Particija skupa i relacija ekvivalencije. Bellovi brojevi

ŽELJKO ZRNO*

Sažetak. *U radu se bavimo problemom particije skupa i povezujemo je s relacijom ekvivalencije. Vidjet ćemo da je broj particija skupa jednak broju relacija ekvivalencije na tom skupu. Taj broj ćemo zvati Bellov broj. Dat ćemo širi osvrt na taj broj i prezentirat neke njegove primjene.*

Ključne riječi: *kombinacija, partitivni skup, particija skupa, relacija ekvivalencije, Bellov broj*

Set partition, equivalence relation. Bell's number

Abstract. *In this professional work we are deal with the problem of partition paper and we are connecting it with the equivalence relation. Number of partition paper is equal to number of equivalence relation. That number is called Bell's number. We'll give a broader reference to this problem and we will present some of its applications.*

Key words: *combination, partitive set, partition paper, equivalence relation, Bell's number*

1. Uvod

U ovom radu bavit ćemo se problemom **particije skupa** i pokazati da je taj pojam usko vezan s **relacijom ekvivalencije**. Vidjet ćemo da je broj particija skupa jednak broju relacija ekvivalencije na tom skupu. Taj broj ćemo zvati **Bellov broj**. Prezentirati ćemo neke primjene tog broja i dati osvrt na sam taj broj. Prisjetimo se na početku pojmova **kombinacije** i **partitivnog skupa**.

Definicija 1. *Zadan skup S koji ima n elemenata. Svaki k-člani podskup skupa S zovemo* **kombinacijom k-tog razreda** *skupa S. Broj svih kombinacija k-tog razreda n-članog skupa označavamo s $\binom{n}{k}$, pri čemu je*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1}$$

*zeljko.zrno@veleknin.hr, Veleučilište Marko Marulić, Krešimirova 30, HR-22300 Knin

gdje po definiciji uzimamo da je $0! = 1$.

Definicija 2. *Neka je S proizvoljni dani skup. Skup svih podskupova skupa S nazivamo partitivnim skupom skupa S i označavamo ga sa $P(S)$.*

Prema tome elementi skupa $P(S)$ su podskupovi skupa S. Primjerice, ako je $S = \{1, 2, 3\}$, tada je

$$P(S) = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Uočite da skup $P(S)$ iz prethodnog primjera ima $8 = 2^3$ elemenata i da je to u vezi s činjenicom

$$1 + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = (1 + 1)^3 = 2^3.$$

Općenito nalazimo da skup $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ ima

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^n. \tag{2}$$

podskupova.

2. Particija skupa

Dajemo sada definiciju particije skupa.

Definicija 3. *Neka je S dani skup. Svaki podskup $\mathcal{P}$ od $P(S)\backslash\{\emptyset\}$ zovemo* **particijom skupa** *S ako su ispunjena ova dva uvjeta:*

1. *unija svih elemenata iz $\mathcal{P}$ jednaka je skupu S.*
2. *ako su A i B različiti elementi iz $\mathcal{P}$, tada je $A \cap B = \emptyset$.*

Primjer 1. *Ako je $S = \{1, 2, 3\}$, tada su particije tog skupa:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1 &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\},\\
\mathcal{P}_2 &= \{\{1, 2\}, \{3\}\},\\
\mathcal{P}_3 &= \{\{1, 3\}, \{2\}\},\\
\mathcal{P}_4 &= \{\{2, 3\}, \{1\}\},\\
\mathcal{P}_5 &= \{1, 2, 3\}.
\end{aligned}$$

Dakle, ima ih ukupno 5.

Primjer 2. *Ako je $S = \{1, 2, 3, 4\}$ jedna particija bi bila npr.*

$$\mathcal{P}_1 = \{\{1\}, \{4\}, \{2, 3\}\}.$$

Problem određivanja broja particija skupa S, od općenito n elemenata, bit će rješavan u daljnjem izlaganju. Kroz ova dva primjera htjeli smo tu problematiku samo otvoriti i zainteresirati čitatelja. Napominjemo poznatu particiju skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, na parne i neparne prirodne brojeve.

