Prošireni Buffonov pokus

Predrag Novaković*

Sažetak. *Buffonov*[1] *pokus jedan je, od danas više poznatih, načina približnog izračuna vrijednosti broja* π. *Ovim radom Buffonov je pokus proširen i prilagođen izračunu približne vrijednosti broja* e.

Ključne riječi: *Buffonov pokus, geometrijska vjerojatnost, broj* π, *broj* e, *Poissonova*[2] *razdioba (formula)*

Generalized Buffon's experiment

Sažetak. *Buffon's experiment is one of, today more famous, methods of aproximate calculating a value of number* π. *In this article Buffon's experiment is enhanced and adapted to aproximate calculating a value of number* e.

Key words: *Buffon's experiment, geometric probability, number* π, *number* e, *Poisson distribution (formula)*

1. Uvod

Transcendentni brojevi π i e u matematici se pojavljuju vrlo često i smatraju se jednim od osnovnih matematičkih konstanti bez kojih je matematika od najranijih početaka do današnjih dana nezamisliva. Ono što je sigurno, o ovim brojevima će se pisati još dugo. Upravo zbog činjenice da su π i e danas najeksploatiranije matematičke konstante ne samo u matematici i fizici, veza ova dva broja za svakog matematičara današnjice je pravi izazov. Jedan mogući mali prilog ovom izazovu donosimo u nastavku.

Prvi i iznimno zanimljiv probabilistički pristup nekom transcendentnom broju dao je Buffon računajući geometrijsku vjerojatnost događaja da, prilikom bacanja igle na podlogu od paralelnih linija, igla padne, odnosno, ne padne na jednu od linija. Na ovom poznatom pokusu mi nastavljamo.

*predrag.novakovic1507@gmail.com

[1]Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (7. rujna 1707. - 16. travnja 1788.) - francuski matematičar.

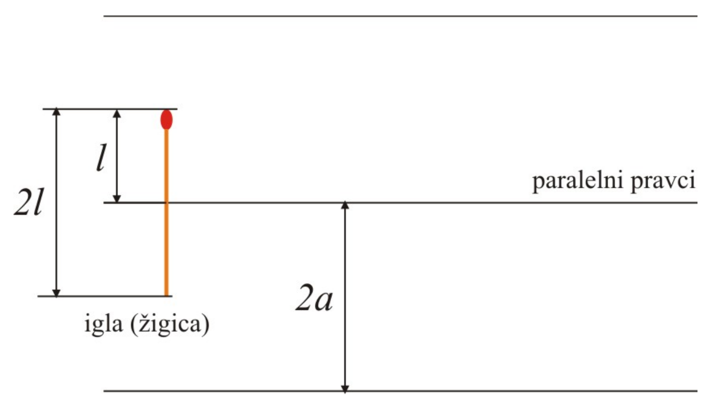
[2]Siméon-Denis Poisson (21. lipnja 1781. - 25. travnja 1840.) - francuski matematičar.

2. Buffonov pokus

Buffonov problem formuliramo na sljedeći način:

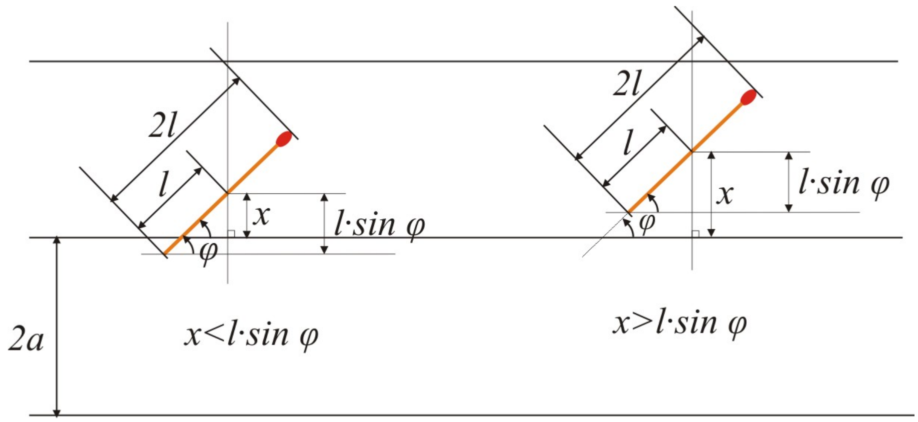
Kolika je vjerojatnost da slučajno bačena igla padne na jedan od paralelnih i međusobno jednako udaljenih pravaca, takvih da je njihova međusobna udaljenost veća ili jednaka duljini bačene igle?

