

Branka Marasović\*  
Boško Šego\*\*

UDK 336.764.2:330.4(497.5)  
JEL Classification G13, C22, C63  
Izvorni znanstveni članak

## MODEL ZA VREDNOVANJE VARANATA I TURBO CERTIFIKATA S TEMELJNOM IMOVINOM S HRVATSKOGA TRŽIŠTA KAPITALA

*Unatoč činjenici da na Zagrebačkoj burzi dosad nije zaživjela trgovina izvedenicama, važno je naglasiti da se na europskim tržištima kapitala već nekoliko godina trguje varantima i turbo certifikatima koji za temeljnu imovinu imaju hrvatske dionice i indeks CROBEX. Postavlja se pitanje kako vrednovati takve vrijednosne papire? Za uspješno vrednovanje izvedenica financijski stručnjaci moraju podrobno poznavati njihova svojstva, svojstva temeljne imovine i modele i numeričke metode koje se mogu primijeniti za njihovo vrednovanje.*

*Varanti i turbo certifikati koji kotiraju na europskim burzama sa stajališta vrednovanja imaju svojstva opcija. Budući da je do danas razvijeno više od šezdeset modela za vrednovanje različitih tipova opcija, čest je slučaj da se pri vrednovanju opcija primjenjuju neprikladni matematički alati. Stoga je cilj ovog rada prikazati metodologiju koju bi financijski stručnjaci morali primjenjivati prilikom vrednovanja opcija i razvijeni model temeljen na prikazanoj metodologiji primijeniti u vrednovanju varanata i turbo certifikata s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala.*

*Ključne riječi: varanti, turbo certifikati, vrednovanje, Monte Carlo simulacije*

---

\* B. Marasović, dr. sc., viši asistent na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Splitu (E-mail: branka.marasovic@efst.hr)

\*\* B. Šego, dr. sc., redoviti profesor na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu (E-mail: bsego@efzg.hr)

Prvobitna verzija članka primljena je u uredništvo 22. 02. 2011., a definitivna 08. 06. 2011.

## 1. Uvod

Unatoč činjenici da na Zagrebačkoj burzi dosad nije zaživjela trgovina opcijama, važno je naglasiti da se na europskim tržištima kapitala već nekoliko godina trguje izvedenim vrijednosnim papirima koji sa stajališta vrednovanja imaju svojstva opcija, a koji za temeljnu imovinu imaju hrvatske dioničke indekse i hrvatske dionice. Tako se u godini 2006., a osobito u tijeku godine 2007. pojavio veliki broj certifikata i varanata na hrvatske dionice i burzovni index CROBEX. Navedeni su vrijednosni papiri uglavnom kotirali na Bečkoj burzi, Stuttgartskoj burzi (na tržišnom segmentu EUWAX) i na SCOACH-u – elektroničkoj burzi specijaliziranoj za trgovanje izvedenicama – iz *joint venturea* između *Deutsche Börse AG* i *Swiss Infrastructure and Exchange (SIX)*. Najčešće su izdavani *Turbo certifikati (Knock-out certifikati)* i varanti na index CROBEX te na dionice kao što su HT, INA, Adris, Atlantska plovidba, Dalekovod, Petrokemija, Ericsson Nikola Tesla itd. No, u godinama 2007. i 2008. zbog financijske su krize i značajnoga smanjenja vrijednosti hrvatskih dionica gotovo svi *Knock-out certifikati* završili u *knock-outu*. Isto je tako veliki broj varanata završio u dospijeću, a investitori su nove varante jednako kao i turbo certifikate izdavali u značajno manjem broju, pa tako da danas na europskim tržištima kapitala postoji relativno mali broj navedenih izvedenih vrijednosnih papira na hrvatske indekse i dionice. No, ublaživanjem krize i povratkom povjerenja ulagača u tržište kapitala, očekuje se ponovno povećanje zainteresiranosti ulagača za izvedenice s hrvatskim dionicama i burzovnim indeksima kao temeljnom imovinom. Taj se trend izdavanja prethodno navedenih vrijednosnih papira počinje uočavati i u ovome trenutku i očekuje se njegov dalji rast.

Postavlja se pitanje: kako vrednovati varante i turbo certifikate s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala? Varanti i turbo certifikati koji kotiraju na europskim burzama sa stajališta vrednovanja imaju svojstva opcija. Budući da je do danas razvijeno više od šezdeset modela za vrednovanje različitih tipova opcija, čest je slučaj da se pri vrednovanju opcija primjenjuju neprikladni matematički alati. Zbog toga je cilj ovoga rada prikazati metodologiju koju bi financijski stručnjaci morali primjenjivati prilikom vrednovanja opcija i razvijeni model zasnovan na prikazanoj metodologiji primijeniti u vrednovanju varanata i turbo certifikata s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala.

U nastavku ovoga rada bit će prikazana metodologija koju bi valjalo primjenjivati prilikom vrednovanja opcija. Nakon toga bit će učinjena analiza izvedenica s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala i analiza temeljne imovine, a zatim se, uzimajući u obzir svojstva temeljne imovine i izvedenica, razvija i primjenjuje model za vrednovanje varanata i turbo certifikata s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala. U posljednjem dijelu rada iznose se zaključna razmatranja kao sistematizacija prethodnih teorijskih i empirijskih spoznaja i bit

će istaknuti važnost i svrha ovoga istraživanja za dalja znanstvena istraživanja iz područja vrednovanja izvedenica.

## 2. Razvitak metodologije za vrednovanje opcija

Prvi model za vrednovanje opcija objavili su Black i Scholes (1973.) u svome radu *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Taj je model razvijen za vrednovanje europskoga tipa opcije na dionicu bez dividende. Iste godine Merton proširuje model i omogućuje vrednovanje opcija na dionice i indekse s kontinuiranim prinosom dividende. Oba modela polaze od pretpostavke da cijene dionica slijede geometrijsko Brownovo gibanje, tj. Wienerov proces. Dalje, Black je godine 1976. razvio model za europske opcije temeljna imovina kojih su ročnice (*futures*) i unaprijednice (*forwards*). Model za vrednovanje europskih opcija na valutu razvili su Garman i Kohlhagen (1983.). Analitička formula za vrijednost američkog tipa opcije ne postoji ni do danas. Modeli koji daju analitički izraz za aproksimaciju vrijednosti američkoga tipa opcije su: Barone-Adesi i Whaley model (1987.), Bjerksund i Stensland model (1993.) i Bjerksund i Stensland model (2002.). Postoji također cijeli niz modela za vrednovanje različitih tipova egzotičnih opcija (Handley, (2001.), Esser, (2003.), Shaw, (1998.), Rubinstein (1991.), Shilling, (2002.) itd.).

Mnogi stohastički difuzijski modeli nastali su kao svojevrsna modifikacija Black-Scholesovog modela, a neki modeli predstavljaju alternativu Black-Scholesovom modelu. Alternativni modeli koji pretpostavljaju da distribucija prinosa temeljne imovine nema normalan oblik jesu: model konstantne elastičnosti varijance (Hagan i Woodward, (1999.), Cox i Ross, (1976.), asimetrični-zaobljeni modeli (Jarrow i Rudd, (1982.), Merton jump-diffusion model (Merton, (1976.), Batesov generalized jump-diffusion model (Bates, (1991.), Hull-White stochastic volatility model (Hull i White, (1988.). Broj znanstvenih članaka u kojima se predlažu različiti stohastički difuzijski modeli za vrednovanje opcija veoma je velik. Pregled takvih modela opširno je dao Gatheral, (2006.). Razvijeno je i mnoštvo modela koji počivaju na numeričkim metodama koje su mnogo fleksibilnije od analitičkih rješenja i kojima se koriste za vrednovanje različitih tipova opcija za koje ne postoji analitičko rješenje. To su ponajprije modeli stabala kojima pripadaju binomni i trinomni model (Cox, Ross i Rubinstein, (1979.), Rendleman i Bartter (1979.), Leisen i Reimer, (1996.), Rubinstein, (1998.), Boyle, (1986.), Haug i Haug, (2001.), Derman, Kani i Chriss, (1996.) metode konačnih diferencija (Brennan i Schwartz (1978.), Hull i White (1990.) i Monte Carlo simulacije (prvi put uveo Boyle, (1977.). Pregled velikoga broja modela koji se zasnivaju na numeričkim metodama dao je Haug, (2007.).

Za uspješno vrednovanje opcija financijski stručnjaci moraju podrobno poznavati svojstva opcija, temeljne imovine i modela za vrednovanje opcija. Prvi

korak u vrednovanju opcija posebno je sagledanje karakteristika opcija koje se vrednuju. U drugome koraku utvrđuju se svojstva prinosa temeljne imovine. Budući da se većina modela zasniva na normalnoj distribuciji prinosa i konstantnoj volatilnosti, potrebno je ispitati jesu li ta svojstva zadovoljena. U trećem koraku, ovisno o rezultatima dobivenim u prethodnim koracima, odabire se odgovarajući analitički model ili neka numerička metoda kojom se može aproksimirati vrijednost opcije (Tablica 1.).

**Tablica 1.**

**IZBOR MODELA ZA VREDNOVANJE OPCIIJA  
OVISNO O TIPU OPCIIJE I O SVOJSTVIMA TEMELJNE IMOVINE**

<b>Tip opcije</b>	<b>Svojstva temeljne imovine</b>	<b>Model</b>
Plain vanilla europske opcije	Normalna distribucija prinosa i konstantna volatilnost	Black-Scholesov model, binomni model, trinomni model, metode konačnih diferencija, Monte Carlo simulacije
	Normalna distribucija prinosa i nije konstantna volatilnost	Model konstantne elastičnosti varijance, implicirana binomna i trinomna stabla (za likvidne opcije gdje volatilnost procjenjujemo s funkcijom implicirane volatilnosti), Monte Carlo simulacije
	Distribucija prinosa nije normalna i nije konstantna volatilnost	Mertonov Mixed Jump-Diffusion Model, model stohastičke volatilnosti, Monte Carlo simulacije
Plain vanilla američke opcije	Normalna distribucija prinosa i konstantna volatilnost	Bjersund-Stenslandove formule za aproksimaciju vrijednosti opcije, binomni model, trinomni model, metode konačnih diferencija, Monte Carlo simulacije
	Normalna distribucija prinosa i nije konstantna volatilnost	Implicirana binomna i trinomna stabla (za likvidne opcije gdje volatilnost procjenjujemo s funkcijom implicirane volatilnosti), Monte Carlo simulacije
	Distribucija prinosa nije normalna i nije konstantna volatilnost	Monte Carlo simulacije

<b>Tip opcije</b>	<b>Svojstva temeljne imovine</b>	<b>Model</b>
Opcije s barijerom	Normalna distribucija prinosa i konstantna volatilnost	Analitički model (samo za opcije europskog tipa) binomni model, trinomni model, metode konačnih diferencija, Monte Carlo simulacije
	Normalna distribucija prinosa i nije konstantna volatilnost	Implicirana binomna i trinomna stabla (za likvidne opcije gdje volatilnost procjenjujemo s funkcijom implicirane volatilnosti), Monte Carlo simulacije
	Distribucija prinosa nije normalna i nije konstantna volatilnost	Monte Carlo simulacije
Binomne opcije	Normalna distribucija prinosa i konstantna volatilnost	Modificirani Black-Scholesov model (samo za opcije europskog tipa) binomni model, trinomni model, metode konačnih diferencija, Monte Carlo simulacije
	Normalna distribucija prinosa i nije konstantna volatilnost	Implicirana binomna i trinomna stabla (za likvidne opcije gdje volatilnost procjenjujemo s funkcijom implicirane volatilnosti), Monte Carlo simulacije
	Distribucija prinosa nije normalna i nije konstantna volatilnost	Monte Carlo simulacije
Lookback opcije	Normalna distribucija prinosa i konstantna volatilnost	Analitička formula (samo za opcije europskog tipa) binomni model, trinomni model, metode konačnih diferencija, Monte Carlo simulacije
	Normalna distribucija prinosa i nije konstantna volatilnost	Implicirana binomna i trinomna stabla (za likvidne opcije gdje volatilnost procjenjujemo s funkcijom implicirane volatilnosti), Monte Carlo simulacije
	Distribucija prinosa nije normalna i nije konstantna volatilnost	Monte Carlo simulacije

Iz tablice 1. možemo uočiti da su modeli zasnovani na Monte Carlo simulacijama najfleksibilniji i mogu se primjenjivati za vrednovanje velikog spektra opcija.