3. Relacija ekvivalencije

Prvo definiramo pojam **binarne relacije**.

Definicija 4. *Neka su A i B neki skupovi, a R neki podskup skupa $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$. Svaki podskup R skupa $A \times B$ zove se* **binarna relacija** *između elemenata skupa A i elemenata skupa B ili relacija sa A u B. Za element x iz A kažemo da je u relaciji R s elementom y iz B i pišemo*

$$xRy,$$

ako je $(x,y) \in R$.

Primjer 3. *Neka je $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{7,8,9\}$ a*

$$R = \{(1,7),(2,9),(3,8),(4,7)\} \subseteq A \times B.$$

Podskup R je jedna relacija između elemenata skupa A i elemenata skupa B. Tu je

$$1R7, 2R9, 3R8, 4R7.$$

Lako se vidi da primjerice $(2,8)$ nije u R, te ne prema tome ne vrijedi $2R8$.

U daljnjem ćemo radu uzeti da je općenito $A = B = S$ (isti skupovi A i B) i dajmo definicije nekih važnijih vrsta binarnih relacija.

Definicija 5.

1. *Za relaciju $R \subseteq S \times S$ kažemo da je* **refleksivna** *onda i samo onda ako je aRa za svaki $a \in S$.*
2. *Za relaciju $R \subseteq S \times S$ kažemo da je* **simetrična** *onda i samo onda ako ima svojstvo: ako je aRb, tada je i bRa.*
3. *Za relaciju $R \subseteq S \times S$ kažemo da je* **tranzitivna** *onda i samo onda ako ima svojstvo: ako je aRb i bRc tada je i aRc.*

Definicija 6. *Za relaciju $R \subseteq S \times S$ kažemo da je* **relacija ekvivalencije** *ako je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna.*

Primjer 4. *Na skupu $S = \{1,2,3\}$ definiramo sljedeću relaciju*

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}.$$

Vidimo lako da je R relacija ekvivalencije, jer je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Primjer 5. *Neka je $S = \mathbb{Z}$ skup cijelih brojeva. U skupu $\mathbb{Z}$ definiramo relaciju $\equiv$ ovako: ako su a i b cijeli brojevi, kažemo da je a kongruentan b modulo 3 i pišemo $a \equiv b(\mod 3)$ onda i samo onda ako $3|a-b$ (tj. $a-b$ je djeljivo sa 3). Pokazujemo da je relacija "biti kongruentan modulo 3" relacija ekvivalencije.*

Refleksivnost

$\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \equiv a(\mod 3)$ jer je $a - a = 0$ (nula je djeljiva sa 3).

Simetričnost
$a \equiv b(\mod 3) \Leftrightarrow 3|a-b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ takav da je $a-b=3k$, odnosno, $-(b-a)=3k$, $b-a=-3k=3\cdot(-k)$,
tj. $b-a$ je djeljivo sa 3, pa je $b \equiv a(\mod 3)$.
Tranzitivnost
$a \equiv b(\mod 3)$ i $b \equiv c(\mod 3) \Leftrightarrow 3|a-b$ i $3|b-c \Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a-b=3k$ i $b-c=3l$.

Imamo

$$(a-b)+(b-c)=3k+3l$$
$$a-c=3(k+l),$$

tj. $a-c$ je djeljivo sa 3, pa je $a \equiv c(\mod 3)$.

