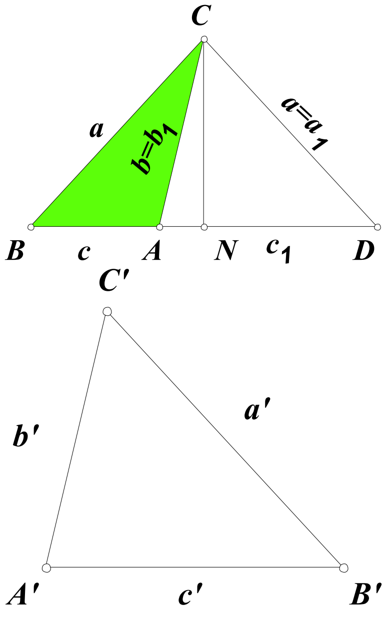
Pet rješenja geometrijskog zadatka

Mnogi zadaci iz geometrije mogu se rješavati na razne načine, što ćemo u ovom članku pokazati. Na državnom natjecanju[1] dan je sljedeći zadatak iz geometrije:

Ako za trokute s duljinama stranica a, b, i c i a', b' i c' te nasuprotnim kutovima α, β, γ i α', β', γ' vrijede jednakosti $\alpha + \alpha' = \pi$, $\beta = \beta'$ dokažite da vrijedi i jednakost $a \cdot a' = b \cdot b' + c \cdot c'$.

Posebnost ovog zadatka je to što ima čak 5 rješenja. 4 rješenja su s natjecanja dok je peto rješenje dodalo uredništvo. Zanimljivo je da su skoro svi natjecatelji koji su riješili ovaj zadatak nagrađeni. Navodimo njihova imena.

Rješenje 1. Službeno rješenje:
Zadan je trokut ABC. Produžimo stranicu BA do točke D tako da je $\angle ADC = \beta$ i $b_1 = b$. Trokut



BCD je jednakokračan pa je $a_1 = a$ i $c_1 = d(A, D)$. Uočimo visinu $\overline{CN}$ na osnovku $\overline{BD}$. Primijetimo da je $d(N, D) = \frac{1}{2}(c + c_1)$ i $d(A, N) = \frac{1}{2}(c_1 - c)$. Po Pitagorinom poučku vrijedi

$$|CN|^2 = a^2 - |ND|^2 = a^2 - \left(\frac{c_1 + c}{2}\right)^2,$$

$$|CN|^2 = b^2 - |AN|^2 = b^2 - \left(\frac{c_1 - c}{2}\right)^2.$$

Oduzimanjem dobivamo

$$a^2 = b^2 + cc_1,$$

[1]Uredništvo ovom prilikom zahvaljuje profesorici *Mireli Kurnik* što nam je dala na uvid rješenja s državnog natjecanja.

što je u ovom slučaju jednako

$$a \cdot a_1 = b \cdot b_1 + c \cdot c_1.$$

Uzmimo neki trokut $A'B'C'$ koji zadovoljava uvjete zadatka.

Za njega vrijedi da je $\triangle ADC \sim \triangle A'B'C'$ (jer je $\angle CAD = \angle C'A'B' = \pi - \alpha$, $\angle ADC = \angle A'B'C' = \beta$). Onda slijedi

$$\frac{a'}{a_1} = \frac{b'}{b_1} = \frac{c'}{c_1} = k,$$

odnosno

$$a_1 = \frac{a'}{k}, \quad b_1 = \frac{b'}{k}, \quad c_1 = \frac{c'}{k}.$$

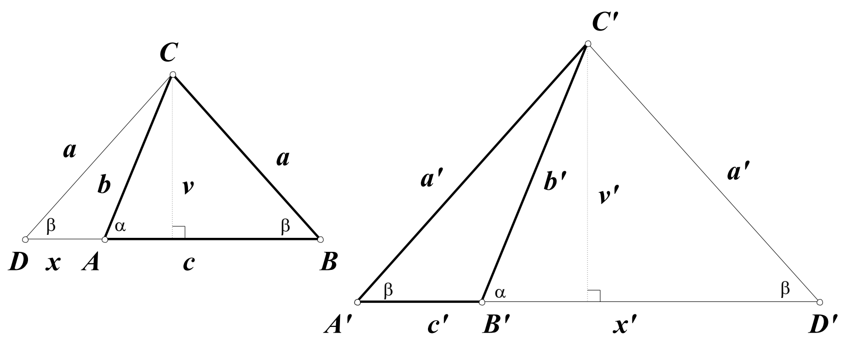
To nas dovodi do

$$a \cdot \frac{a'}{k} = b \cdot \frac{b'}{k} + c \cdot \frac{c'}{k},$$

odnosno

$$a \cdot a' = b \cdot b' + c \cdot c'.$$

Rješenje 2. Nadopunimo trokut ABC do točke D. Tada je $\triangle A'B'C' \sim \triangle ADC$. Vrijedi



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{x}{c'} \quad (*)$$

Nadopunimo trokut $A'B'C'$ do točke D' (kao na slici) i tada je $\triangle A'D'C' \sim \triangle ABC$. Sad je