Zadani uvjeti su: 1) duljina igle je $2l$; 2) jednake udaljenosti između paralelnih pravaca su $2a$ i 3) $l \leq a$. Sljedeća slika prikazuje što nam je potrebno u ovom pokusu (radi transparentnosti umjesto igle prikazujemo žigicu):



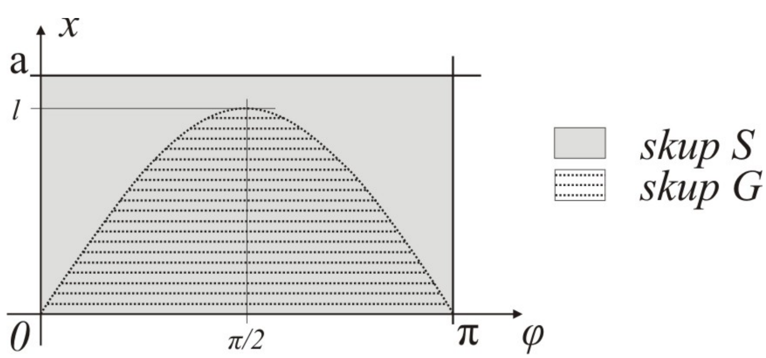
Slika 1.

Geometrijsku vjerojatnost definiramo kao omjer ili kvocijent dviju površina (kada promatramo 2D problem). Sukladno ovoj definiciji treba odrediti u ovom slučaju: 1) skup događaja s pozitivnim ishodom (igla je pala na pravac) i 2) skup svih mogućih događaja (igla je pala). Povoljan događaj možemo interpretirati i ovako: odredimo polovište igle i njenu udaljenost od najbližeg pravca označimo s x; ova udaljenost je okomica na zadane paralelne pravce; projekcija polovine igle na ovu okomicu bit će duljine $l \cdot \sin\varphi$, gdje je φ kut između bližeg paralelnog pravca i pravca kojeg određuje položaj igle (uvijek manji kut); ako je udaljenost polovišta igle do pravca, tj. x manja od ove vrijednosti, dakle $x < l \cdot \sin\varphi$, igla siječe, tj. pala je na taj pravac. Mogući ishod je slučaj za koji vrijedi $0 \leq x \leq a$ i $0 \leq \varphi \leq \pi$. Na Slici 2. su prikazana dva slučaja bacanja igala.



Slika 2.

Sada možemo matematički korektno zapisati sve što je gore navedeno. Skup svih događaja s povoljnim ishodom označimo s G i to je skup $G = \{(\varphi, x) : x < l \cdot \sin\varphi\}$, a skup mogućih događaja označimo sa S, $S = \{(\varphi, x) : 0 \leq \varphi \leq \pi \wedge 0 \leq x \leq a\}$. Ako su točke skupova G i S elementi površina koje možemo izračunati, tada je zadatak riješen. Već na prvi pogled se vidi da skup G predstavlja prvi brijeg sinusoide, odnosno prvu njenu polovicu, a skup S je pravokutnik sa stranicama a i π. Smješteno u pravokutni koordinatni sustav (varijable su x na ordinati i φ na apscisi) grafički prezentiramo na slici 3.:



Slika 3.

Površinu skupa G označimo $m(G)$ i to je površina jednog vala sinusoide:

$$\begin{aligned} m(G) &= \int_0^\pi l \cdot \sin\varphi d\varphi = l \cdot [-\cos(\varphi)|_0^\pi] = -l \cdot (\cos\pi - \cos 0) \\ &= -l \cdot (-1 - 1) = 2l. \end{aligned} \tag{1}$$

