Rogers, G.: *Dynamics of Framed Structures*, Wiley, London, 1959.
- [4] Petersen, C.: *Stahlbau*, Vieweg, Braunschweig, 1993.
- [5] Engel, H.: *Tragsysteme – Structure Systems*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1977.
- [6] Schueller, W.: *High-Rise Building Structures*, Wiley, New York, 1977.
- [7] Henn, W.: *Industriebau*, Callwey, München, 1961.
- [8] Dubas, P.; Gehri, E.: *Stahlhochbau*. Springer, Berlin, 1988.
- [9] Lieberum, P.: *Vierendeel-Stahlkonstruktion für ein Brückenhaus in Hannover*, Bauingenieur 72 (1997), 373-377
- [10] Ackerman, K.: *Tragwerke in der konstruktiven Architektur*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1988.

tojeće zgrade, čeličnom mosnom konstrukcijom raspona ~ 74 m. Mosna konstrukcija sastoji se od dviju perifernih dvokatnih okvirnih greda, a njezina je svijetla širina ~ 11 m (slika 11.b). Na okvirne grede oslanjaju se poprečni nosači razmaka ~ 5 m, a na njih ploča nosiva u uzdužnom smjeru mosta. Pojasi i stupci okvirnih greda su od pravokutnih sandučastih profila zavarenih od limova. Poprečne grede su od I-profila zavarenih od limova, a stropne su ploče armiranobetonске debljine ~ 16 cm. Poprečni nosači spregnuti su sa stropnom pločom. Bočna opterećenja mosta preuzimaju stropne ploče i prenose ih na ležajeve mosta [9].

Nosiva konstrukcija skladišta tvornice Renault u Swindonu [10] sastoji se od velikog broja tlocrtno kvadratičnih modula tlocrtnе ploštine  $24 \times 24 \text{ m}^2$ . Nosiva konstrukcija svakog modula (slika 12.) jest prostorni sustav sastavljen od roštilja čeličnih greda oslabljenih kružnim otvorima i zatega smještenih djelomično ispod, a djelomično iznad roštilja greda.