Prethodni primjer nas motivira za daljnju korisnu raščlambu. Skup svih cijelih brojeva koji su djeljivi sa 3 označimo sa $3\mathbb{Z}$, tj.

$$3\mathbb{Z}=\{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots,3n,\ldots\};$$

skup svih cijelih brojeva koji pri dijeljenju sa 3 daju ostatak 1 označimo sa $3\mathbb{Z}+1$, tj.

$$3\mathbb{Z}+1=\{\ldots,-5,-2,1,4,\ldots,3n+1,\ldots\};$$

skup svih cijelih brojeva koji pri dijeljenju sa 3 daju ostatak 2 označimo sa $3\mathbb{Z}+2$, tj.

$$3\mathbb{Z}+2=\{\ldots,-7,-4,-1,2,5,\ldots,3n+2,\ldots\}.$$

Uočimo da su podskupovi $3\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}+1$, $3\mathbb{Z}+2$ disjunktni i da im je unija skup $\mathbb{Z}$. Za element $a \in \mathbb{Z}$ kažemo da je u relaciji R s elementom $b \in \mathbb{Z}$ i pišemo aRb onda i samo onda ako se a i b nalaze u istom od podskupova

$$3\mathbb{Z},\ 3\mathbb{Z}+1,\ 3\mathbb{Z}+2.$$

Lako se uviđa da je R relacija ekvivalencije u skupu $\mathbb{Z}$. To je zapravo relacija "biti kongruentan modulo 3". Zaista, skup R sastoji se od onih i samo onih parova (a,b) za koje je $(a-b)$ djeljivo sa 3.
Usko povezan pojam, s relacijom ekvivalencije, je pojam **klase ekvivalencije**.

Definicija 7. *Ako je R relacija ekvivalencije na skupu S, i a neki element iz S, tada skup svih elemenata x iz S za koje vrijedi xRa označavamo sa C_a i zovemo* **klasom ekvivalencije**, *tj.*

$$C_a=\{x \in S|xRa\}.$$

Primjer 6. *Ako je $S=\mathbb{Z}$, a R relacija "biti kongruentan modulo 3", tada su $C_0=3\mathbb{Z}$, $C_1=3\mathbb{Z}+1$, $C_2=3\mathbb{Z}+2$ klase ekvivalencije.*

Dokažimo važan teorem o klasama ekvivalencije.

Teorem 1. *Svaka relacija ekvivalencije definirana u skupu S određuje rastavljanje skupa S na disjunktne podskupove koji su klase ekvivalencije s obzirom na danu relaciju ekvivalencije.*

Dokaz. Neka je R bilo koja relacija ekvivalencije definirana u skupu S. Budući da svaki $a \in S$ pripada barem klasi C_a, jer je aRa zaključujemo da je

$$S = \bigcup_{a \in S} C_a.$$

Ostaje nam još pokazati da je to rastavljanje particija, tj. da za svaki par elemenata a i b iz S vrijedi:

$$C_a = C_b \text{ ili } C_a \cap C_b = \emptyset.$$

(presjek klasa C_a i C_b nije prazan samo onda ako je $C_a = C_b$).

Zaključujemo ovako: ako je

$$C_a \cap C_b \neq \emptyset,$$

tada postoji $x \in C_a \bigcap C_b$ tako da je xRa i xRb. No, tada je aRx jer je relacija ekvivalencije simetrična, pa iz aRx i xRb, jer je R tranzitivna, slijedi aRb. Prema tome, ako je $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, mora biti $a \in C_b$.

Uzmimo sada da je a' proizvoljni element iz C_a. Tada iz $a'Ra$ i aRb slijedi $a'Rb$. Dakle, a' je element i iz C_b. A jer je a' proizvoljni element iz C_a, zaključujemo da je $C_a \subseteq C_b$.

Slično, ako umjesto (*) pišemo bRx i xRa itd., nalazimo da je i $C_b \subseteq C_a$.
No, iz $C_a \subseteq C_b$ i $C_b \subseteq C_a$ zaključujemo da je $C_a = C_b$, što je i trebalo dokazati. □

Konačno smo u prilici izreći, bez dokaza, važan teorem u kombinatornoj matematici koji povezuje našu temu u ovom članku. Taj teorem je zapravo pojačana verzija Teorema 1.