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{x'} = \frac{v}{v'}.$$

Iz (*) i gornjeg izraza slijedi da je

$$cc' = xx',$$
$$ab' = a'b,$$
$$bv' = vb'$$
$$av' = va'.$$

Nazovimo gornje rezultate (**). Dobivamo

$$\frac{1}{2}|BD| = \sqrt{a^2 - v^2} \Rightarrow x = |BD| - c = 2\sqrt{a^2 - v^2} - c = 2\sqrt{a^2 - v^2} - (\sqrt{a^2 - v^2} + \sqrt{b^2 - v^2}) =$$

$$= \sqrt{a^2 - v^2} - \sqrt{b^2 - v^2}$$

$$\frac{1}{2}|B'D'| = \sqrt{a'^2 - v'^2} \Rightarrow x' = |B'D'| - c' = 2\sqrt{a'^2 - v'^2} - (\sqrt{a'^2 - v^2} - \sqrt{b'^2 - v'^2}) =$$

$$= \sqrt{a'^2 - v'^2} + \sqrt{b'^2 - v'^2}$$

$$cc' = xx' = (\sqrt{a^2 - v^2} - \sqrt{b^2 - v^2})(\sqrt{a'^2 - v'^2} + \sqrt{b'^2 - v'^2}) =$$

$$= \sqrt{a^2a'^2 - a^2v'^2 - v^2a'^2 + v^2v'^2} + \sqrt{a^2b'^2 - a^2v'^2 - v^2b'^2 + v^2v'^2} -$$

$$-\sqrt{b^2a'^2 - b^2v'^2 - v^2a'^2 + v^2v'^2} - \sqrt{b^2b'^2 - b^2v'^2 - v^2b'^2 + v^2v'^2}. \quad (***)$$

Primijetimo da iz (**) slijedi da je

$$cc' = \sqrt{a^2b'^2 - a^2v'^2 - v^2b'^2 + v^2v'^2} = \sqrt{b^2a'^2 - b^2v'^2 - v^2a'^2 + v^2v'^2},$$

$$(a'v)^2 = (av')^2 = av' \cdot av' = av' \cdot va' = aa'vv',$$

$$(bv')^2 = (b'v)^2 = bb'vv',$$

iz čega slijedi da je izraz (***) zapravo jednak

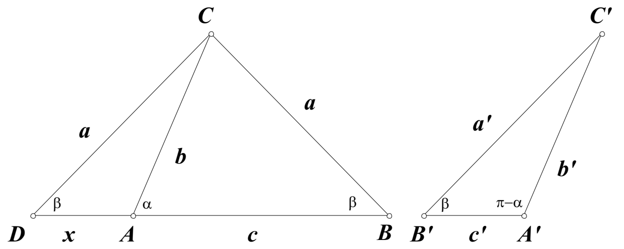
$$\sqrt{(aa')^2 - 2aa'vv' + (vv')^2} - \sqrt{(bb')^2 - 2bb'vv' + (vv')^2} = |aa' - vv'| - |bb' - vv'| =$$

$$= (aa' - vv') - (bb' - vv') = aa' - bb'.$$

Time smo došli do $aa' = bb' + cc'$.

Dijana Kreso

Rješenje 3. Nadopunimo trokut ABC kao na slici.



Vrijedi $\triangle DAC \sim \triangle B'A'C'$, što znači da vrijedi

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b. \quad (*)$$

Po poučku o kosinusima vrijedi

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

$$(b')^2 = (a')^2 + (c')^2 - 2a'c'\cos\beta.$$

Kada izvučemo $\cos\beta$ iz oba gornja izraza dobijemo da vrijedi

$$\frac{(a')^2 + (c')^2 - (b')^2}{2a'c'} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Dobivamo izraz

$$(a'^2 + c'^2 - b'^2) \cdot ac = (a^2 + c^2 - b^2) \cdot a'c',$$

koji ćemo malo srediti

$$a'^2ac + c'^2ac - b'^2ac = a^2a'c' + c^2a'c' - b^2a'c',$$

$$b^2a'c' - b'^2ac = c^2a'c' - c'^2ac + a^2a'c' - a'^2ac,$$

$$b \cdot (ba') \cdot c' - b' \cdot (b'a) \cdot c = ca'(cc' - aa') + ac'(cc' - aa').$$