### 3. Analiza izvedenica koje kotiraju na europskim burzama s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala

Prije nego što navedemo prikaz izvedenih vrijednosnih papira na hrvatske burzovne indekse i dionice, kratko ćemo opisati njihove karakteristike.

*Varanti (plain vanilla)* – baš kao i opcije daju vlasniku pravo, ali ne i obvezu da kupi (u slučaju *call warranta*), odnosno da proda (u slučaju *put warranta*) temeljnu imovinu do određenoga datuma (američki tip) ili na određen datum (europski tip) po unaprijed dogovorenoj cijeni (*strike* ili *exercise price*). Razlika među varantom i opcijom očituje se u slijedećem:

- *Opcije su ugovori, varanti su financijski proizvodi*

Opcije su ugovori koji su kreirani i sklopljeni na opcijskim tržištima. Prilikom kupnje opcije kupuje se ugovor koji vlasniku omogućuje kupnju temeljne imovine. Za trgovinu opcijama potrebno je s brokerskom kućom sklopiti poseban ugovor (za sklapanje navedenoga ugovora potrebno je zadovoljiti uvjete za otvaranje maržnog računa (*margin account*), kao i uvjete vezane za jamstveni kapital).

Varantima se trguje na dioničkim tržištima i nije potrebno sklopiti poseban ugovor kojim bi se omogućila trgovina varantima. Za razliku od opcija varante ne kreiraju burze već banke radi zadovoljavanja zahtjeva tržišta za takvim financijskim instrumentima.

- *Standardizirani i nestandardizirani ugovori*

Opcijski ugovori su standardizirani, a to znači da gotovo sve izdane opcije moraju zadovoljavati posebna pravila koja se odnose na njihovo trajanje, na veličinu ugovora, na izvršne cijene, na broj jedinica temeljne imovine koja se kontrolira jednom opcijom itd.

Varanti ne moraju zadovoljavati nikakve standarde u smislu dospijeća, izvršne cijene, broja jedinica temeljne imovine koja se kontrolira jednim varantom itd. Prilikom izdavanja varanata banke prema vlastitom nahođenju određuju karakteristike varanta, što znači da za određenu temeljnu imovinu u optičaju može postojati mnoštvo varanata s različitim izvršnim cijenama, datumima dospijeća, brojem jedinica temeljne imovine koja se kontrolira jednim varantom.

- *Temeljna imovina*

Varanti se izdaju sa mnoštvom različitih oblika temeljne imovine, a organizirana se opcijska tržišta pretežno usredotočuju na dionice, dioničke indekse i obveznice.

- *Dostupnost opcija i varanata*

Za svaku se opciju može izdati neograničeni broj ugovora, a broj opcija u opcijama ne utječe na njihovu cijenu. Varanti se izdaju u serijama koje su ograničene pa to ponekad može utjecati na cijenu varanta.

*Turbo certifikati* – javljaju se pod različitim nazivima poput *knock-out certifikati*, *knock-out warranti* itd. *Knock out certifikati* uz uobičajene elemente koji su karakteristični za plain vanilla varante sadrže i barijernu cijenu (*knock-out barrier price*).

U slučaju kada cijena temeljne imovine prijeđe barijernu cijenu certifikat prestaje postojati. Tada, ako je barijerna cijena certifikata jednaka izvršnoj cijeni, vlasnik certifikata ne dobiva nikakvu naknadu, a u slučaju kada je barijerna cijena veća (kod *call knock out certifikata*) ili manja (kod *put knock out certifikata*), vlasnik *knock out certifikata* dobiva naknadu (tzv. rezidualnu vrijednost) koja je jednaka razlici među izvršnom i barijernom cijenom *knock out certifikata* umanjenoj za troškove izdavatelja<sup>1</sup>.

*Knock-out certifikati* mogu biti vremenski ograničenog roka trajanja (s određenim datumom dospijea) ili vremenski neograničeni, tzv. otvoreni (*open end*). *Knock-out certifikati* koji imaju datum dospijea, mogu se vrednovati modelima koji se primjenjuju za vrednovanje opcija s barijerom, a *open end certifikati* ne mogu se vrednovati modelima za vrednovanje opcija i nisu predmet ovoga rada.

U nastavku će biti dan pregled izvedenih vrijednosnih papira s hrvatskim dionicama kao temeljnom imovinom. Većina njih kotira na Bečkoj burzi i na Stuttgartskoj burzi (segment EUWAX), a emitenti su najčešće Erste Group Bank AG, Raiffeisen Centrobank AG, RBS (The Royal Bank of Scotland) itd. Usredotočit ćemo se na varante na HT i na turbo certifikate na HT, INU i Adris koje je izdala Erste Group Bank AG, jer su oni, sa stajališta ovoga rada, najzanimljiviji. Izvedenice koje su izdali ostali emitenti nećemo uzeti u razmatranje zato što se radi o varantima s minimalnom izvršnom cijenom (0.01) koji vjerno preslikavaju cijenu dionice ili je riječ o *open-end certifikatima* (RBS je primjerice izdala petnaestak *knock-out open-end certifikata* na CROBEX).

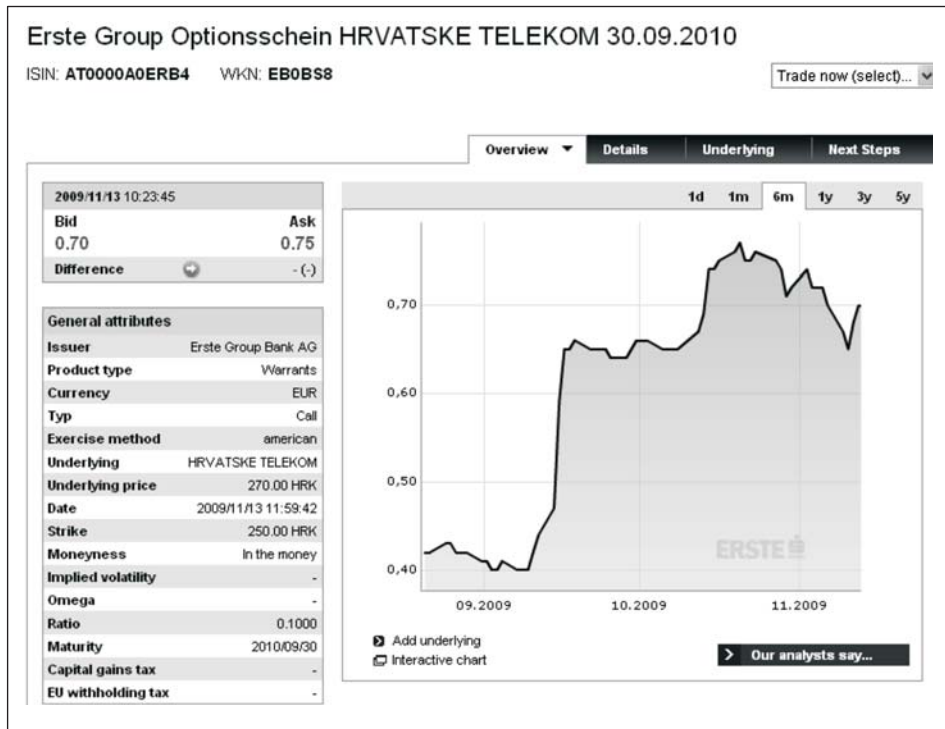
---

<sup>1</sup> Prilikom izdavanja certifikata izdavatelj zauzima određene pozicije radi hedgiranja te se prilikom knock-out događaja zatvaraju navedene pozicije i troškovi zatvaranja pozicija se obračunavaju prilikom isplate rezidualne vrijednosti. U prospektu izdanja izdavatelj navodi u kojem se roku od nastanka knock-out događaja (npr. 1 ili 3 sata) dostavlja iznos rezidualne vrijednosti.

Na primjeru varanta na dionicu HT dat ćemo detaljni prikaz elemenata koji karakteriziraju varante općenito.

Slika 1.

### VARANT NA DIONICU HRVATSKE TELEKOMA S IZVRŠNOM CIJENOM 250



Izvor: web stranica Erste Group Bank AG)

Slika 1. preuzeta je s web stranica Erste Group Bank AG koja je i izdavatelj varanta na HT. Budući da je Erste Group Bank AG izdavatelj, ona ima obvezu održavati likvidnost navedenoga varanta, pa stoga preuzima ulogu *market maker*-a i zadaje naloge za kupnju (*Bid*) po 0.70 EUR i nalog za prodaju (*Ask*) po 0.75 EUR. Ispod retka s cijenama za kupnju i prodaju je redak je s oznakom *Difference* koji prikazuje koliko se promijenila cijena kupnje (*Bid*) varanta u odnosu na posljednju cijenu prethodnoga trgovinskoga dana. Iz tablice pod nazivom *General attributes* možemo očitati slijedeće informacije: izdavatelj varanta (*Issuer*) je Erste Group Bank AG, cijena varanta je u eurima, vrsta varanta je *Call*, američkoga je tipa

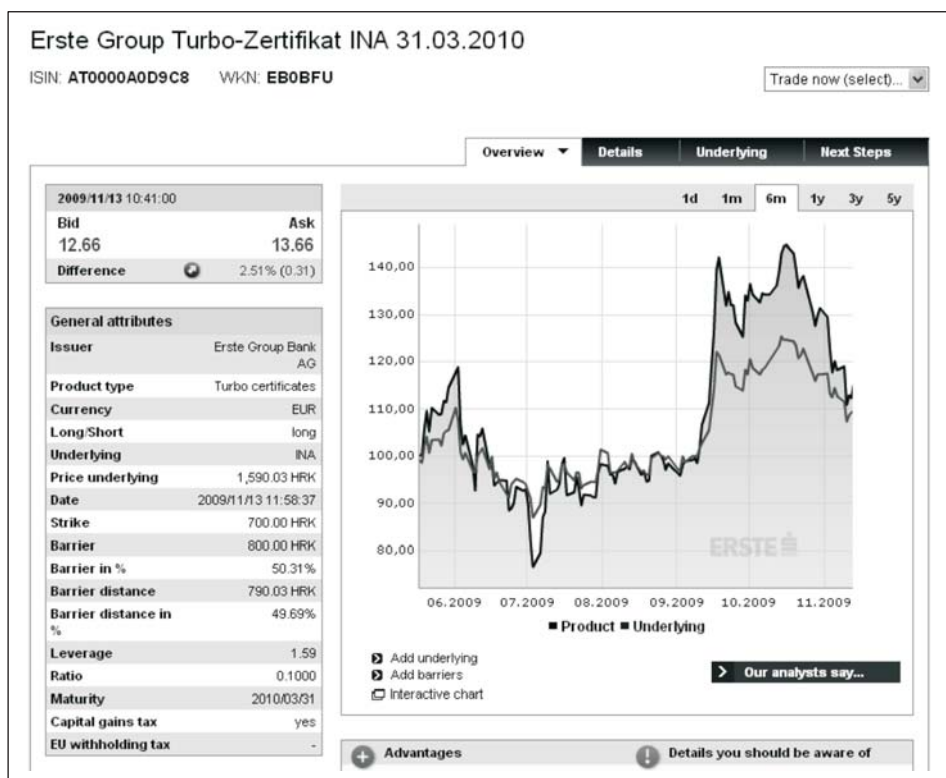


izvršenja, temeljna imovina je dionica Hrvatskih telekomunikacija, cijena temeljne imovine na datum 13.11.2009. u 10:23:45 bila je 270.00 kuna, izvršna je cijena 250.00 kuna, varant je *in the money*, omjer je 0.1, a to znači da je potrebno 10 varanata da bi se kontrolirala jedna dionica. Dospijeće je varanta 30.09.2010. godine.