Teorem 2. *Neka je R relacija ekvivalencije na konačnom skupu S. Tada klase ekvivalencije formiraju particiju skupa S. Obrnuto, za danu particiju skupa S, postoji jedinstvena relacija ekvivalencije čije su klase elementi particije. Dakle, broj particija skupa jednak je broju relacija ekvivalencije na tom skupu. Taj broj zvati ćemo* **Bellov broj**. Prije nego li se pozabavimo Bellovim brojevima, dajemo primjere koji ilustriraju "duh" Teorema 2.

Primjer 7. *Vidjeli smo u Primjeru 1., da skup $S = \{1, 2, 3\}$ ima ukupno 5 particija. Navodimo sljedećih 5 relacija ekvivalencije, koje generiraju navedene particije, iz Primjera 1., skupa S. To su:*

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, s odgovarajućim klasama ekvivalencije
$C_1 = \{1\}, C_2 = \{2\}, C_3 = \{3\}$
$R_2 = \{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}, C_1 = C_2 = \{1,2\}, C_3 = \{3\};$
$R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1),(1,3)\}, C_1 = C_3 = \{1,3\}, C_2 = \{2\};$
$R_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,2),(2,3)\}, C_2 = C_3 = \{2,3\}, C_1 = \{1\};$
$R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\},$
$C_1 = C_2 = C_3 = \{1,2,3\};$

Primjer 8. *Neka je $S = \mathbb{Z}$ zadan skup. Na njemu imamo definiranu relaciju ekvivalencije R "biti kongruentan modulo 3" (vidjeti Primjer 6.)*

Dakle ova relacija ekvivalencije R odnosno njene klase ekvivalencije $C_0 = 3\mathbb{Z}$, $C_1 = 3\mathbb{Z} + 1$, $C_2 = 3\mathbb{Z} + 2$ generiraju jednu particiju skupa $\mathbb{Z}$.

4. Bellovi brojevi

Bellovi brojevi formiraju niz (B_n) i n-ti Bellov broj B_n daje broj particija konačnog skupa od n elemenata ili broj relacija ekvivalencije na tom skupu. Dakle, imamo niz

$$B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$$

koji zadovoljava rekurziju

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3}$$

uz definirani početni uvjet $B_0 = 1$.

U tablici su prikazane vrijednosti prvih deset Bellovih brojeva, dobivenih pomoću rekurzije (3):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

Formulu rekurzije (3), za Bellov niz, detaljnije ćemo obrazložiti i pokazati pomoću **funkcije izvodnice (generatrise)**.

Funkcije izvodnice

S redovima koji će se javljati pri korištenju funkcija izvodnica baratat ćemo isključivo kao s formalnim redovima potencija, tj. neće nas zanimati pitanje konvergencije redova. Koristit ćemo sljedeće formule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{gdje je} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{5}$$

Promatrajmo beskonačni niz

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots. \tag{6}$$

Definicija 8. *Funkcija* $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *naziva se* **funkcija izvodnica** *niza (6).*

Definicija 9. *Funkcija* $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ *naziva se* **eksponencijalna funkcija izvodnica** *niza (6).*

Ako su poznate funkcije izvodnica za niz (6), članovi niza mogu se odrediti pomoću formula

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}, \quad \text{odnosno} \quad a_n = G^{(n)}(0) \tag{7}$$

gdje (n) označava n-tu derivaciju funkcija.

