Logika dokazivanja

Tvrtko Tadić

Cilj ovoga članka je upoznavanje s korištenjem logike (one matematičke) u dokazivanju. Ovdje su neke stvari skraćene, ali autor se nada da će dati barem djelomičan uvid u proces dokazivanja.

Uvod

Kao i u svakoj logici, tako i u matematičkoj postoje izjave koje su ili lažne ili istinite. A postoje jasno i izjave koje su sastavljene od više izjava. Učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije imaju tu sreću da u 1. razredu iz informatike uče operatore "ili"[1] i "i". Oni se zamjenjuju znakovima "+" i "·". Onda se uče sljedeće tablice koje definiraju te operatore:

A	B	$A+B$	$A \cdot B$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

gdje A i B predstavljaju neku izjavu, a 1 i 0 istinu odnosno laž. Pogledajmo nekoliko primjera takvih izjava:

$$A = \text{Dubrovnik je u Hrvatskoj}$$
$$B = \text{Pariz je u Austriji}$$
$$A \wedge B = \text{Dubrovnik je u Hrvatskoj i Pariz je u Austriji.} \quad (1)$$
$$A \vee B = \text{Dubrovnik je u Hrvatskoj ili Pariz je u Austriji.} \quad (2)$$

Očito je da je izjava (1) lažna, dok je (2) istinita. Evo jednog primjera iz matematike:

$$x \in A \vee x \notin A$$

Gornja izjava je točna jer svi iz iskustva znamo da nešto ili jest ili nije. Također smo učili negacije koje su se pojavljivale u obliku $\overline{A}$ [2], koje samo zamjenjuju laž u istinu i obratno. Tako vrijedi sljedeća tablica

A	$\neg A$
0	1
1	0

i sljedeće negacije

$$\neg(A \in B) = A \notin B$$
$$\neg(a < b) = a \geq b$$

Učili smo i De Morganove formule:

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

i

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B,$$

koje se lako dokazuju pomoću tablica istinitosti. I baš kad smo bili na dobrom putu da uđemo dublje u matematičku logiku, tu je sve stalo. Jer za informatiku je bilo dovoljno da znamo što je operator `or` i operator `and`. No krenimo mi dalje.

[1] Mnogi autori dopuštaju slobodu izbora operatora, pa će autor ovoga članka za "i" i "ili" koristiti znakove $\wedge$ i $\vee$.
[2] Autor će za negaciju koristiti znak $\neg$

Operatori $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$

U matematici često kažemo da nešto iz nečeg slijedi. Što to zapravo znači? To je uvjetna složena rečenica.

Ako A, onda B.

što označavamo kao

$$A \Rightarrow B,$$

odnosno iz A slijedi B. Da bi ova izjava bila točna, u slučaju kad bi A bilo istinito i B mora biti istinito. Matematičari su ovaj operator opisali tablicom istinitosti, ali kako bi čitateljstvu bilo jasnije prvo ćemo dati nekoliko izjava:

$A =$ Imat ću novca.

$B =$ Kupit ću auto.

$A \Rightarrow B =$ Ako budem imato novca, kupit ću auto.

Primijetimo da ako je A točan, onda ja svakako kupujem auto; ako ga ne kupim gornja izjava je lažna. Ako nemam novca, ništa me ne sprječava da kupim auto i bez novca (na kredit, recimo), a ne moram ga kupiti i opet će gornja izjava vrijediti. Znači uvijek vrijedi

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Uvjeren sam da mnoge zbunjuje operator *ako*. Jesam li se ja gornjom izjavom obvezao da ću kupiti auto samo ako budem imao novca? Nisam. Za to se upotrebljava druga vrsta izjave, a to je *ako i samo ako* (što se kraće piše *akko*) koji se često pojavljuje u zbirkama i jako zbunjuje učenike. To je naš drugi operator $\Leftrightarrow$:

Ako i samo ako A, onda B.

što pišemo

$$A \Leftrightarrow B.$$

Pogledajmo ponovno gornji primjer

$A \Leftrightarrow B =$ Ako i samo ako budem imao novca kupit ću auto.