U nastavku ćemo na sličan način provesti prikaz bitnih elemenata za turbo certifikat na dionicu INE koji je također izdala Erste Group Bank AG.

Slika 2.

### TURBO CERTIFIKAT NA DIONICU INE S IZVRŠNOM CIJENOM 700 I BARIJERNOM CIJENOM 800



(Izvor: web stranica Erste Group Bank AG)

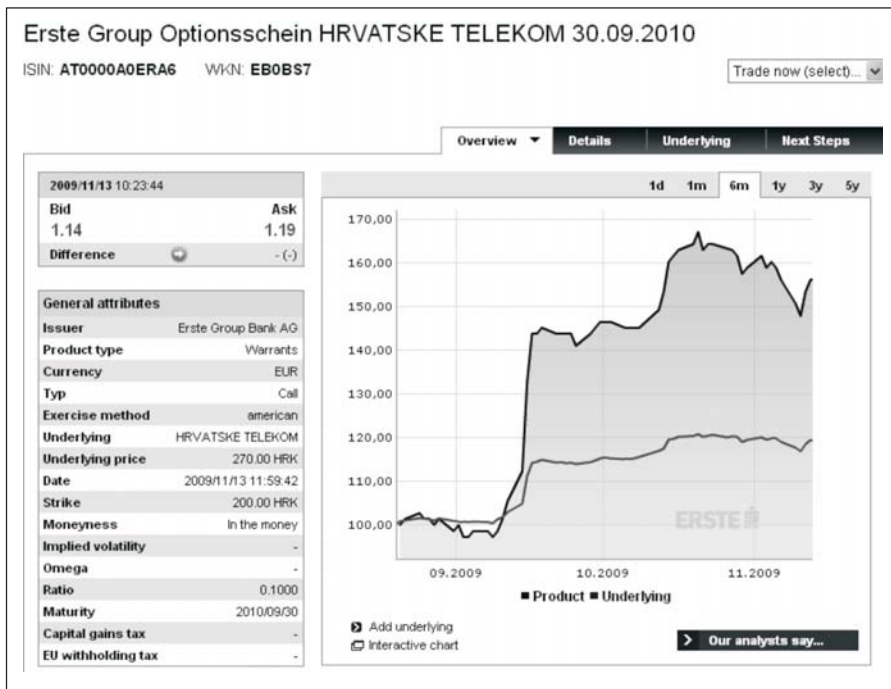
I Slika 2. preuzeta je s web stranica Erste Group Bank AG koja je i izdavatelj turbo certifikata na INU. Vidimo da ponuda na kupnju (*Bid*) iznosi 12.66 EUR, a ponuda za prodaju (*Ask*) 13.66 EUR. Razlika cijene kupnje (*Bid*) turbo certifikata u odnosu na zaključnu cijenu prethodnog trgovinskog dana iznosi 2.51%. Iz tabli-

ce pod nazivom *General attributes* možemo očitati ove informacije: izdavatelj je turbo certifikata (*Issuer*) Erste Group Bank AG, cijena je turbo certifikata u eurima, vrsta turbo certifikata je *long* što odgovara *call* tipu opcije, temeljna imovina dionica je INE, cijena temeljne imovine na datum 13.11.2009. u 11:58:37 je bila 1590.00 kuna, izvršna je cijena 700,00 kuna, a barijerna cijena je 800,00 kuna, barijerna je cijena na 50.31% od cijene temeljne imovine, a udaljenost cijene temeljne imovine od barijerne cijene jest 790.00 kuna, odnosno 49.69%, poluga (*Leverage*) je 1.59 što znači da će se ako se cijena temeljne imovine poveća za 1%, cijena turbo certifikata povećati 1.59%, omjer je 0.1, a to znači da je potrebno 10 turbo certifikata da bi se kontrolirala jedna dionica. Dospijeće je varanta 31.03.2010. godine i pripada skupini vrijednosnih papira na koje se plaća porez na kapitalnu dobit (prema zakonima zemlje izdavatelja).

Na slikama 3. – 6. dani su osnovni podaci za ostale izvedenice s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala.

Slika 3.

### VARANT NA DIONICU HRVATSKOGA TELEKOMA S IZVRŠNOM CIJENOM 200



(Izvor: web stranica Erste Group Bank AG)

Slika 4.

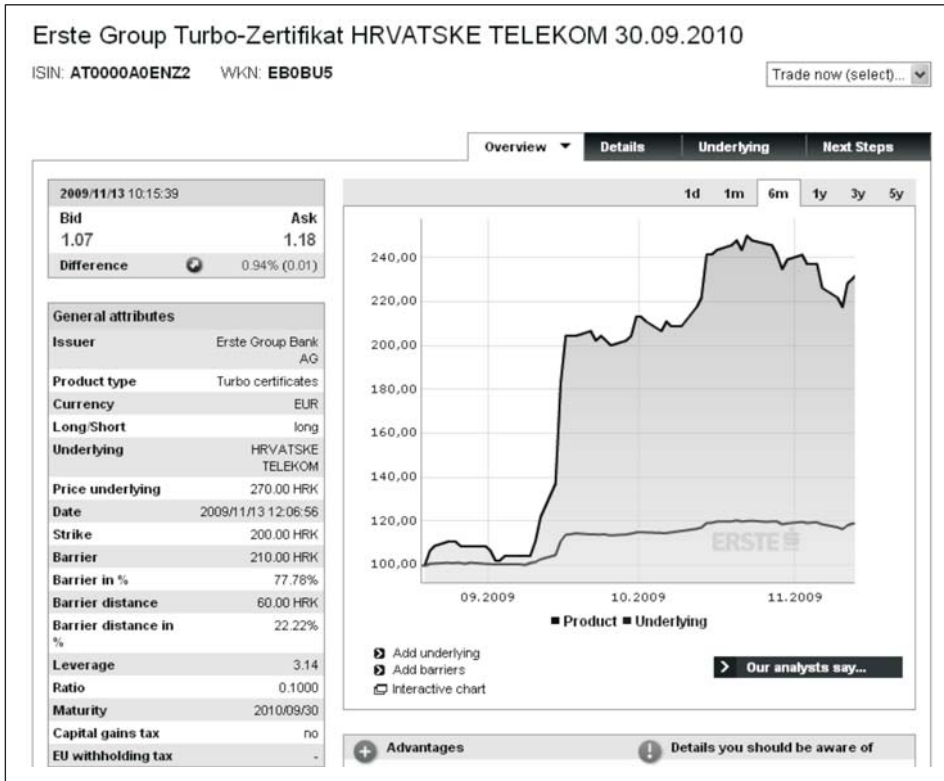
TURBO CERTIFIKAT NA DIONICU HRVATSKOGA TELEKOMA S  
 IZVRŠNOM CIJENOM 150 I BARIJERNOM CIJENOM 170



(Izvor: web stranica Erste Group Bank AG)

Slika 5.

## TURBO CERTIFIKAT NA DIONICU HRVATSKOGA TELEKOMA S IZVRŠNOM CIJENOM 200 I BARIJERNOM CIJENOM 210



(Izvor: web stranica Erste Group Bank AG)

Slika 6.

## TURBO CERTIFIKAT NA DIONICU ADRIS GRUPE S IZVRŠNOM CIJENOM 100 I BARIJERNOM CIJENOM 125



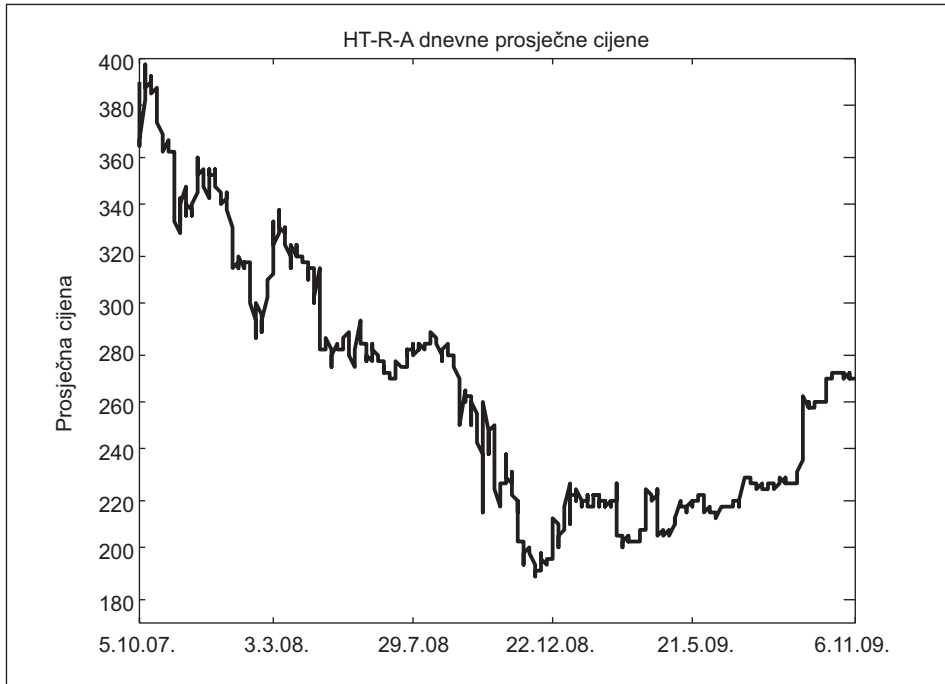
(Izvor: web stranica Erste Group Bank AG)

### 4. Analiza vrijednosnica s hrvatskoga tržišta kapitala koje predstavljaju temeljnu imovinu izvedenica s europskih burzi

Analiza svojstava dionice Hrvatskih telekomunikacija d.d. učinjena je na osnovi kretanja cijena u razdoblju od 5.10.2007. do 6.11.2009. (ukupno 515 trgovinskih dana – Slika 7.). Stope prinosa izračunate su na osnovi prosječnih cijena dionica. Budući da je prosječna dnevna cijena vagana aritmetička sredina cijena u tijeku dana, gdje su ponderi udjeli količine trgovanja po pripadnoj cijeni u ukupnoj količini trgovanja, one realnije izražavaju dinamiku kretanja u odnosu na posljednje cijene.

Slika 7.