Odredimo eksponencijalnu funkciju izvodnica za zadani niz Bellovih brojeva (B_n) za koji vrijedi rekurzija

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

uz početni uvjet $B_0 = 1$.
Polazimo od funkcije izvodnica

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

a poznato je da se funkcija $x \mapsto e^x$ može prikazati pomoću reda potencija

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Pomnožimo funkcije $G(x)$ i e^x, te koristeći formule (4) odnosno (5) dobivamo sljedeću jednakost

$$G(x) \cdot e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \tfrac{B_k}{k!} \cdot \tfrac{n!}{(n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) x^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} B_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \tfrac{B_{n+1}}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \tfrac{B_n}{n!} x^{n-1} = G'(x)$$

iz koje slijedi

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = e^x. \tag{8}$$

Prethodna jednakost (8) povlači

$$\ln G(x) = e^x + C, \quad \text{tj.}$$

$$G(x) = e^{e^x + C}.$$

Iz $G(0) = B_0 = 1$ slijedi $C = -1$, dakle

$$G(x) = e^{e^x - 1} \tag{9}$$

je funkcija izvodnica za niz (B_n).
Treba dokazati da vrijedi rekurzija

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Određujemo $G'(x)$ za (9),

$$G'(x) = e^x \cdot e^{e^x - 1} = e^x \cdot G(x).$$

Zatim izračunavamo drugu derivaciju

$$G''(x) = e^x G(x) + e^x \cdot e^x G(x),$$

i na osnovu prve derivacije možemo pisati

$$G''(x) = e^x (G(x) + G'(x)).$$

Slično, treća derivacija ima prikaz

$$G'''(x) = e^x (G(x) + 2 \cdot G'(x) + G''(x)),$$

te zaključujemo da vrijedi općenito

$$G^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G^{(k)}(x) \cdot e^x. \tag{10}$$

Ako u (10) računamo u točki $x = 0$ imamo

$$G^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G^{(k)}(0).$$

Pa imamo niz $(G^{(n)}(0))$ koji zadovoljava istu rekurziju kao i niz Bellovih brojeva. Obzirom da je $G^{(0)}(0) = G(0) = e^{e^0 - 1} = e^{1-1} = e^0 = 1$, slijedi da nizovi

$$(B_n) \;\text{ i }\; (G^{(n)}(0)$$

zadovoljavaju i isti početni uvjet. Kako te dvije stvari povlače jednoznačnost, slijedi da su ta dva niza zapravo jedan te isti niz.

Dakle, je

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \;\; G^{(n)}(0) = B_n, \text{ pa vrijedi}$$

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

I to je izvod rekurzije za niz Bellovih brojeva. Stoga smo pokazali oba smjera tj.

$$G(x) = e^{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n. \tag{11}$$

Neka zanimljiva pojavljivanja Bellovih brojeva

Kroz neke od sljedećih prikaza Bellovih brojeva, možemo zaključiti o postojanju njihove široke "rasprostranjenosti" u matematici.

a) matrična prezentacija

Neka je $T \in M_n(\mathcal{R})$ matrica tipa

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & n \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$B_n = [1 \ 0 \ 0 \ \ldots \ 0] \cdot T^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

u kojoj figurira retkasta matrica sa n stupaca, odnosno stupčasta sa n redaka. Na primjer peti Bellov broj dobivamo ovako:

$$B_5 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\ 0 & 16 & 65 & 55 & 14 \\ 0 & 0 & 81 & 175 & 97 \\ 0 & 0 & 0 & 256 & 369 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 625 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [52].$$

b) f_n - prezentacija

Neka je $f_1(x) = e^x$ i $f_{n+1}(x) = [xf_n(x)]'$. Tada je

$$B_n = \frac{1}{e} f_n(1).$$

$$\begin{aligned} &f_1(x) = e^x \ \Rightarrow \ \tfrac{1}{e} f_1(1) = 1 = B_1, \\ &f_2(x) = (xe^x)' = (x+1)e^x \ \Rightarrow \ \tfrac{1}{e} f_2(1) = 2 = B_2, \\ &f_3(x) = \big[(x^2+x)e^x\big]' = (x^2+3x+1)e^x \ \Rightarrow \ \tfrac{1}{e} f_3(1) = 5 = B_3, \end{aligned}$$

i tako redom $B_4 = 15$, $B_5 = 52, \ldots$.