Površinu skupa S označimo $m(S)$, a to je površina pravokutnika sa stranicama a i π:

$$m(S) = a \cdot \pi. \tag{2}$$

Očito, vjerojatnost p događaja da slučajno bačena igla padne na jedan od paralelnih pravaca jest kvocijent izračunatih površina pod (1) i (2):

$$p = \frac{m(G)}{m(S)} = \frac{2l}{a\pi} \tag{3}$$

Promotrimo izraz (3) s drugog gledišta. Pretpostavimo da ne znamo vrijednost broja π, ali da možemo pokusom utvrditi vjerojatnost p. Vjerojatnost p možemo procijeniti pomoću relativne frekvencije događaja s povoljnim ishodom m u odnosu na ukupan broj svih događaja, tj. bacanja n:

$$p = \frac{m}{n}. \tag{4}$$

Sređivanjem izraza (3) i (4) dobivamo:

$$\pi \approx \frac{2ln}{am}. \tag{5}$$

Kako smo na početku pretpostavili da je $l \leq a$ (treći od tri zadana uvjeta), uzmimo da je $l = a$. Sada je izraz (5) jednostavniji za računanje, ali i pokus za izvođenje:

$$\pi \approx \frac{2n}{m}. \tag{6}$$

Izraz (6) je traženi obrazac za probabilističko (stohastičko) približno računanje broja π. Iz same prirode broja π (transcendentan broj) možemo zaključiti da bi točnu vrijednost broja π mogli doseći u beskonačno mnogo bacanja, ili nešto drugačijim riječima: što činimo više bacanja n ($n \to \infty$), to točnije određujemo vrijednost broja π.

3. Prošireni Buffonov pokus

Nakon klasičnog Buffonovog pokusa može se postaviti logično pitanje: ako na gore opisani način možemo približno odrediti broj π, postoji li pokus kojim na sličan način možemo, također približno, odrediti drugi važan matematički broj, broj e, poznat kao Eulerov[3] broj i Napierova[4] konstanta?

U tu svrhu možemo iskoristiti Poissonovu razdiobu koja je dana izrazom:

$$p_k = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}_0. \tag{7}$$

Broj e odmah uočavamo u brojniku razlomka što sugerira put k rješenju. O Poissonovoj razdiobi bit će dovoljna temeljna i praktična znanja.

[3] Leonhard Euler (15. travnja 1707. - 18. rujna 1783.) - švicarski matematičar, fizičar i astronom

[4] John Napier (1550. - 4. travnja 1617.) - škotski matematičar, fizičar, astronom/astrolog

Poissonova razdioba je granični slučaj binomne razdiobe kada broj pokusa n neograničeno raste (n jako veliko), a vjerojatnost pojavljivanja promatranog događaja p_n je jako mala. Veličinu, odnosno parametar $\lambda = n \cdot p_n$ zovemo intenzitet pojavljivanja događaja ili, $E(X) = n \cdot p_n$ očekivani broj događaja gdje je X Poissonova slučajna varijabla. Aproksimaciju binomne Poissonovom razdiobom prikazujemo:

$$\binom{n}{k} p_n^k \cdot q_n^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad \text{za } n \to \infty; \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0, \tag{8}$$

gdje je n - broj svih događaja/pokusa; k - broj promatranih događaja s pozitivnim ishodom (dogodio se); $(n-k)$ - broj promatranih događaja s negativnim ishodom (nije se dogodio); p_n - vjerojatnost pozitivnog ishoda; $q_n = 1 - p_n$ - vjerojatnost negativnog ishoda; $\lambda = n \cdot p_n$ - intenzitet pojavljivanja događaja.
Razmotrimo jedan takav slučajan događaj opisan binomnom razdiobom s vjerojatnošću:

$$p_B(k,n) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \qquad \text{za } n \to \infty; \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{9}$$

Pretpostavimo da imamo niz pokusa kod kojih je intenzitet pojavljivanja događaja $\lambda = n \cdot p_n$ konstantna vrijednost i ima značenje očekivanja:

$$\lambda = n \cdot p_n, \qquad \lambda = const. \tag{10}$$

Vjerojatnosti p_n i q_n možemo izraziti:

$$p_n = \frac{\lambda}{n}, \qquad q_n = 1 - \frac{\lambda}{n} \tag{11}$$

pa izraz (9) možemo pisati:

$$p_B(k,n) = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \cdot (\frac{\lambda}{n})^k \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} \quad \text{za } n \to \infty; \forall k \in \mathbb{N}_0 \tag{12}$$