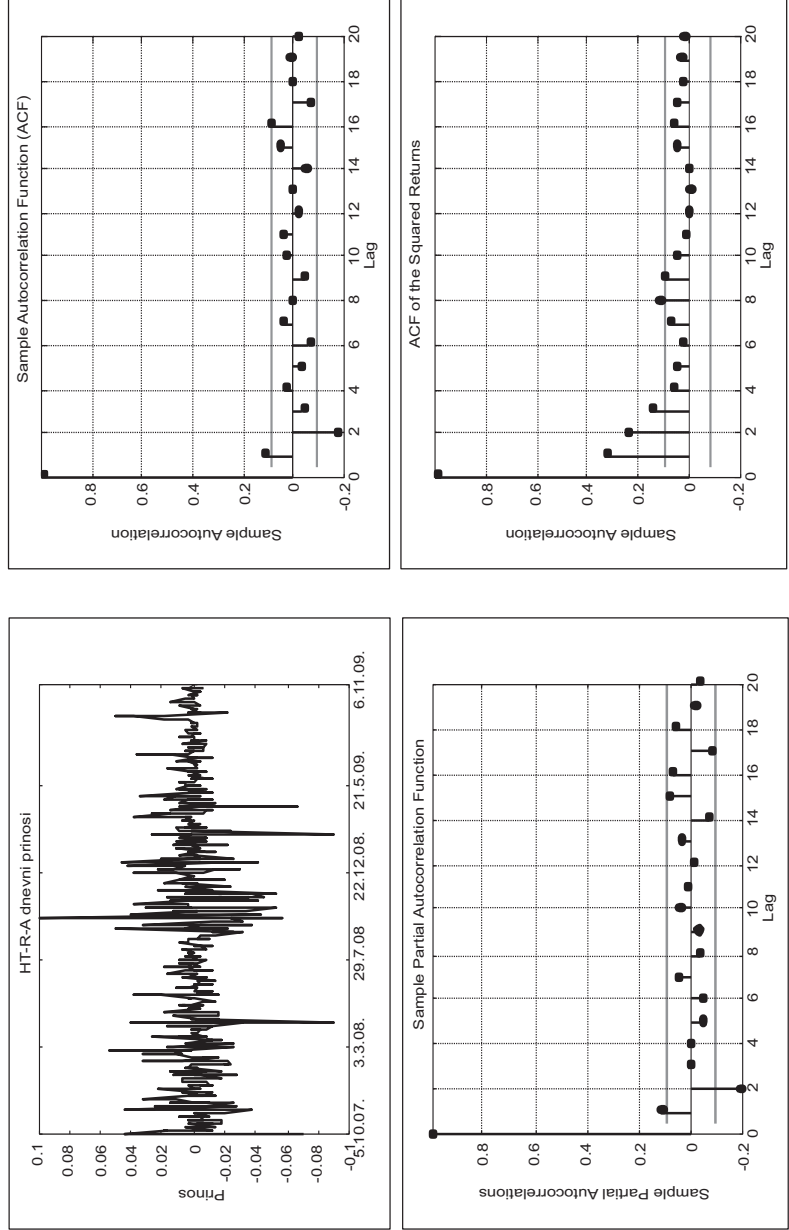
## CIJENE DIONICE HT-A U RAZDOBLJU OD 5.10.2007. DO 6.11. 2009.



Na slici 8. uočljivo je da postoji značajna autokorelacija prinosa i značajna autokorelacija kvadrata prinosa dionica HT. Značajnost autokorelacije prinosa i kvadrata prinosa testirana je uz pomoć Ljung-Boxova testa za 1, 2, 5, 10, 15 vremenskih pomaka, što je predstavljeno na slici 9. Pri empirijskoj razini signifikantnosti od 1% odbacuje se nulta hipoteza o nepostojanju autokorelacije. To znači da očekivanje procesa prinosa nije konstantno. Budući da i kvadrati prinosa također pokazuju značajnu autokoreliranost, zaključujemo da ni varijanca procesa nije konstantna.

Slika 8.

PRINOSI DIONICA HT, KORELOGRAM PRINOSA I KVADRATA PRINOSA I PARCIJALNA  
AUTOKORELACIJSKA FUNKCIJA PRINOSA



Slika 9.

## LJUNG-BOXOV TEST PRINOSA DIONICA HRVATSKOGA TELEKOMA

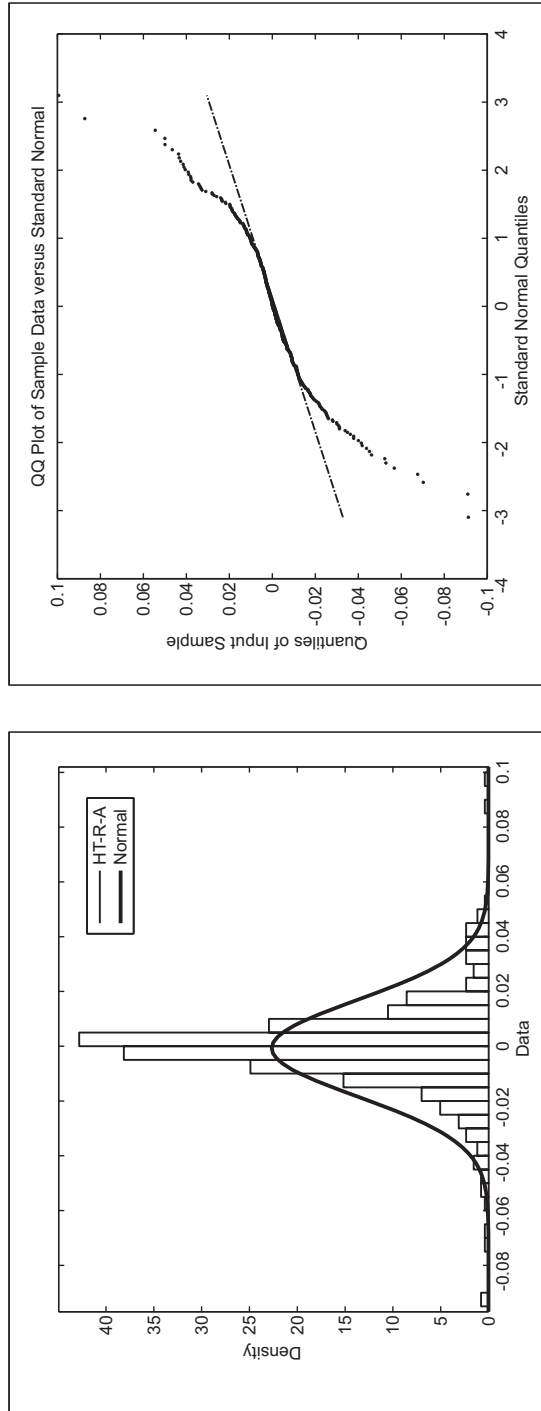
<pre> » [H,pValue,Stat,CriticalValue] = ...   lbqtest(x-mean(x),[1 2 5 10 15]',0.01) H =     1     1     1     1     1 pValue =     0.0071     0.0000     0.0002     0.0018     0.0057 Stat =     7.2390     22.2418     23.8523     28.0777     32.3774 CriticalValue =     6.6349     9.2103     15.0863     23.2093     30.5779 </pre>	<pre> » [H,pValue,Stat,CriticalValue] = ...   lbqtest((x-mean(x)).^2,[1 2 5 10 15]',0.01) H =     1     1     1     1     1 pValue =     1.0e-013 *     0.2442     0     0     0 Stat =     58.1356     87.7551     102.0758     117.4291     118.9299 CriticalValue =     6.6349     9.2103     15.0863     23.2093 </pre>
---	---

Iz slike 10. može se uočiti da je realno pretpostaviti da distribucija prinosa nije normalnog oblika zbog postojanja zadebljanih krajeva (*fat tails*). Hipotezu o normalnoj distribuciji prinosa dionica Hrvatskoga telekoma testirat ćemo i Jarqua-Beraovim testom.



Slika 10.

HISTOGRAM PRINOSA I Q-Q DIJAGRAM PRINOSA  
DIONICA HRVATSKOGA TELEKOMA



Slika 11.

## JARQUE-BERAOV TEST PRINOSA DIONICA HRVATSKOGA TELEKOMA

```

> [H,P,JBSTAT,CU] = jbttest(x,0.95)

H =

     1

P =

     0

JBSTAT =

  964.2705

CU =

   0.1026
  
```

Jarque-Beraov test pokazuje kako se pri jako visokoj testovnoj veličini ne može prihvatiti nulta hipoteza, tj. ne može se prihvatiti pretpostavka da je distribucija prinosa normalnoga oblika. Važno je primijetiti da je mjera asimetrije negativna, ali gotovo beznačajna (*skewnes*=-0.05055), a distribucija je izrazito šiljastog oblika (*kurtosis*=9.74715). Mjera zaobljenosti iznad 3 istovremeno i pokazuje da su krajevi distribucije zadebljani i dugi i da je potrebno pretpostaviti neku drugu distribuciju iz familije distribucija ekstremnih vrijednosti, a najčešće se pretpostavlja Studentova distribucija.

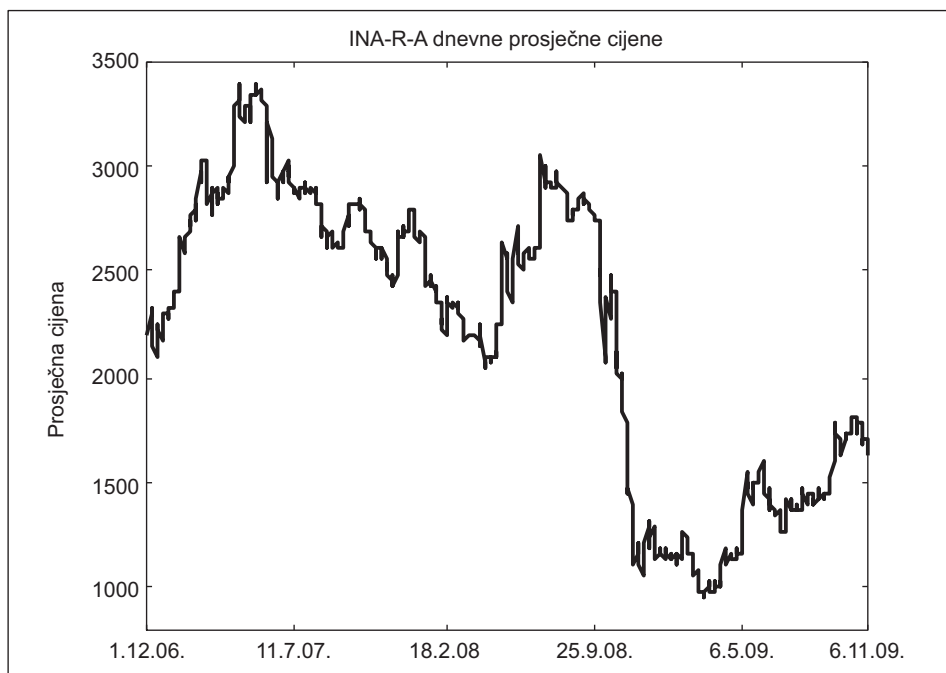
Analiza svojstava dionice INE učinjena je na osnovi kretanja cijena u razdoblju od 1.12. 2006. do 6.11.2009. (ukupno 726 trgovinskih dana). Stope prinosa izračunate su na osnovi prosječnih cijena dionica. Na slici 13 uočljivo je da postoji značajna autokorelacija prinosa i značajna autokorelacija kvadrata prinosa dionica INE. Značajnost autokorelacije prinosa i kvadrata prinosa testirana je Ljung-Boxovim testom za 1, 2, 5, 10, 15 vremenskih pomaka, što je predstavljeno na slici 14. Pri empirijskoj razini signifikantnosti od 1% odbacuje se nulta hipoteza o nepostojanju autokorelacije. To znači da očekivanje procesa prinosa nije konstantno. Budući da i kvadrati prinosa također pokazuju značajnu autokoreliranost, ni varijanca procesa nije konstantna.