c) uglate zagrade

Ako je $k \in \mathbb{N}$ prirodni broj, tada za simbol $[1, k]$ definiramo transformaciju koja ga preslikava u simbol $[1, k+1]$ iza kojeg se k puta javlja simbol $[1, k]$. Na taj način, npr. simbol $[1, 3]$ postaje niz od četiri simbola $[1, 4], [1, 3], [1, 3], [1, 3]$. Na svaki od ova četiri simbola možemo primijeniti istu transformaciju i tako dobiti niz:

$[1, 5], [1, 4], [1, 4], [1, 4], [1, 4], [1, 4], [1, 3], [1, 3], [1, 3], [1, 4], [1, 3], [1, 3], [1, 3], [1, 4], [1, 3], [1, 3], [1, 3].$

Tako možemo krenuti od osnovnog simbola $[1,1]$ i rezultat primjene opisane transformacije $[1,2],[1,1]$, na njega napisati ispod "dolje" itd.

Radi jednostavnosti ovdje su izostavljene uglate zagrade i zarezi. Imamo:

1 1
1 2 1 1
1 3 1 2 1 2 1 2 1 1
1 4 1 3 1 3 1 3 1 3 1 2 1 2 1 3 1 2 1 2 1 3 1 2 1 2 1 2 1 1
. . . .

Postavlja se pitanje: Koliko simbola ima u svakom od ova četiri reda?
Vidimo u ova četiri reda ima redom 1,2,5,15 simbola.
Odavde se naslućuje da n-ti red sadrži B_n simbola, tj. B_n parova uglatih zagrada s po dva broja unutar takvog para zagrada. Uvjeriti se da će definirana transformacija u petom redu imati $B_5 = 52$ simbola.

d) Bellovi stringovi

Nazovimo "Bellovim stringom" duljine n, niz od n prirodnih brojeva. Svaki takav niz počinje brojem 1. Za svaki od ostalih elemeneta tog niza vrijedi da taj element ne premašuje nijedan element lijevo od njega(koji je maksimalan) za više od jedan.
"Bellovih stringova" dužine n ima B_n, dakle ima ih koliki je n-ti Bellov broj.
Svih "Bellovih stringova" dužine tri ima $B_3 = 5$ i to su stringovi

$$111, 112, 121, 122, 123.$$

Svih $B_4 = 15$ "Bellovih stringova" duljine četiri čine niz ovih četveroslovnih "riječi" skupa $\{1, 2, 3, 4\}$:

1111	1112	1121	1122	1123
1211	1212	1213	1221	1222
1223	1231	1232	1233	1234

e) funkcije

Neka je $f : \{1, 1, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1\}$ funkcija sa svojstvom $\forall x \in \mathcal{D}(f)$, $f(x) > x$. Sve takve funkcije čine skup čiji je kardinalitet jednak B_n.
U slučaju $n = 2$ to su funkcije $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.
U slučaju $n = 3$ to su funkcije:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dakle, ima ih $B_3 = 5$.

f) Nekoliko redova s Bellovim brojevima

Imamo red s odgovarajućom sumom

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} = \frac{1^n}{1!} + \frac{2^n}{2!} + \cdots = B_n \cdot e,$$

gdje je B_n Bellov broj. Dakle, vrijedi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = 2e,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{k!} = 5e,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^4}{k!} = 15e,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^5}{k!} = 52e,$$
$$\dots$$
$$\dots$$

Literatura

[1] S. Kurepa, *Uvod u Matematiku*, Tehnička knjiga Zagreb, Zagreb, 1979.

[2] M. Radić, *Algebra I*, Školska knjiga Zagreb, Zagreb, 1989.

[3] M. Aigner, *A Characterization of the Bell Numbers*, Discrete Mathematics, **205**(1999).

[4] E. Borowski, J. Borwein, *Collins Dictionary of Mathematics*, Harper Colins Publishers.