Kako je $n \to \infty$ jako veliko, tj. teži u beskonačno, bit će:

$$\begin{aligned} p_B(k,n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \cdot (\frac{\lambda}{n})^k \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k} \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^n \end{aligned} \tag{13}$$

Limes umnoška jednak je umnošku limesa, a član na koji ne djeluje limes izmještamo ispred izraza:

$$p_B(k,n) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k} \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^n \tag{14}$$

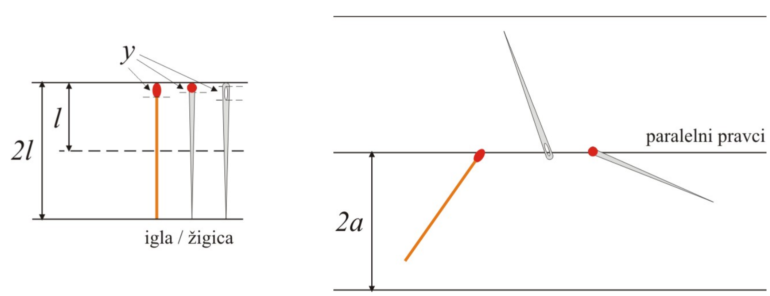
tako da slijedom imamo:

$$p_B(k,n) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot 1 \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}. \tag{15}$$

Dakle, Poissonova razdioba je samo specijalan, graničan slučaj binomne razdiobe diskretne slučajne varijable X kada $n \to \infty$, a $p \to 0$. Jednostavnije, u mnoštvu svih mogućih događaja promatramo samo one koji se vrlo rijetko i događaju.
Zanimljiv i koristan podatak jest greška koju činimo ovom aproksimacijom, a koja može znatno uticati na rezultat, ali i na modeliranje samog pokusa. Sljedeća tablica pokazuje razliku vjerojatnosti između dviju razdioba za $k = 0, 1, 2, 3$ i 4 uz parametre $n = 20$; $p_n = 0.05$; $\lambda = np_n = 1$:

k	BINOMNA RAZDIOBA ($n = 20$, $p_n = 0.05$)	POISSONOVA RAZDIOBA ($\lambda = np_n = 1$)	Δ
0	0.358486	0.367879	0.009393
1	0.377353	0.367879	0.009474
2	0.188676	0.183939	0.004737
3	0.059582	0.061313	0.001731
4	0.013327	0.015328	0.002001

Sada je očito kako se izraz (15) može iskoristiti za približno računanje vrijednosti broja e te je potrebno prilagoditi prvobitan Buffonov pokus. Uzme li se žigica duljine $2l$ tako da je jednaka razmaku paralelnih pravaca $2a$ (isto kao i kod izvođenja Buffonovog pokusa), potrebno je odrediti neki drugi događaj s malom vjerojatnošću $p_{(e)}$ iz više pokušaja n (npr. $p_{(e)} \leq 0.05$ za $n \geq 20$). Jedan takav događaj može biti: vrh žigice, koji ima duljinu $y = 5$ mm, pao je na jedan od paralelnih pravaca koji su međusobno udaljeni $2l = 2a = 100$ mm, što je prikazano na sljedećoj slici:



Slika 4.

Dakle, umjesto igle koriste se veće žigice duljine $2l = 100$ mm sa fosfornim vrhom duljine $y = 5$ mm, ili posebno napravljeni štapići sličnih veličina jer je lakše uočiti presjek vrha i pravca. Vjerojatnost da vrh žigice padne na pravac bit će:

$$p_{(e)} = \frac{2y}{2a\pi} = \frac{2y}{2l\pi} = \frac{10}{100\pi} = 0.0318 \tag{16}$$

što je i jedan od traženih preduvjeta za primjenu Poissonove formule (15). Drugi preduvjet je veći broj ukupnih događaja n koji se, zbog jednostavnijeg računa, može uzeti $n = 20$. Tada je intenzitet pojavljivanja događaja λ, odnosno očekivani broj događaja $E(X)$:

$$\lambda = n \cdot p_n = 20 \cdot 0.0318 = 0.636 \tag{17}$$

Broj k je broj ostvarenih događaja, npr. u 20 bacanja može se dogoditi da niti jedna žigica nije pala vrhom na pravac i tada je $k = 0$, ili je samo jedna pala ($k = 1$), ili dvije ($k = 2$), itd. Iz formule (15) može se izraziti broj e:

$$e \approx \left(\frac{k! \cdot p_B(k,n)}{\lambda^k}\right)^{-\frac{1}{\lambda}} \tag{18}$$

što je izraz za procjenu približne vrijednosti broja e.