Iz slike 15. može se uočiti da je realno pretpostaviti da distribucija prinosa nije normalnoga oblika zbog postojanja zadebljanih krajeva (*fat tails*). Hipotezu o normalnoj distribuciji prinosa dionica INE testirat ćemo i Jarque-Beraovim testom.

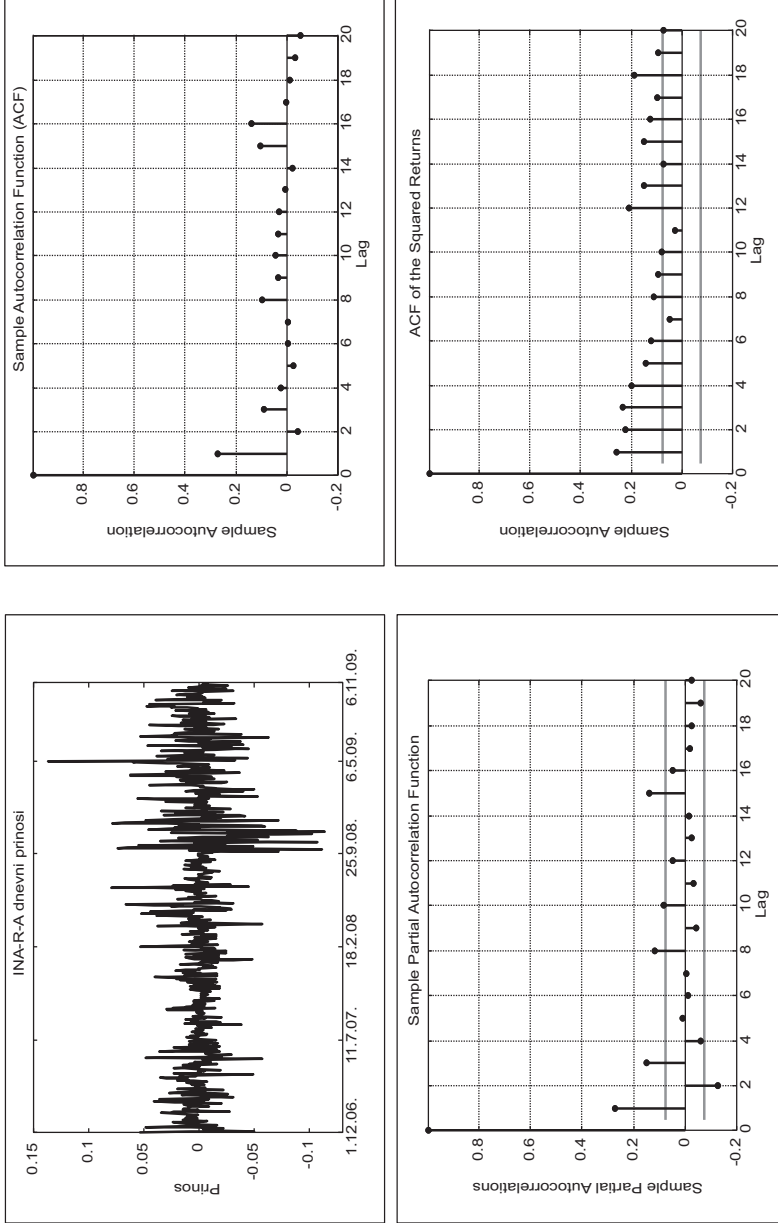
Jarque-Beraov test pokazuje kako se pri jako visokoj testovnoj veličini ne može prihvatiti nulta hipoteza, odnosno ne može se ni u ovom slučaju prihvatiti pretpostavka da je distribucija prinosa normalnog oblika. I sada je važno primijetiti da je mjera asimetrije negativna, ali gotovo beznačajna ( $skewnes=-0.2478$ ), a distribucija je izrazito šiljastog oblika ( $kurtosis=5.3046$ ), pa je i u ovome slučaju nužno pretpostaviti neku drugu distribuciju iz familije distribucija ekstremnih vrijednosti.

*Slika 12.*

CIJENE DIONICE INE U RAZDOBLJU OD 1.12.2006. DO 6.11. 2009.



PRINOSI DIONICA INE, KORELOGRAM PRINOSA I KVADRATA PRINOSA I PARCIJALNA  
AUTOKORELACIJSKA FUNKCIJA PRINOSA



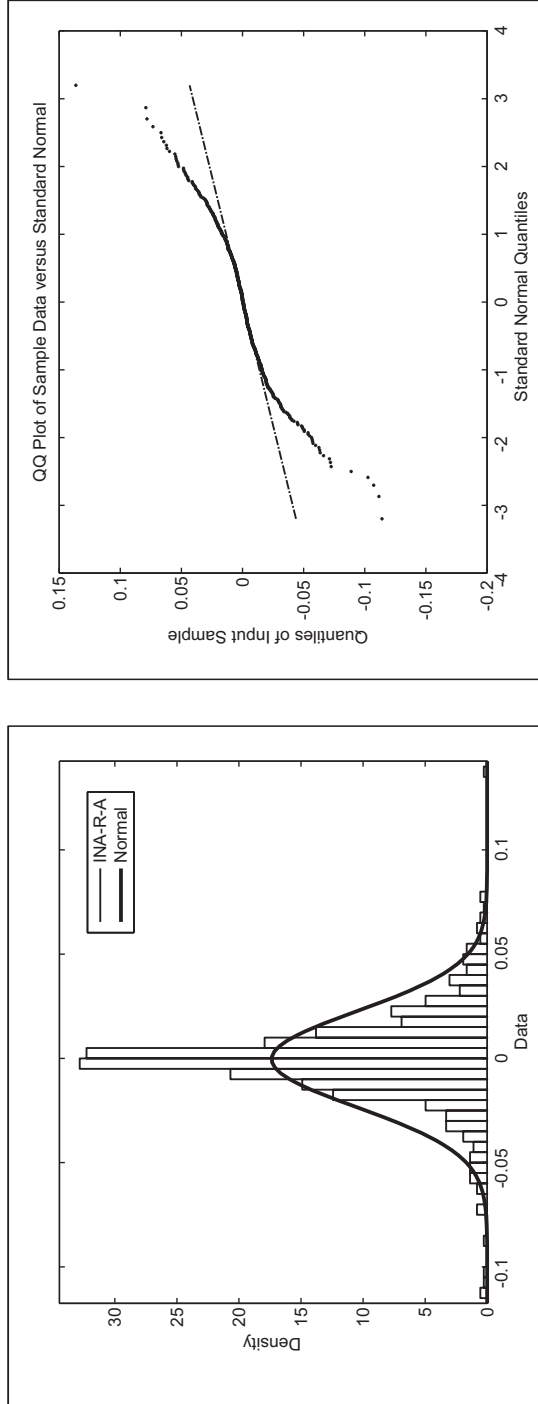
Slika 14.

LJUNG-BOXOV TEST PRINOSA DIONICA I NE

<pre> » [H,pValue,Stat,CriticalValue] = ... lbqtest(inat1-mean(inat1),[1 2 5 10 15] , 0.01) H = 1 1 1 1 1 1 pValue = 1.0e-010 * 0.00181077375316 0.00819899703686 0.04130917830825 0.24198976156242 0.44179548908119 Stat = 54.20015214113592 55.65907067468395 62.26603098768810 71.36044854178758 81.08659512451574 CriticalValue = 6.63489660102123 9.21684037197618 15.08627246938899 23.20925115895435 30.57791416689249                     </pre>	<pre> » [H,pValue,Stat,CriticalValue] = ... lbqtest((inat1-mean(inat1)).^2,[1 2 5 10 15] , 0.01) H = 1 1 1 1 1 1 pValue = 1.0e-011 * 0.44241277308288 0 0 0 0 Stat = 1.0e+002 * 0.47926876858143 0.84153325873005 1.65290506962838 1.96751766581672 2.64287472733327 CriticalValue = 6.63489660102123 9.21684037197618 15.08627246938899 23.20925115895435                     </pre>
--	---

Slika 15.

HISTOGRAM PRINOSA I Q-Q DIJAGRAM PRINOSA DIONICA INE



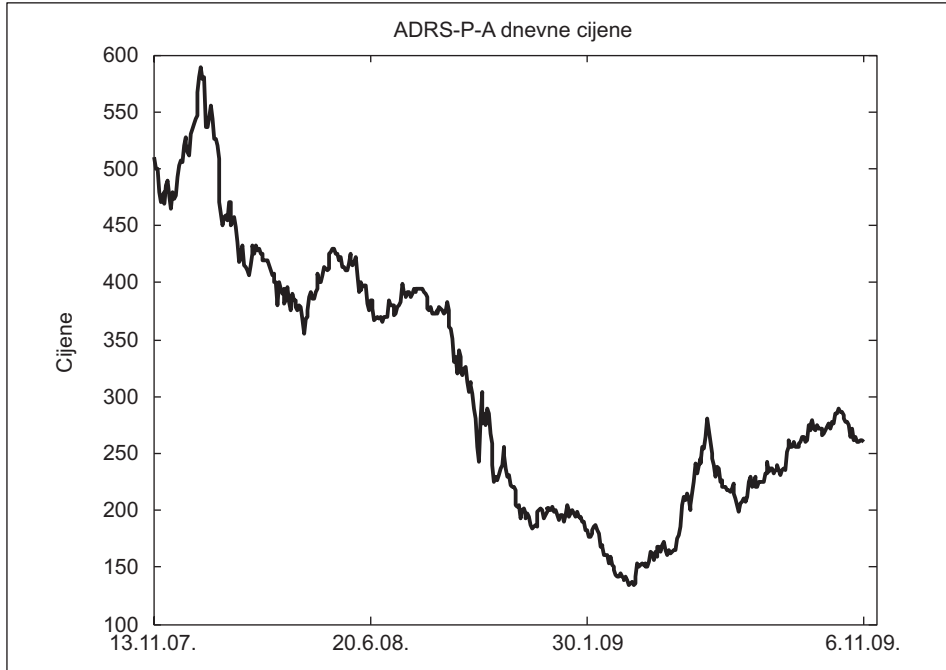
*Slika 16.*

### JARQUE-BERAOV TEST PRINOSA DIONICA INE

```
» [H,P,JBSTAT,CU] = jbttest(ina1,0.95)
H =
    1
P =
    0
JBSTAT =
    8.358820477826241e+002
CU =
    0.10258658877510
```

Pri analizi prinosa dionica Adris grupe dobivamo slične rezultate kao i kod dionica Hrvatskoga telekoma i INE. Sa slika 17.-21. može se uočiti da postoji značajna autokorelacije kvadrata prinosa, tj. da varijanca procesa prinosa nije konstantna. Također se može uočiti da distribucija prinosa dionica Adrisa nema normalan oblik, pa je zbog zadebljanih krajeva potrebno aproksimirati distribuciju prinosa dionica Adrisa Studentovom distribucijom.

