43. Međunarodna matematička olimpijada

Ovogodišnja, 43. po redu, međunarodna matematička olimpijada održana je od 19. do 31. srpnja u Glasgowu, Škotskoj. Okupila je najveći broj natjecatelja do sada, i to preko 400 njih iz 85 zemalja svijeta. Ekipa koja je predstavljala Hrvatsku izabrana je na Državnom natjecanju u Zadru koje se održalo početkom svibnja. Priliku da predstavljaju Hrvatsku na ovom prestižnom natjecanju dobili su sljedeći učenici:

Ime i prezime	Škola	Nagrada
Tomislav Gracin	V. gimnazija, Zagreb	-
Dijana Kreso	S.Š. Bol, Bol	pohvala
Goran Ljaljić	Gimnazija, Križevci	-
Marjan Polić	Gimnazija A.Vrančića, Šibenik	bronca
Ivan Sikirić	Gimnazija F. Petrića, Zadar	-
Vedran Šohinger	XV. gimnazija, Zagreb	bronca

Učenik V. gimnazije u Zagrebu, Marko Živković, osvojio je pravo sudjelovanja na Matematičkoj olimpijadi, ali zbog poklapanja termina s Olimpijadom iz fizike nije sudjelovao. Voditelji ekipe bili su Željko Hanjš i Mea Bombardelli s Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Prije odlaska u Škotsku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, te na Fakultetu elektrotehnike i računarstva održane su trotjedne pripreme za ovogodišnje olimpijce kao i za one koji će možda sljedeće godine dobiti tu priliku. Učenici su u Glasgow stigli 22. srpnja. Bili smo smješteni u studentskom kampu sveučilišta Stratchclyde University u samom središtu Glasgowa, gdje je sljedeći dan održano i svečano otvaranje. Po dolasku u Glasgow svakoj ekipi dodijeljen je vodič. Naš vodič bila je Nives Radovan, i sama prije svega nekoliko godina uspješna hrvatska natjecateljica, a sada studentica matematike i ekonomije u Škotskoj. Samo natjecanje održano je 24. i 25. srpnja, gdje su natjecatelji oba dana rješavali po 3 zadatka, u vremenu od 4 i pol sata. Sljedeća dva dana organizirani su izleti za učenike. Posjetili smo Lake District u Engleskoj te zabavni park u blizini Glasgowa. Nažalost, od same Škotske nismo mnogo vidjeli. No, izleti na kojima smo bili svakako su bili jako zanimljivi. Za to vrijeme obavljala se koordinacija učeničkih rješenja. Nagrađena su 232 učenika i učenica. Zlatnu medalju dobili su svi učenici koji su osvojili od 29 do 42 boda, srebrnu od 23 do 28 bodova, te brončanu od 14 do 22 boda. Hrvatski predstavnici osvojili su 2 brončane medalje, i to Marijan Polić i Vedran Šohinger, dok je Dijana Kreso dobila pohvalu za maksimalan broj bodova na jednom zadatku. Hrvatska je u ukupnom poretku zauzela 44. mjesto.

Nakon završetka rada komisija organizirano je osmosatno krstarenje niz rijeku Clyde. Nažalost, vrijeme nas tom prilikom nije poslužilo, tako da od izleta od kojeg smo puno očekivali, nismo puno i dobili. No, sve u svemu, i ova je Olimpijada bila odlično organizirana. Domaćin je učinio sve kako bi ovo natjecanje ostalo sudionicima u najljepšem sjećanju. Slobodnog vremena gotovo i nije bilo. A i ono malo što smo imali, provodili smo družeći se s drugim ekipama, popodne najčešće uz mali nogomet, dok smo večeri provodili igrajući razne društvene igre poput planetarno poznate Mafije. Sklopili smo mnogobrojna poznanstva, pa i prijateljstva, od kojih su neka nastavljena i po povratku u Hrvatsku. Već pomalo iscrpljeni, neispavani i puni doživljaja koje ćemo dugo pamtiti i prepričavati, u Hrvatsku smo se vratili 31. srpnja.

Dijana Kreso

Prvih 10 zemalja na MMO:

Članovi naše olimpijske ekipe (slijeva na desno):
Goran Ljaljić (napola na slici)*, Tomislav Gracin, Dijana Kreso, Ivan Sikirić, Vedran Šohinger, Marijan Polić*

Br.	Zemlja	Bodovi
1.	Kina	212
2.	Rusija	204
3.	SAD	171
4.	Bugarska	167
5.	Vijetnam	166
6.	Koreja	163
7.	Tajvan	161
8.	Rumunjska	157
9.	Indija	156
10.	Njemačka	144

Zadatak po izboru uredništva

Naš izbor je 4. zadatak pod a). Podzadatak je krajnje jednostavno za shvatiti, te je uredništvo odlučilo pokazati njegovo rješenje.

Neka je n prirodan broj veći od 1. Neka su $d_1, d_2, \ldots, d_k$ svi pozitivni djelitelji broja n takvi da je

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

Definirajmo $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$. Dokažite da je $D < n^2$.

Rješenje:
Budući je $d_1 = 1$, $2 = d_1 + 1 \leq d_2$, $3 \leq d_2 + 1 \leq d_3, \ldots$ i jer je $d_{i+1-n}d_i = n$ slijedi

$$d_k = n$$

$$d_{k-1} \leq \frac{n}{2}$$

$$\vdots$$

$$d_2 \leq \frac{n}{k-1}$$

$$d_1 = 1$$

Onda je

$$D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k \leq \frac{n}{k-1} + \frac{n}{k-1} \cdot \frac{n}{k-2} + \cdots + \frac{n}{2} \cdot n,$$

dakle

$$D \leq n^2 \left(\frac{1}{n(k-1)} + \frac{1}{(k-1)(k-2)} + \frac{1}{(k-2)(k-3)} + \cdots + \frac{1}{2} \right).$$

Sjetimo se sada dosjetke koju smo učili na početku prvog razreda

$$\frac{1}{i(i-1)} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}.$$

Što znači da je

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(k-2)(k-1)} + \frac{1}{n(k-1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}) + \frac{1}{n(k-1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{n(k-1)} = 1 - \frac{n-1}{n(k-1)} < 1,$$

čime dobivamo da je

$$D < n^2. \square$$