Ako ne budem imao novca, hoću li smjeti kupiti auto? Ne. Ako budem imao novca, hoću li moći izbjeći obvezu kupnje auto? Ne. Ako kupim auto, hoću li imati novca, a da gornja izjava bude točna? Da. Pogledajmo tablicu istinitosti za ovaj operator:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

U matematici prilikom dokazivanja često koristimo operator $\Leftrightarrow$ za ekvivalenciju, odnosno da su dvije izjave jednako vrijedne. To nam označava da obje izjave vrijede u isto vrijeme npr.

$$(a - b = c) \Leftrightarrow (a = b + c)$$

što je svima jasno da vrijedi. Zašto se kaže da se kad u zadatku imamo *ako i samo ako* jednom krećemo od početka, a drugi put od kraja? Zato jer vrijedi:

$$(A \Leftrightarrow B) = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Za one koji se žele u to uvjeriti, evo tabličnog prikaza.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Kvantifikatori

U matematičkoj i u klasičnoj logici često se pojavljuju kvantifikatori. Oni označavaju količinu, npr.

Neki prirodni brojevi su parni.

Svi racionalni brojevi su realni.

To bi prevedeno na jezik matematike glasilo

$$(\exists n \in \mathbb{N})(2|n)$$

$$(\forall a \in \mathbb{Q})(a \in \mathbb{R})$$

Čitamo:
Postoji barem jedan broj n u skupu $\mathbb{N}$ takav da je n djeljiv s 2.
Za svaki $a \in \mathbb{Q}$ vrijedi da je $a \in \mathbb{R}$.
Iz prikazanog se vidi da postoje dva osnovna kvantifikatora $\forall$ *za svaki* i $\exists$ *postoji barem jedan.*

Negiranje izjava

Ako tvrdimo da nešto vrijedi za svaki element nekog skupa, onda se ta tvrdnja opovrgava tako da dokažemo da postoji barem jedan element tog skupa koji ne zadovoljava to svojstvo.
Isto tako, ako tvrdimo da postoji barem jedan element skupa koji zadovoljava određeno svojstvo, da bismo tu tvrdnju opovrgnuli moramo dokazati da to svojstvo ne vrijedi ni za jedan element tog skupa.
Dakle vrijedi:

$$\neg((\forall x \in A)(o)) = (\exists x \in A)(\neg o),$$

$$\neg((\exists y \in X)(e)) = (\forall y \in X)(\neg e).$$

gdje e i o simboliziraju neka svojstva. Naprimjer tvrdnju:

Svi učenici su odlični.

možemo oboriti konkretnim primjerom, npr. da u školu ide Ivo za kojeg vrijedi sljedeća izjava

Ivo nije odličan učenik.

što znači da postoji barem jedan učenik koji nije odličan.
Kako bismo negirali sljedeću izjavu:

Ako kupim auto onda je auto moj.

prvo moramo znati da vrijedi $\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$. To ćemo pokazati tablicom istinitosti.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Dakle, da bi gornja tvrdnja vrijedila izjava

Kupio sam auto i on nije moj.

mora biti lažna.

Definicije

Logika je vrlo važna jer se pomoću nje točno određuju definicije. Npr.
Definicija surjekcije:
Funkcija $f : A \to B$ je surjekcija ako vrijedi

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y).$$

Što čitamo:
f je surjekcija ako za svaki y iz kodomene postoji x iz domene takav da vrijedi $f(x) = y$. Pogledajmo zadatak tipa:
Dokaži da funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = x^2$ nije surjekcija, a funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ je surjekcija.
Jedino čega se moramo dosjetiti je definicija i po njoj dokazati točnost ili netočnost tvrdnje. [3]Nadam se da će poslije čitanja ovog članka mnogima biti jasnije što je to točno zapisano u definicijama. No jedna od najtežih definicija koja je svima intuitivno jasna je svakako limes.
Definicija limesa:
Neka je f funkcija definirana na otvorenom intervalu koji sadrži a, osim što f ne mora biti definirana u a. Izjava

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

znači da

$$(\forall e > 0)(\exists d > 0)((0 < |x - a| < d) \Rightarrow (|f(x) - L| < e)).$$

U daljnjem dijelu ćemo dokazati da je

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Definicije je važno znati jer se na njih kod dokaza gotovo uvijek vraćamo.

Zadaci

1. Dokaži da ako vrijedi $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow C$, onda vrijedi $A \Rightarrow C$. (Tranzitivnost relacije $\Rightarrow$.)
2. Koja je negacija od $\neg((a > b) \vee (a > b))$?
3. Dokaži da je izjava
$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$
uvijek istinita.
4. Negiraj izjavu
$$(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 > 0).$$
5. Dokaži da su izjave $A \Rightarrow B$ i $\neg B \Rightarrow \neg A$ istovrijedne (jednake).

ODGOVORI I RJEŠENJA NA STRANICI 36.

[3]Kako dokazivati vidjeti ćemo u dijelu članka koji se bavi dokazivanjem, a objaviti ćemo ga u sljedećem broju.