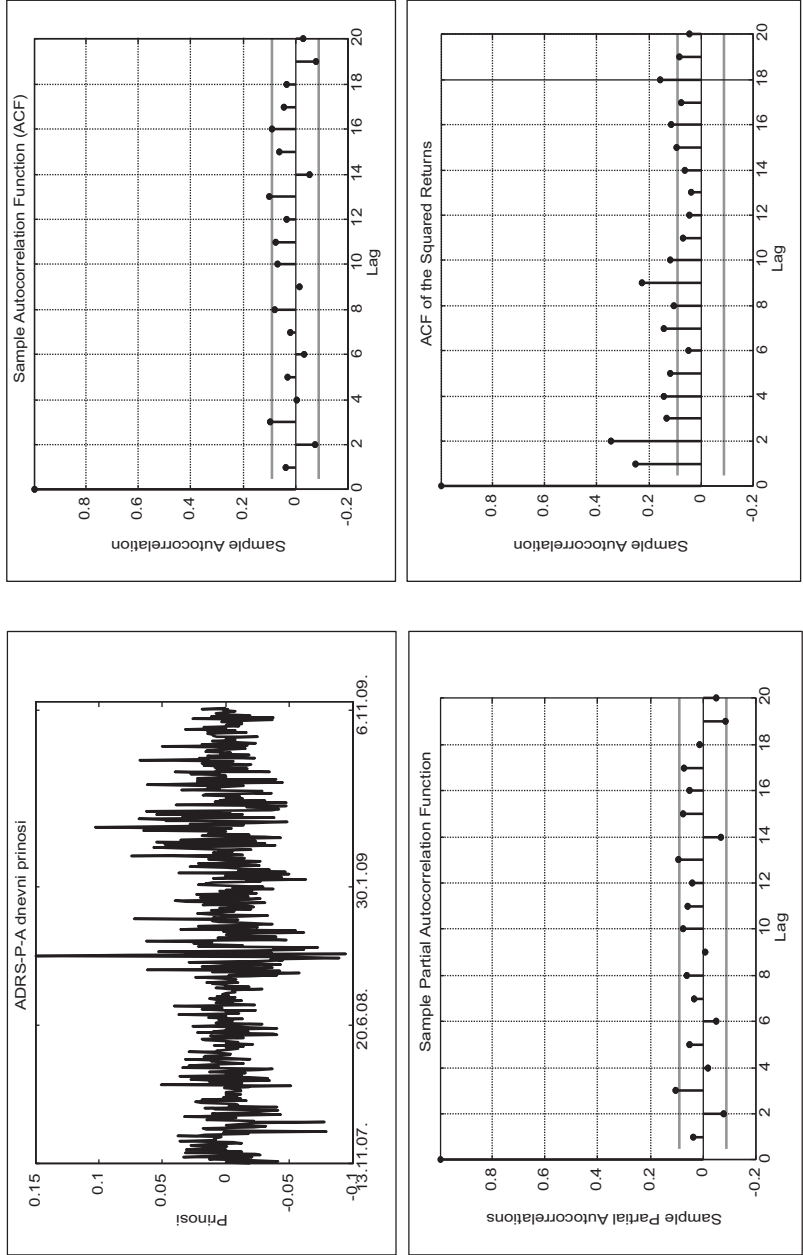
Slika 17.

CIJENE DIONICE ADRIS GRUPE U RAZDOBLJU  
OD 13.11.2007. DO 6.11.2009.



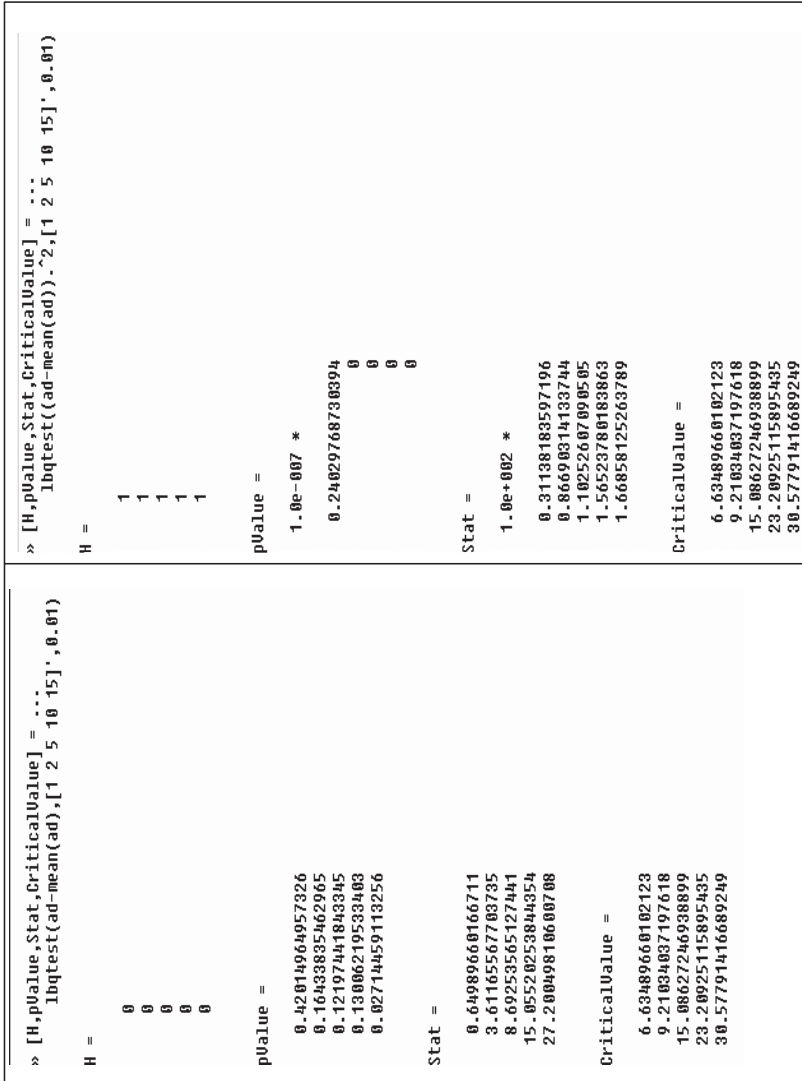
Slika 18.

PRINOSI DIONICA ADRIS GRUPE, KORELOGRAM PRINOSA I KVADRATA PRINOSA,  
TE PARCIJALNA AUTOKORELACIJSKA FUNKCIJA PRINOSA



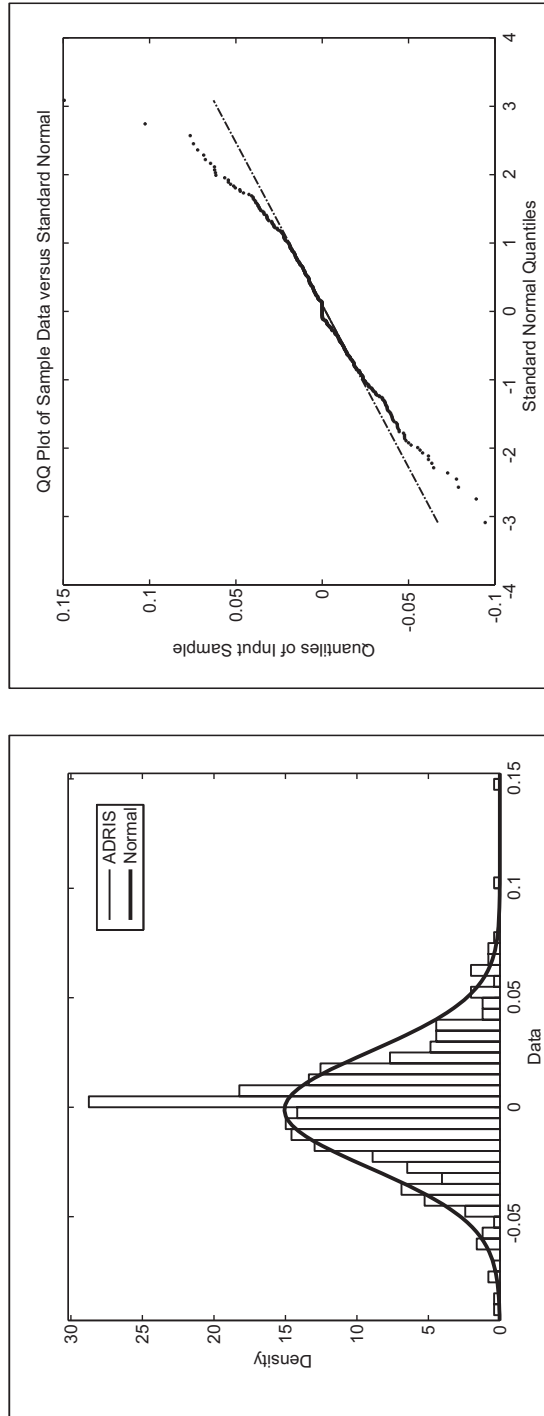
Slika 19.

LJUNG-BOXOV TEST PRINOSA DIONICA ADRIS GRUPE



Slika 20.

HISTOGRAM PRINOSA I  $Q-Q$  DIJAGRAM PRINOSA DIONICA ADRIS GRUPE



Slika 21.

## JARQUE-BERAOV TEST PRINOSA DIONICA ADRIS GRUPE

```

» [H,P,JBSTAT,CU] = jbstest(ad,0.95)
H =
    1
P =
    0
JBSTAT =
    1.761633541282724e+002
CU =
    0.10258658877510

```

### 5. Model za vrednovanje varanata s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala

Varanti se, sa stajališta vrednovanja, ne razlikuju od opcija. Varanti na dionice Hrvatskoga telekoma mogu se poistovjetiti sa *plain vanilla* američkim opcijama poziva. Dakle, ti se varanti mogu vrednovati jednim od modela za vrednovanje američkih opcija kao što su binomna i trinomna stabla, metode konačnih diferencija i Monte Carlo simulacije. Budući da binomna i trinomna stabla i metode konačnih diferencija polaze od pretpostavke normalne distribucije prinosa, što u slučaju dionica Hrvatskog telekoma nije zadovoljeno, jedini je model koji omogućuje vrednovanje američkih opcija uz proizvoljnu distribuciju prinosa model zasnovan na Monte Carlo simulacijama. Dalje, taj model omogućuje i da volatilnost prinosa ne mora biti konstantna, što je također slučaj kod dionica Hrvatskoga telekoma. Uzimajući u obzir navedene pretpostavke da distribucija prinosa nema normalni oblik i da očekivani prinos i varijanca nisu konstantni kroz vrijeme i da se radi o nelikvidnim varantima, pa stoga volatilnost nije moguće procijeniti impliciranom volatilnošću, razvili smo slijedeći model za vrednovanje varanata na dionice Hrvatskoga telekoma:

- Dinamiku vremenskoga niza dnevnih prinosa opisat ćemo GARCH<sup>2</sup> (1,1) modelom. GARCH(1,1) najjednostavniji je GARCH( $p,q$ ) model koji se najčešće primjenjuje u praksi za modeliranje uvjetnoga očekivanja i uvjetne varijance u slučaju postojanja problema heteroskedastičnosti. GARCH(1,1) model dan je izrazom (Arnerić, 2007:22):

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= u_t \sqrt{\sigma_t^2}; \quad u_t \approx i.i.d.(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Pretpostavit ćemo da je  $u_t$  slučajna varijabla standardne  $t$ -distribucije.

