Dr. sc. Dominika Crnjac Milić[1]

UDK 519.8
Pregledni članak

MODEL EKONOMIJE SLOBODNOG TRŽIŠTA

Sažetak

U ovom je radu prezentiran model ekonomije koja se ravna po principu slobodnog tržišta. U praksi se uvijek uz primarni model javlja i dualni. Za primarnu je varijablu uzeta količina proizvedene robe, a za dualnu varijablu obračunata cijena. Vidjet ćemo koliko ekonomski principi modeliraju ekonomiju. Pokazat ćemo da se u ravnoteži ekonomije sva poduzeća ponašaju kao da pripadaju jednoj velikoj kompaniji koja maksimira svoj profit.

Ključne riječi: tržište, dual, model, ekonomija, transponirani vektor, optimizacija, profit, resurs

1. Uvod

U ekonomiji bilo koje zemlje od interesa je biti pobjednik u tržišnom natjecanju. Zadatak je tržišne ekonomije polučivanje maksimalnog uspjeha uz poštivanje pozitivnih ekonomskih principa slobodnog tržišta. Drugim riječima, uz poštivanje ekonomskih principa postići maksimalan profit i ostvariti maksimalnu zaradu uz minimalnu investiciju u resurse.

Problemi uvjetne minimizacije vrlo se često javljaju u primjenama.

To je problem tipa $\min\left\{f(x): x \in P\right\}$

$\max\left\{f(x): x \in P\right\}$,

gdje je $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ realna funkcija,

a P podskup od $\mathbb{R}^n$.

Prethodno navedeni zapis je simbolički zapis problema traženja minimuma (maksimuma) funkcije f na skupu P.

Za skup P kažemo da je skup dopustivih točaka ili područja minimizacije (maksimizacije), a za funkciju f kažemo da je funkcija cilja.

Točka $v \in P$

je primjerice rješenje problema minimizacije

ako je , $f(v) \leq f(x), \forall x \in P$

a maksimizacije ako je znak nejednakosti obrnut.

Budući da ćemo se baviti problemom iz ekonomije, onda je P određen uvjetima proizvodnje, a f je profit. Ukoliko je f linearni funkcional, a P konveksni poliedarski skup, problem se zapisuje u obliku ,

$\min\left\{z^{\tau}x : Ax \leq b\right\}$,

pri čemu $z \in \mathbb{R}^n$ je zadani vektor,

$A \in \mathbb{R}^{m*n}$ matrica i

$b \in \mathbb{R}^m$ vektor.

2. Dualnost u ekonomiji slobodnog tržišta

Moto svakog poduzeća je: što veća zarada uz što manje investicije u resurse. Ovo je, zapravo, osnovna karakteristika robnonovčane privrede. Drugo pravilo karakterizira slobodno tržište: cijena pada ako je ponuda veća od potražnje. U ovom ćemo radu pokazati kako oba principa modeliraju ekonomiju.

Budući da se uz primarni model u praksi uvijek javlja i dualni, ovdje ćemo za primarnu varijablu uzeti količinu proizvedene robe, a za dualnu varijablu obračunatu cijenu resursa. Pod pojmom resursa, što se matematičkog modela tiče, podrazumijevamo sirovine, energiju, radnu snagu, posudbe, kredite, amortizaciju, itd. Dakle sve ono što se mora unaprijed osigurati za proizvodni proces i što generira troškove proizvodnje.

3. Model slobodnog tržišta

Označimo sa b_i zalihu i–tog resursa (i=1,...,m) potrebnog za proizvodnju. Tada možemo reći da je za jedinicu proizvoda j u proizvodnji potreban iznos od α_{ij} jedinica sirovine i.

Prema prethodnom možemo zaključiti da zaliha nije potrošena ako je $Ax \leq b$, gdje je x ukupna proizvodnja. Zadaća poduzeća je da proizvede x_j proizvoda j tako da maksimizira ukupnu vrijednost proizvodnje:

$z^{\tau}x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j$, uz uvjet $Ax \leq b$, $x \geq 0$ pri čemu je z^{τ}

transponirani vektor, što je primarni problem.

