Školsko natjecanje iz matematike 2002.

V. GIMNAZIJA, 18. veljače 2002.

I ove godine održano je školsko natjecanje iz matematike koje je organizirao aktiv matematike. Natjecanje je trajalo 3 sata, navodimo zadatke. Najviše rangirani učenici uspješno su se plasirali na daljnja natjecanja.

Zadaci za prvi razred

1. Izračunaj:
$$(2y^2+2y):\left[\frac{x^2-1}{(1+xy)^2-(x+y)^2}+\frac{4}{(1-y)^2}-\frac{3}{1-y^2}\right].$$
2. Dokaži da je broj $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10$ pozitivan za svaki realan broj a.
3. Ovisno o parametru $a \in \mathbb{R}$ diskutiraj rješenje nejednadžbe:
$$ax+4>1-2x.$$
4. Ako umnošku triju uzastopnih parnih prirodnih brojeva pribrojimo njihov udvostručen zbroj i oduzmemo kub srednjeg broja, dobit ćemo 20. Koji su to brojevi?
5. Komad papira razrežemo na četiri dijela. Neke od dobivenih dijelova ponovo razrežemo na četiri dijela i tako nastavimo. Možemo li na ovaj način dobiti 999 papirića?

Zadaci za drugi razred

1. Ako su u trokutu zadane veličine b, c i $\alpha = 120°$, dokaži da je duljina simetrale kuta s_α jednaka $s_\alpha = \dfrac{b \cdot c}{b+c}$.
2. Ako je $z \in \mathbb{C}$ takav da je $z + z^{-1} = 1$, izračunaj $z^{2000}+z^{2001}+z^{2002}+z^{2003}+z^{2004}$.
3. Riješi jednadžbu
$$(x^2+x-1)(x^2+x-2)(x^2+x-3)(x^2+x-4)=24$$
u skupu $\mathbb{R}$.
4. Za koje realne brojeve a jednadžba $(1-x)(2x-a)=2$ ima samo negativne brojeve za rješenja?
5. Izračunaj sumu svih neparnih četveroznamenkastih brojeva sa znamenkama iz skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$ (znamenke se mogu ponavljati).

Zadaci za treći razred

1. Riješi jednadžbu $3^{\sin 2x+2\cos^2 x}+3^{1-\sin 2x+2\sin^2 x}=28$.
2. Nađi sva realna rješenja nejednadžbe $5x^2+2x+3<2\sin x$.

3. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ dva okomita promjera kružnice polumjera 1 sa središtem u O. Oko A opisana je kružnica kroz C i ona siječe $\overline{AB}$ u točki E. Oko B opisan je luk kružnice kroz O i neka on siječe luk CE u točki F. Dokaži da je

$$|EF| = \sqrt{\frac{8-5\sqrt{2}}{2}}.$$

4. U pravilnu uspravnu četverostranu piramidu upisana je kugla. Udaljenost središta kugle od vrha piramide iznosi a, a pobočke piramide zatvaraju kut α s ravninom osnovke. Izračunaj oplošje piramide.

5. Pretpostavimo da se puž giba pravocrtno po ravnoj površini konstantnom brzinom i neka se svakih 15 minuta okrene za $90°$. Dokaži da se na početnu točku može vratiti samo nakon cijelog broja sati.

Zadaci za četvrti razred

1. Za koju vrijednost od x je šesti član razvoja binoma

$$\left(\sqrt{2^{\log(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{|x-2|\log 3}}\right)^m$$

jednak 21, ako znamo da binomni koeficijenti drugog, trećeg i četvrtog člana predstavljaju redom prvi, treći i peti član aritmetičkog niza. (Pri tome uzmimo da je $\left(\sqrt{2^{\log(10-3^x)}}\right)^m$ prvi član u binomnom razvoju).

2. Riješi jednadžbu $(x+i)^7 - (x-i)^7 = 0$.

3. Ako su elipsa i hiperbola konfokalne (tj. imaju zajedničke fokuse), one se sijeku pod pravim kutem. Dokaži!

4. Dokaži nejednakost:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}, \quad \text{za } n \geq 1.$$

5. Odredi najveći član niza $\dfrac{(2n)!}{2002^n}$ ili dokaži da ne postoji. Isto za najmanji član.

ODABRANA RJEŠENJA NA STRANICI 36.