Da bi se osigurala nenegativnost i stacionarnost procesa uvjetne varijance, mora vrijediti:

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \alpha_1 + \beta_1 < 1. \quad (2)$$

- Dobiveni parametri GARCH(1,1) modela potom se upotrebljavaju za simuliranje niza putanja cijene dionica Hrvatskoga telekoma. *Pravedna* cijena američke opcije poziva (u svijetu neutralnome na rizik) u trenutku  $t=0$ , izvršne cijene  $K$ , s rokom dospijeca  $T$  prikazana je kao maksimalna vrijednost diskontiranih očekivanih vrijednosti isplate u svakom trenutku  $t \leq T$  s obzirom na mjeru lokalno neutralnu na rizik, uz dostupnost svih informacija do tog trenutka, tj.:

$$c = \max_{t \leq T} \left\{ e^{-rt} \mathbf{E} \left( S_t - K \right)_+ \right\}, \quad (3)$$

- Budući da distribucija  $(S_t - K)_+$  u analitičkoj formi nije poznata, uvjetno očekivanje  $\mathbf{E}$  ne može se eksplicitno izračunati. Stoga je potrebno koristiti se simulacijom za računanje prosječne buduće isplate i potom dobivenu vrijednost iskoristiti kao procjenu očekivane vrijednosti. Aproksimacije dobivene simulacijom nazivaju se Monte Carlo procjenitelji. Kada je broj Monte Carlo ponavljanja  $MC$  dovoljno velik ( $MC \rightarrow \infty$ ), prosječna vrijednost konvergira očekivanju. Očekivane se vrijednosti tada diskontiraju po bezrizičnoj kamatnoj stopi. Vrijednost opcije jednaka je maksimumu skupa elementi kojega su diskontirane očekivane vrijednosti isplata.

---

<sup>2</sup> Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity.

## 6. Model za vrednovanje turbo certifikata s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala

Turbo certifikati sa stajališta vrednovanja mogu se poistovijetiti s europskim *knock-out* opcijama tipa *down-and-out*, pa se uz pretpostavku normalne distribucije prinosa mogu vrednovati analitičkim modelom (Haug, 2007.) ili nekom numeričkom metodom. No, isključivo metoda zasnovana na simulacijama Monte Carlo omogućuje vrednovanje turbo certifikata u slučaju kada prinosi nisu normalno distribuirani i kada varijanca prinosa nije konstanta.

Uzimajući u obzir navedene pretpostavke prema kojima distribucija prinosa nema normalni oblik i očekivani prinos i varijanca nisu konstantne kroz vrijeme, a budući da se radi o nelikvidnim turbo certifikatima, volatilitnost nije moguće procijeniti impliciranom volatilnošću, razvili smo slijedeći model za vrednovanje turbo certifikata na dionice s hrvatskoga tržišta kapitala:

- Dinamiku vremenskoga niza dnevnih prinosa opisat ćemo GARCH(1,1) modelom kao i u slučaju vrednovanja varanata s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala.
- Dobiveni parametri GARCH(1,1) modela potom se upotrebljavaju za simuliranje niza putanja cijene dionica. Pravedna cijena europske *down-and-out* opcije poziva (u svijetu neutralnome na rizik) u trenutku  $t=0$ , izvršne cijene  $K$ , barijerne cijene  $H$ , s rokom dospijeca  $T$  može se prikazati izrazom:

$$C = e^{-rT} \mathbf{E} \begin{cases} S_T - K; & S_t > H \ (\forall t \leq T) \\ 0; & S_t \leq H \text{ za neki } t \leq T \end{cases} \quad (4)$$

- Budući da distribucija funkcije iz izraza (4) u analitičkoj formi nije poznata, uvjetno očekivanje  $\mathbf{E}$  ne može se eksplicitno izračunati. Stoga se koriste simulacijama za računanje prosječne buduće isplate i potom se dobivenom vrijednošću koristi kao procjenom očekivane vrijednosti. Vrijednost turbo certifikata očekivana je vrijednost isplate diskontirana po bezrizičnoj kamatnoj stopi.

## 7. Primjena razvijenoga modela

Razvijeni model pretočili smo u programski kod u MATLAB-u, pa smo razvijenim modelima vrednovali varante i turbo certifikate s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala. Za bezrizičnu kamatnu stopu uzeta je kamatna

stopa na trezorske zapise s dospijecem 91 dan (6.25%), 181 dan (6.20%) ili 364 dana (6.20%), ovisno o roku dospijeca izvedenice, s aukcije 10. studenog 2009.

Uvedimo slijedeće oznake za izvedenice temeljni podaci kojih su prikazani na slikama u odlomku 3: varant sa slika 1. - varant 1; varant sa slike 3. - varant 2; turbo certifikat sa slike 2. - turbo certifikat 1; turbo certifikat sa slike 4. - turbo certifikat 2; turbo certifikat sa slike 5. - turbo certifikat 3; turbo certifikat sa slike 6. - turbo certifikat 4.

Prvo smo GARCH(1,1) procesom modelirali uvjetno očekivanje i uvjetnu varijancu prinosa. Za uvjetno očekivanje i uvjetnu varijancu prinosa dionica Hrvatskoga telekoma dobili smo slijedeći GARCH(1,1) proces:

$$r_t = -0.0002972 + \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = 0.000035219 + 0.050294\varepsilon_{t-1}^2 + 0.74971\sigma_{t-1}^2,$$

a za dionice INE dobili smo:

$$r_t = -0.00057911 + \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = 0.000001515 + 0.35938\varepsilon_{t-1}^2 + 0.44063\sigma_{t-1}^2,$$

i za dionice Adris Grupe:

$$r_t = -0.00090124 + \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = 0.00012414 + 0.18933\varepsilon_{t-1}^2 + 0.61067\sigma_{t-1}^2.$$

Za svaku dionicu simulirali smo 10000 putanja cijena temeljne imovine pretpostavljajući da uvjetno očekivanje i uvjetna varijanca prinosa slijede prikazani GARCH(1,1) proces. Početna je cijena svake putanje trenutna cijena na tržištu promatranih dionica. Nakon toga smo koristeći se relacijama (3), ili (4) izračunali cijene varanata i turbo certifikata.

Vrijednosti promatranih izvedenica dobivenih razvijenim modelom dane su u tablici 2. Dobivene vrijednosti usporedit ćemo s vrijednostima dobivenima primjenom klasičnih binomnih stabala koja se zasnivaju na pretpostavci konstantne volatlnosti i normalne distribucije prinosa.

U prvome stupcu tablice prikazani su rezultati razvijenoga modela zasnovani na povijesnim podacima cijena dionica kao u odlomku 4. U drugom stupcu prikazani su rezultati razvijenoga modela zasnovani na nešto kraćem vremenskom razdoblju koje ne uključuje razdoblje najdublje financijske krize i koje više iskazuje očekivanje autora. U trećem su stupcu dani rezultati dobiveni binomnim modelom koji se zasnivaju na istim povijesnim podacima kao i u prvome

stupcu. Varijanca prinosa procijenjena je iz povijesnih podataka cijena (pogledati u Aljinović, Z., Marasović B., Šego B., 2011.).

*Tablica 2.*

VRIJEDNOSTI IZVEDENICA DOBIVENE MONTE CARLO  
SIMULACIJAMA I BINOMNIM MODELOM

Izvedenice	Monte Carlo simulacije GARCH procesa 1	Monte Carlo simulacije GARCH procesa 2	Binomni model	Bid	Ask
varant 1	0.72	0.96	0.63	0.70	0.75
varant 2	1.38	1.61	1.12	1.14	1.19
turbo certifikat 3	0.75	1.23	1.08	1.07	1.18
turbo certifikat 2	1.59	1.65	1.63	1.67	1.77
turbo certifikat 1	11.09	12.63	12.26	12.66	13.66
turbo certifikat 4	1.96	2.28	2.26	2.26	2.51

Iz dobivenih rezultata možemo uočiti da su vrijednosti varanata dobivenih razvijenim modelom veće od vrijednosti dobivenih binomnim modelom. Razlog je tome to što razvijeni model polazi od pretpostavke Studentove distribucije prinosa koja daje veću vjerojatnost ekstremnim događajima od normalne distribucije. Budući da je gubitak varanta poziva ograničen, a uzimajući u obzir da je u ovome slučaju vjerojatnost ekstremno velikih prinosa veća i vrijednost varanata vrednovanih ovim modelom bit će veća od vrijednosti dobivenih binomnim modelom uz pretpostavku normalne distribucije prinosa.

Ako usporedimo vrijednosti turbo certifikata, koje su dobivene na osnovi istih ulaznih podataka (prvi i treći stupac u tablici 2.), možemo uočiti da su dobivene vrijednosti razvijenim modelom uglavnom manje od vrijednosti dobivenih binomnim modelom. Razlog je tome opet u pretpostavci Studentove distribucije prinosa koja daje veću vjerojatnost ekstremnim događajima od normalne distribucije. Uz pretpostavku Studentove distribucije veća je i vjerojatnost da će turbo certifikat završiti u knock-outu, pa je zbog toga i vrijednost turbo certifikata manja.

Iako su cijene u drugom stupcu, po mišljenju autora, najreprezentativnije zato što su zasnovane na povijesnim podacima koji ne uključuju razdoblje najdublje financijske krize i zato što su modelirane razvijenim modelom koji preciznije modelira stohastički proces kretanja cijena dionica s hrvatskoga tržišta kapitala, možemo uočiti da se tržišne cijene varanata razlikuju od onih dobivenih razvije-



nim modelom. Razlog je za to jednim dijelom činjenica da su promatrane opcije slabo likvidne, pa *bid* i *ask* cijene određuje *market maker* koji im uglavnom zadaje vrijednost nešto veću od one dobivene standardnim softverskim alatima koji se mogu naći na velikom broju web stranica burzi, a koji u osnovi imaju ili binomni ili Black-Scholes model.

## 8. Zaključna razmatranja

“Uz pomoć izvedenica može se dobiti gotovo svaki obrazac isplate koji netko može zamisliti. Ako ga se može grafički prikazati na papiru ili riječima opisati, vjerojatno će netko moći dizajnirati takvu izvedenicu koja ima takve isplate.”<sup>3</sup> Prethodno navedenu tvrdnju izrekao je Fisher Black koji je uz Myrona Scholesa tvorac prvoga modela za vrednovanje opcija predstavljenoga godine 1973. U ovoj je izjavi sažeta sva moć i praktična vrijednost koju opcije kao financijski instrument posjeduju. Činjenica da je za opcije korijeni koje sežu duboko u povijest, još u doba antike, tek godine 1973. razvijen model koji omogućuje njihovo vrednovanje, jasno ukazuje na kompleksnost modela koja je uz dubinu promišljanja njegovih tvoraca zahtijevala i dosezanje određenoga stupnja razvitka i drugih znanstvenih disciplina - poput matematike i informatičke tehnologije.

Trgovanje opcijama bez modela za njihovo vrednovanje jednako je pokušaju trgovanja grumenima zlata bez vage, pa je zato Black-Scholesov model postao sastavni dio mnogih udžbenika iz financija i on predstavlja polazište za razvitak financijskoga inženjeringa. No, priča o vrednovanju opcija nije još završena i dugo će se nastaviti, sudeći po broju opcija koje se svakim danom pojavljuju na tržištu kao i interesu investitora za trgovanje njima. Zbog razvitka i širenja tržišta kreiraju se nove opcije, a time i novi modeli za njihovo vrednovanje. Dalje, i karakteristike samoga tržišta, tj. temeljne imovine imaju za posljedicu razvijanja novih modela koji polaze od pretpostavki koje vjernije opisuju stanje na tržištu.