Iskoristimo (*) i u prvom dijelu našeg izraza sredimo zagrade, tako da dobivamo

$$b \cdot (b'a) \cdot c' - b' \cdot (ba') \cdot c = (aa' - cc')(ac' - ca'),$$

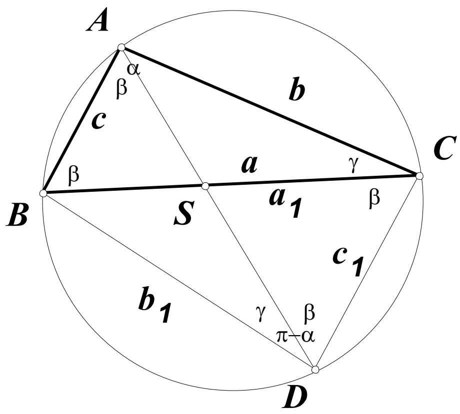
$$bb'(ac' - a'c) = (aa' - cc')(ac' - ca'),$$

$$(aa' - bb' - cc')(ac' - ca') = 0.$$

1° Ako je $ac' - ca' = 0$, onda je $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, što znači da je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Znači $\alpha = \pi - \alpha$, dakle tada bi trokuti bili pravokutni($\alpha = \pi/2$) i vrijedilo bi $a^2 = b^2 + c^2$. Kako bi onda koeficijent sličnosti bio neki k, to bi značilo da bi taj izraz bio ekvivalentan s $a \cdot ka' = b \cdot kb' + c \cdot kc'$, što bi poslije dijeljenja s k bio upravo $aa' = bb' + cc'$.
2° Ako je $ac' - ca' \neq 0$ onda da bi dobiveni izraz bio 0 mora vrijediti $aa' = bb' + cc'$.

Nastasija Grubić

Rješenje 4. Oko danog trokuta ABC opišimo kružnicu. Pri vrhu C konstruirajmo kut β. Budući



da je četverokut $ABCD$ tetivan vrijedi da je $\angle BAC + \angle CDB = \pi$. Iz toga slijedi da je $\triangle DCB \sim \triangle A'B'C'$ ($\angle BCD = \beta = \beta'$ i $\angle BDC = \pi - \alpha = \alpha'$). Neka je $|BC| = a = a_1$. Iz sličnosti slijedi

$$\frac{a_1}{a'} = \frac{b_1}{b'} = \frac{c_1}{c'} = k. \quad (*)$$

Zbog toga što su kutovi nad istom tetivom vrijedi

$$\angle BDA = \angle BCA = \gamma,$$

$$\angle ABC = \angle ADC = \beta,$$

$$\angle DAB = \angle BCD = \beta.$$

Slijedi da su trokuti DSC i ASB jednakokračni te dobivamo $|AD| = |BC| = a_1$. Iskoristimo Ptolomejev poučak za tetivne četverokute,

$$|AD||BC| = |AB||CD| + |AC||BD|,$$

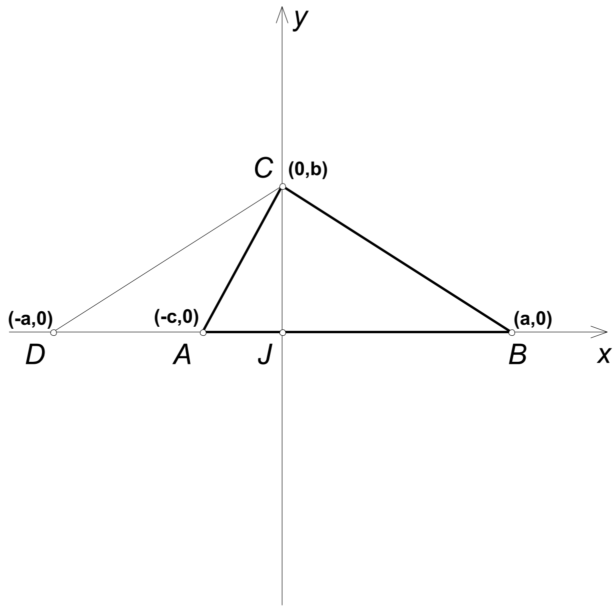
$$aa_1 = bb_1 + cc_1,$$

$$(*) \Rightarrow aka' = bkb' + ckc',$$

$$aa' = bb' + cc'.$$

Matija Bašić i *Tvrtko Tadić*

Rješenje 5. Produljimo trokut ABC do točke D po pravcu AB do jednakokračnog trokuta. Uvrstimo taj trokut u koordinatni sustav. Pridružimo točkama A, B, C, i D sljedeće koordinate



$(-c, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$ i $(-a, 0)$, gdje je $-c \in [-a, a]$. Koristeći formulu za udaljenost točaka u koordinatnom sustavu dobivamo da je

$$|AB| = a + c,$$

$$|CD| = |BC| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$|CA| = \sqrt{b^2 + c^2},$$

$$|AD| = a - c.$$

Znamo da je $\triangle DAC \sim \triangle B'A'C'$. Iz toga slijedi

$$aa' = |BC||B'C'| = |BC| \cdot k|CD| = \sqrt{a^2 + b^2}k\sqrt{a^2 + b^2} = k(a^2 + b^2),$$

$$bb' = |AC||A'C'| = |AC| \cdot k|AC| = \sqrt{b^2 + c^2}k\sqrt{b^2 + c^2} = k(b^2 + c^2),$$

$$cc' = |AB||A'B'| = |AB| \cdot k|AD| = (a + c)k(a - c) = k(a^2 - c^2).$$

Primijetimo da je

$$aa' = k(a^2 + b^2) = k(b^2 + c^2) + k(a^2 - c^2) = bb' + cc'.$$

Uredništvo