3.1. Izvođenje pokusa

Za izvođenje pokusa potrebni su: 1) podloga s paralelnim pravcima i 2) igle, žigice ili štapići.
1) Podloga se iscrtava paralelnim pravcima na papiru npr. A4 formata (ili više njih pa se spajaju), ili A3, a moguće je i A2. Razmak između pravaca treba biti iste širine kao i duljina žigice ($2a = 2l$).
2) Umjesto igle koja je malih dimenzija, preporučam uzeti velike žigice ili štapiće s označenim vrhom (barem $2l = 10$ cm).

Postaviti podlogu od nekoliko A4 papira iscrtanih paralelnim pravcima i uzeti 20 većih žigica. Žigice bacati što raspršenije u serijama od 20 komada s visine ne manje od 1 m. Uz što više bacanja, posebno paziti na granične slučajeve kada se promatra vrh žigice u odnosu na pravac (uzeti u obzir samo izravne presjeke). U tablicu unositi podatke: ukupan broj žigica u jednom snopu, $n = 20$; broj žigica koje su pale na pravac, m; broj žigica čiji su vrhovi pali na pravac, k. Ostali podaci se izračunavaju.

3.2. Rezultati pokusa

Rezultati jednog takvog pokusa s izvršenih 50 bacanja setova od po 20 žigica prikazani su u sljedećim tablicama:

Red.br.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
n	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
m	13	11	10	14	13	16	11	12	12	15
k	1	0	0	1	0	2	0	0	1	0
$\frac{m}{n}$	0.65	0.55	0.50	0.70	0.65	0.80	0.55	0.60	0.60	0.75
π	3.077	3.636	4.000	2.857	3.077	2.500	3.636	3.333	3.333	2.667

Red.br.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
n	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
m	10	14	16	13	14	11	13	15	14	12
k	0	2	0	0	0	1	1	0	2	1
$\frac{m}{n}$	0.50	0.70	0.80	0.65	0.70	0.55	0.65	0.75	0.70	0.60
π	4.000	2.857	2.500	3.077	2.857	3.636	3.077	2.667	2.857	3.333

Red.br.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
n	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
m	12	15	10	11	14	13	14	10	15	14
k	0	1	1	1	0	2	0	1	0	0
$\frac{m}{n}$	0.60	0.75	0.50	0.55	0.70	0.65	0.70	0.50	0.75	0.70
π	3.333	2.667	4.000	3.636	2.857	3.077	2.857	4.000	2.667	2.857

Red.br.	31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
n	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
m	13	15	9	14	12	11	16	12	14	13
k	0	1	1	0	3	1	0	2	1	0
$\frac{m}{n}$	0.65	0.75	0.45	0.70	0.60	0.55	0.80	0.60	0.70	0.65
π	3.077	2.667	4.444	2.857	3.333	3.636	2.500	3.333	2.857	3.077

Red.br.	41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
n	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
m	11	13	15	16	9	13	10	13	14	15
k	0	1	0	0	1	1	2	0	1	0
$\frac{m}{n}$	0.55	0.65	0.75	0.80	0.45	0.65	0.50	0.65	0.70	0.75
π	3.636	3.077	2.667	2.500	4.444	3.077	4.000	3.077	2.857	2.667

Približna vrijednost broja π u posljednjim retcima tablica izračunava se prema izrazu (6). Dobivene vrijednosti smještene su unutar intervala $[2.500, 4.444]$. Najfrekventniji rezultati su $\pi \approx 3.077$ i $\pi \approx 2.857$ koji su dobiveni 10 puta (slučaj kada je 13, tj. 14 od 20 žigica palo na pravac). Srednja vrijednost dobivenih rezultata je:

$$\pi \approx 3.17422. \tag{19}$$

U trećem retku gornjih tablica bilježene su vrijednosti $k = 0, 1, 2, 3$ ($k = 0$ - niti jedan od 20 vrhova nije pao na pravac, $k = 1$ - jedan vrh je pao na pravac, itd.) koje su potrebne za približno računanje broja e. Na temelju ovih podataka formira se sljedeća tablica:

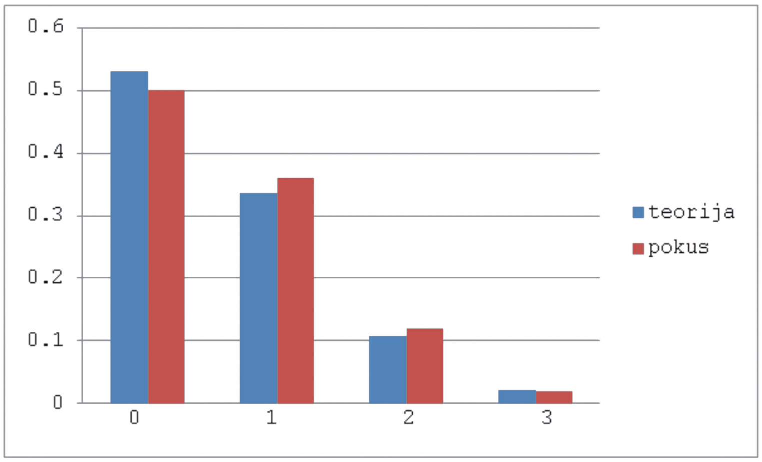
k	0	1	2	3
i_k	25	18	6	1
i	50			
$p_e = \frac{i_k}{i}$	0.50	0.36	0.12	0.02
e_k	2.9738	2.4469	2.2722	3.3170
$\overline{e}$	2.7525			

Iz ove tablice iščitavamo konačan rezultat:

$$e \approx 2.7525. \tag{20}$$

Prvi redak ove tablice sadrži sve $k = 0, 1, 2, 3$ koji su se pojavili u pokusu. U drugom retku upisane su vrijednosti i_k za svaki k, a to je ukupan broj svih k-događaja, npr. od 20 bačenih žigica niti jedan vrh nije pao na pravac ($k = 0$), a takvih ishoda u 50 bacanja bilo je 19. U trećem retku je ukupan broj svih bacanja $i = 50$. Četvrti redak sadrži dobivene pripadne vjerojatnosti, npr. za $k = 1$ bit će $p_e = \frac{i_1}{i} = \frac{19}{50} = 0.38$. U petom retku su približne vrijednosti broja e za svaki k-stupac dobivene iz formule (18), a u posljednjem srednja vrijednost sva četiri e_k.

Grafički prikaz dobivenih podataka iz prethodne tablice u usporedbi s očekivanom Poissonovom razdiobom za iste parametre prikazan je na sljedećoj slici:



Slika 5.

gdje prvi stupci predstavljaju teorijski predviđene vrijednosti, a drugi stupci pokusom dobivene vrijednosti.

3.3. Pogreške

Kako je riječ o približnim vrijednostima brojeva π i e, i općenito o nekom pokusu, nužno je prikazati i nastale pogreške, tj. odstupanja dobivenih rezultata od traženih. Uobičajeno je koristiti se apsolutnom i relativnom pogreškom.
Za brojeve π i e, apsolutne pogreške su:

$$\Delta\pi = |\pi - \pi_*| = |3.14159 - 3.17422| = 0.03263 \tag{21}$$

$$\Delta e = |e - e_*| = |2.71828 - 2.7525| = 0.034195 \tag{22}$$

gdje su π_* i e_* pokusom dobivene vrijednosti. Isto tako, za relativne pogreške imamo:

$$\pi_{rel} = \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0.03263}{3.14159} = 0.01039. \tag{23}$$

$$e_{rel} = \frac{\Delta e}{e} = \frac{0.034195}{2.71828} = 0.01258. \tag{24}$$

Dobiveni rezultati (19) i (20), sukladno pogreškama (21) - (24), mogu se ocijeniti izvrsnim obzirom kako je pokus stohastičke naravi.

Literatura

[1] I. N. Bronštejn: *Matematički priručnik*, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[2] N. ELEZOVIĆ: *Diskretna vjerojatnost*, Element, Zagreb, 2007.

[3] Ž. PAUŠE: *Vjerojatnost: informacija, stohastički procesi*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[4] E. WEISSTEIN: *Buffon's Needle Problem*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
`http://mathworld.wolfram.com/BuffonsNeedleProblem.html`