Mozaik istraživanja iz ovoga područja još uvijek obiluje prazninama i ovim su se radom neke od tih praznina pokušale popuniti. Tako su sistematizirajući znanja o dosadašnjim razvijenim modelima za vrednovanje opcija autori razvili metodologiju koja može biti polazište za dalja istraživanja kako na hrvatskome, tako i na globalnome tržištu kapitala. U ovome se radu autori usredotočuju i na izvedenice s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala. Analizirajući temeljnu imovinu s hrvatskoga tržišta kapitala pokazalo se da distribucije prino-

---

<sup>3</sup> With derivatives you can have almost any payoff pattern you want. If you can draw it on paper, or describe it in words, someone can design a derivative that gives you that payoff.

sa nemaju normalni oblik i da postoji značajna autokorelacija među prinosom i kvadratom prinosa, što upućuje na zaključak da očekivani prinos i varijanca nisu konstantni. Zbog toga se nameće zaključak da se za vrednovanje izvedenica s temeljnom imovinom s hrvatskoga tržišta kapitala moraju primijeniti isključivo modeli koji se ne zasnivaju na normalnoj distribuciji prinosa i konstantnoj volatilnosti. Stoga se razvijeni modeli u ovome radu zasnivaju na Monte Carlo simulacijama i GARCH procesima. U razvijenom su modelu uvjetno očekivanje prinosa i uvjetna varijanca prinosa modelirani GARCH(1,1) procesom, a cijene varanata i turbo certifikata određene su Monte Carlo simulacijama. Prednost je razvijenih modela u preciznijem modeliranju stohastičkoga procesa kretanja cijena temeljne imovine s hrvatskoga tržišta kapitala, a to pridonosi da konačna vrijednost opcije dobivena modelom bude što realnija.

Na kraju naglasimo da se važnost razvijenih modela očituje i u njihovoj fleksibilnosti i mogućnosti primjene za vrednovanje različitih tipova izvedenica koje možemo očekivati u skorij budućnosti na europskim i svjetskim burzama s rastom hrvatskoga tržišta kapitala.

## LITERATURA

- Achdou, Y., Pironneau O. (2005.). *Computational Methods for Option Pricing*. Philadelphia: SIAM.
- Da Silva, A. F. C. (2006.). The Trinomial Option Pricing Model: an improvement over the binomial lattice?. F&E Articles Published  
<http://202.131.96.59:8080/dspace/bitstream/123456789/100/1/the+trinomial+option+pricing+model+An+Improvement+Over+the%E2%80%A6.pdf>
- Aljinović, Z., B. Marasović, B. Šego (2011.). *Financijsko modeliranje*. Split: Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu.
- Anderson, P. L. (2004.). *Business Economics and Finance with MATLAB, GIS, and Simulation Models*. Michigan: Chapman&Hall/CRC, MATLAB & Simulink Based Books.
- Arnerić, J (2007.). *Ekonometrijsko modeliranje rizika na hrvatskom tržištu kapitala*, magistarski rad. Zagreb: Ekonomski fakultet-Zagreb
- Barone-Adesi, G., Whaley R. E. (1987.). ‘Efficient Analytic Approximation of American Option Values’, *Journal of Finance*, (42), 2: 301-320.
- Bates, D. S. (1991.). ‘The Crash of ’87: Was it Expected? The Evidence from Option Markets’, *Journal of Finance*, 46(3): 1009-1044.

- Beneder, R., Vorst T. (2001.). "Options on Dividend Paying Stocks". *Proceedings of the International Conference on Mathematical Finance*. Word Scientific Publishing Company, Singapore.
- Benninga, S. (2000.). *Financial modeling (with a section on Visual Basic for Applications by Benjamin Czaczkes)*. Massachusetts: The MIT Press.
- Bjerkstrand, P., Stensland G. (1993.). "Closed-Form Approximation of American Options", *Scandinavian Journal of Management*, 9: 87-99.
- Bjerkstrand, P., Stensland G. (2002.). "Closed-Form Valuation of American Options". Working paper, dostupno na <http://www.nhh.no/>
- Black, F., Scholes M. (1973.). "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81:637-659.
- Black, F. (1976.). "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics*, 3, 167-179.
- Boyle, P. P. (1977.). "Options A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 4: 323-338.
- Boyle, P.P. (1986.). "Option Valuation Using a Three Jump Process", *International Options Journal*, 3, 7-12.
- Boyle, P. P. (1988.). "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (23), 1: 1-12.
- Boyle, P.P., M. Broadie, P. Glasserman (1997). "Monte Carlo Methods for Security Pricing", *Journal of Economics Dynamics and Control*, 21: 1257-1321.
- Brandimarte, P. (2002.). *Numerical methods in finance (A MATLAB – Based Introduction)*. New York: J. Wiley & Sons.
- Brennan, M. J., Schwartz E. S. (1978.). "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (13), 3: 461-474.
- Broadie, M., Glasserman P. (1997.). "Pricing American Style Securities Using Simulation", *Journal of Economics Dynamics and Control*, 21: 1323-1352.
- Cheuk, T. H. F., Vorst T. C. (1996.). "Complex Barrier Options", *Journal of Derivatives*, 4: 8-22.
- Chriss, N. A. (1997.). *Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models*. New York: McGraw Hill.
- Cox, J. C., Ross S. (1976.). "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 7: 229-263.
- Cox, J. C., Ross S., Rubinstein M. (1979.). "Option pricing: a simplified approach", *Journal of Financial Economics*, 7:229-263.

- Cvitanić, J., Zapatero F. (2004.): *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*. Massachusetts: The MIT Press.
- Dai, M. (2000). "A modified binomial tree method for currency lookback options", *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 16: 445–454.
- Derman, E., Kani I., Chriss N. (1996.). "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile", *Journal of Derivatives*, 3(4): 7-22.
- Duan, J. C. (1995.). "The GARCH Option Pricing Model", *Mathematical Finance*, (5), 1, 13-32.
- Duffy, D. J. (2006.). *Finite Difference Method in Financial Engineering*. New York: John Wiley & Sons.
- Dupire, B. (1994.). "Pricing With a Smile". *Risk Magazin*, (7), 1: 18-20
- Esser, A. (2003.). "General Valuation Principles for Arbitrary Payoffs and Applications to Power Options Under Stochastic Volatility", *Financial Markets and Portfolio Management*, (17), 3: 351-372
- Garman, M., Kohlhagen S. W. (1983.). "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance*, 2: 231-237.
- Gatheral, J. (2006.). *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. New York: John Wiley & Sons.
- Gibson, R. (1991.). *Option Valuation, Analyzing and Pricing Standardized Option Contracts*. New York: McGraw-Hill.
- Hagan, P. S., Woodward D. (1999.). "Equivalent Black Volatilities". *Applied Mathematical Finance*, 6:113-129.
- Handley, J. C. (2001.). "Variable Purchase Options", *Review of Derivatives Research*, 4:219:230.
- Haug, E. G. (2001.). "Closed-Form Valuation of American Barrier Options", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, XIX, 175-192.
- Haug, E. G. (2007.). *The complete guide to option pricing formulas*. New-York: McGraw-Hill.
- Haug, E. G., Haug J. (2001.). "Resetting Strikes, Barriers and Time", [www.wilmott.com](http://www.wilmott.com)
- Horasali, M. (2007.). "A comparison of lattice based option pricing models on the rate of convergence", *Applied Mathematics and Computation*, 184(2): 649-658.
- Hull, J., White A. (1987.). "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, XLII(2): 281-300.
- Hull, J., White A. (1988.). "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 (3): 237-251.

- Hull, J., White A. (1990.). "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25(1): 87-100.
- Hull, J. C. (2006.). *Options, Futures, and Other Derivatives*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Jackson, M., Staunton M. (2006.). *Advanced modelling in finance using Excel and VBA*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- James, P. (2003.). *Option Theory*. New York: John Wiley & Sons.
- Jarrow, R., Rudd A. (1982.). "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Process", *Journal of Financial Economics*, 10:347-369.
- Korn, R., Korn E. (2001.). *Option Pricing and Portfolio Optimization - Modern Method of Financial Mathematics*. American Mathematical Society.
- Leisen, D. P. J., Reimer M. (1996.). "Binomial Model for Option Valuation Examining and Improving Convergence", *Applied Mathematical Finance*, 3: 319-346.
- Merton, R. C. (1973.). "Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, (4), 1: 141-183.
- Merton, R. C. (1976.). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3: 125-144.
- Orsag, S. (2006.). *Izvedenice*. HUFA, Zagreb
- Posedel, P. (2006.). "Analiza tečaja i vrednovanje opcija na tečaj na hrvatskom tržištu: NGARCH model kao alternativa modela Black-Scholesa", *Financijska teorija i praksa*, 30 (4): 345-367.
- Prohaska, Z. (1994.). *Upravljanje vrijednosnim papirima*. Zagreb: Poslovna knjiga, Infoinvest.
- Rendleman, R. J., Bartter B. J. (1979). "Two-State Option Pricing", *Journal of Finance*, 34: 1093-1110.
- Ritchken, P. (1995.). "On Pricing Barrier Options", *Journal of Derivatives*, 3: 19-28.
- Rubinstein, M. (1991.). "Options for the Undecided", *Risk Magazine* 4(4).
- Rubinstein, M. (1994.). "Implied Binomial Trees", *Journal of Finance*, 49: 771-818.
- Rubinstein, M. (1998.). "Edgeworth Binomial Trees", *Journal of Derivatives*, XIX, 20-27.
- Tian, Y. S. (1993.). "A modified lattice approach to option pricing", *Futures Markets*, 13:563-577.
- Tian, Y. S. (1999.). "A flexible binomial option pricing model", *Futures Markets*, 19:817-843.

- Shaw, W. (1998.). *Modelling Financial Derivatives*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Shilling, H. (2002.). No-Arbitrage Bounds and Static Hedging, Speculation and Valuation”, *The Journals of Futures Market*, 14 (2):183-213.
- Šego, B. (2008.). *Financijska matematika*. Zagreb: Zgombić & Partneri

## OSTALI IZVORI

- Bečka burza - <http://www.wienerbourse.at/> [6. 11. 2009.]
- <http://www.euronext.com/editorial/wide/editorial-2645-EN.html> [5. 10. 2009]
- Yahoo! Finance - <http://finance.yahoo.com/> [20.11. 2009.]
- Stuttgart Bourse - <https://www.boerse-stuttgart.de/> [ 6. 11. 2009.]
- Zagrebačka burza - <http://zse.hr/default.aspx?id=26> [1. 10. 2009.]
- Zakon o tržištu kapitala - <http://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/340411.html> [9.9. 2009.]
- Erste Group Bank AG - <http://produkte.erstegroup.com/Retail/en/> [6. 11. 2009.]

## MODEL FOR WARRANTS AND TURBO CERTIFICATES PRICING WITH UNDERLYING ASSETS FROM THE CROATIAN CAPITAL MARKET

### Summary

Despite the fact that derivatives are not traded on the Zagreb Stock Exchange, it is important to note that warrants and turbo certificates, which have for underlying assets Croatian stocks and Croatian stock market index CROBEX, are quoted on the European capital markets. The question is how to value these securities? For efficient pricing of derivatives, financial experts must have detailed knowledge of the properties of derivatives, underlying assets and the models and the numerical methods for their pricing.

The warrants and turbo-certificates which are quoted on the European stock exchanges with regard to pricing have properties of options. So far, more than sixty models for pricing different types of options have been developed and it often happens that financial experts apply inappropriate mathematical tools for pricing options. Therefore, the aim of this paper is to present a methodology which financial experts have to apply for option pricing and the application of the developed model, based on the presented methodology, for pricing warrants and turbo certificates which have underlying assets from the Croatian capital market.

Key words: warrants, turbo certificates, pricing, Monte Carlo simulation