

Osnovno manipuliranje izrazima u Mapleu

Tvrtko Tadić

Mnogi matematičari koriste pomagala pri računanju od kalkulatora pa do računalnih programa koji znaju i kompliciranije operacije. Jedan takav program je Maple. U ovom članku ćemo navesti najosnovnije naredbe u Mapleu. Uglavnom će biti riječ o manipuliranju izrazima.

Naredba *factor*

Prvo ćemo početi s običnom faktorizacijom izraza. Najčešće želimo nešto faktorizirati. To nam se jako često događa kad imamo neki zadatak ili jednostavno moramo dobiti neki uvjet na zadatku. Faktoriziranje je često dosadan i zamoran posao. Koliko smo samo puta u njemu pogriješili! No, pomoću Maplea to nas više nebi trebalo sputavati u našem poslu. Zašto bi netko zbog svoje nespretnosti morao dobiti krivi rezultat?

Primjer 1. Faktoriziraj izraz

$$(x + 2)^3 - (x^2 + x + 2)^2.$$

Rješenje:

```
[> A:=(x+2)^3-(x^2+x+2)^2;
```

$$A := (x + 2)^3 - (x^2 + x + 2)^2$$

```
[> factor(A);
```

$$-(x - 2)(x^3 + 3x^2 + 5x + 2)$$

Time smo riješili zadatak koji, priznajmo, nitko ne bi volio ručno raditi.

Primjer 2. Dokaži da za pozitivne brojeve a , b i c vrijedi nejednakost

$$\frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Rješenje:

```
[> A:=(a+b)/2;K:=sqrt((a^2+b^2)/2);
```

$$A := \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

$$K := \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2}$$

Sada ćemo kvadrirati obje strane i odnosno napraviti $A^2 - K^2$.

```
[> factor(A^2-K^2);
```

$$-\frac{1}{2}(a - b)^2$$

Time smo dokazali našu nejednakost, jer se ovaj postupak samo obrne. Možda se na ovom konkretnom primjeru i ne vidi velika primjenjivost u praktične svrhe, ali na nekim većim izrazima ova će naredba svakako dobro doći.

Naredba *expand*

Možemo reći da ova naredba proširuje algebarske izraze. Sva ona predavanja o kubu i kvadratu zbroja i razlike su sadržana u ovoj naredbi.

Primjer 3. Raspiši izraz $(a + b + c)^3$.

Rješenje:

```
[> expand((a+b+c)^3);
```

$$a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

Primjer 4. Raspiši izraz $((a - b)^2 - (d + c)^2)^3$.

Rješenje:

Svaka čast onome tko bi imao živaca (i papira) da ovo izračuna, no zato jednim pritiskom na "enter" sav trud koji bi smo uložili svodi se na manje od jedne sekunde.

```
[>expand(((a+b)^2-(c+d)^2)^3);
```

$$12a^2cd^3 - 12a^3bc^2 - 18a^2b^2d^2 - 18a^2b^2c^2 + 12a^2c^3d + 18a^2c^2d^2 - 12a^3bd^2 + 12b^2cd^3 - 6b^4cd + 12b^2c^3d + 18b^2c^2d^2 - 12ab^3d^2 - 12ab^3c^2 + 6abd^4 + 6abc^4 + 24abc^3d + 36abc^2d^2 - 36a^2b^2cd - 6a^4cd - 24a^3bcd - d^6 + a^6 + 24abcd^3 - 24ab^3cd + b^6 - c^6 + 3b^2c^4 + 3a^2c^4 + 15a^2b^4 + 6a^5b + 3a^2d^4 - 3a^4c^2 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 - 3a^4d^2 + 6ab^5 + 3b^2d^4 - 15c^4d^2 - 3b^4d^2 - 3b^4c^2 - 20c^3d^3 - 6c^5d - 15c^2d^4 - 6cd^5$$

Naredba *simplify*

Često nam se dogodi da ne znamo kako bismo počeli rješavati zadatak, a potrebno je samo poništiti ili smanjiti broj istih izraza. Za to nam u Mapleu služi naredba *simplify* koja pojednostavljuje izraze i u kombinaciji s naredbom *expand* može biti vrlo korisna.

Primjer 5. Proširi i pojednostavi sljedeći izraz

$$(x^3 + 1)^2 - (x^2 + 1)^3.$$

Rješenje:

```
[>simplify((x^3+1)^2-(x^2+1)^3);
```

$$2x^3 - 3x^4 - 3x^2$$

Jasno da ovaj izraz nije baš osobito težak. Naredba *simplify* vrlo je korisna da pojednostavi izraz, no ona dolazi do izražaja tek kada znamo nešto o našem izrazu. U tome će nam pomoći sljedeća naredba.

Naredba *assume*

Problem s Mapleom je u tome što on ne zna kakva je nepoznanica x . Tako na primjer on sljedeći izraz ne zna pojednostaviti.

```
[> simplify(sqrt(x^2));
```

$$\sqrt{x^2}$$

S obzirom na to da on ništa ne zna o našem broju, potrebno je iznijeti pretpostavku. Neka je naša pretpostavka da je $x \in \mathbb{R}$.

```
[> simplify(sqrt(x^2), assume=real);
```

$$|x|$$

Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{R}^+$.

```
[> simplify(sqrt(x^2), assume=positive);
```

x

Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{R}^-$.

```
[> simplify(sqrt(x^2), assume=negative);
```

$-x$

Dakle ponekad moramo dodati uvjete računalu da bi ono znalo riješiti naš problem. Naredba *assume* može stajati sama, ali onda će ona vrijediti u cijelom programu sve dok je ne izmjenimo. Naprimjer napišemo li tu naredbu neke stvari će se odmah pojednostavniti.

```
[> assume(x>0); sqrt(x^2);
```

$x \sim$

S naznakom da nam tilda (\sim) označava da na x postoji neka pretpostavka.

Naredba *subs*

Često nam se događa da nešto moramo supstituirati u neki izraz, pa on postane na neki način jednostavniji. Tu se u Mapleu koristi naredba *subs*.

Primjer 6. Dokaži ako je $a + b + c = 0$ da vrijedi

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0.$$

Rješenje:

```
[> simplify(subs(a=-b-c,a^3+b^3+c^3-3*a*b*c));
```

0

Primjer 7. Ako je $x + y + z = 0$, pojednostavnite izraz

$$\frac{x^7 + y^7 + z^7}{xyz(x^4 + y^4 + z^4)}.$$

(Županijsko natjecanje za 1. razred, 2001.g.)

Rješenje:

```
[> simplify(subs(x=-y-z,(x^7+y^7+z^7)/x/y/z/(x^4+y^4+z^4)));
```

$\frac{7}{2}$

Nadam se da sada svi vide korisnost programa, jer onima koji su sudjelovali te godine na županijskom natjecanju taj zadatak nije bio nimalo lak za riješiti zbog svoje tehničke prirode.

Zaključak

Kao što vidimo neke jednostavne računice jako teško možemo izračunati standardnim postupkom. Uvijek možemo pogriješiti negdje. To samo sputava matematiku i druge znanosti koje su ovisne o računima. Programi kao što su Maple, Mathematica, Matlab i sl. dobro će doći svima kojima treba matematički alat u struci. Inače, Maple se može nabaviti posjetom na internet adresu www.maplesoft.com.