U ekonomskoj se praksi javlja potreba upita za cijenu resursa. Ako su cijene $y_1,...,y_m$ nije teško izračunati profit[2] poduzeća, ukupan prihod umanjen za ukupni trošak $z^{\tau}x-y^{\tau}Ax=(z^{\tau}-y^{\tau}A)x$

Općepoznato je da trgovac resursima želi podići cijenu kad god je u mogućnosti, sve dok njegovi kupci zarađuju, tj. dok je profit proizvođača pozitivan.

Ukoliko cijene postanu prevelike, tada proizvođač posluje s gubitkom i prirodno je da razmišlja o prestanku proizvodnje ili traži novog dobavljača koji nudi niže cijene. Ako ne nađe takvog, proizvođač prestaje proizvoditi proizvod čiji troškovi proizvodnje prelaze njegovu tržišnu vrijednost, tj. ako je $(z^{\tau}-y^{\tau}A)<0$, tada je $x_j=0$.

Ravnoteža nastupa kada je profit jednak nuli. Po zakonitosti tržišne ekonomije, sve dok je ponuda resursa veća od potražnje, njihova će se cijena umanjivati, imat će stalnu tandenciju pada.

Nastupaju dvije mogućnosti:

- ili se cijene resursa i dalje umanjuju
- ili proizvođač organizira proizvodnju tako da iskoristi sve resurse koje ima na raspolaganju.

Produkt $y^{\tau}(Ax-b)$ je vrijednost nepotrošenih resursa.

Ako je $y^{\tau}(Ax-b)i<0$,

proizvođač je potrošio više i-tog resursa nego što ima na zalihi, pa se mora zadužiti. Potrošaču se to isplati jedino ako je y_i=0, tj. ako je i-ti resurs besplatan.

Dakle cilj je proizvođača organizirati proizvodnju tako da nema gubitka ili dobiti besplatne resurse ako je $y^{\tau}(Ax-b)_i<0$, tada je $y_i=0$.

Model: U uvjetima slobodnog tržišta proizvodnja je optimalna ako

- Proizvođač posluje s profitom nula :$(z^{\tau}-y^{\tau}A)x=0$.
- Preostale zalihe su bez vrijednosti: $y^{\tau}(Ax-b)x=0$

Ovo su uvjeti optimalnosti kad proizvođač maksimira zaradu $z^{\tau}x$ na uvjete $Ax \leq b$, $x \geq 0$ ili minimizira vrijednost sirovina $y^{\tau}b$ uz uvjete i $z^{\tau} \geq y\,A$ i $y \geq 0$.

Iz dualnosti[3] slijedi da su optimalne vrijednosti z^{τ} i $y^{\tau}b$ od jednake.

Ovaj model ne uzima u obzir samo jedno poduzeće nego cijelu ekonomiju. Zaključak koji proizlazi iz ovog modela jest:

1 Dr. sc. Dominika Crnjac Milić, Elektrotehnički fakultet u Osijeku, 31000 Osijek, Kneza Trpimira 2B

2 Pavlović, I.: Poslovna matematika za ekonomiste, Sveučilište u Mostaru, Mostar, 1997., str. 114.

3 Barković, D.: Osnove operacijskih istraživanja I, Ekonomski fakultet Osijek, 1989., str. 40.

U ravnoteži tržišne ekonomije sva se poduzeća ponašaju kao da pripadaju jednoj velikoj kompaniji koja maksimira svoj profit.

Iz prethodnog zamjećujemo da lokalno natjecanje između poduzeća vodi globalnoj kooperaciji u cijeloj ekonomiji. Prethodni model ukazuje na situaciju tržišta kad postoji ravnoteža temeljena na spomenutim principima.

U ovom slučaju ne posluje bez gubitka i bez dobitka, što znači da cilj proizvodnje postaje samo proizvodnja, a ne profit.

U praksi se ravnotežno stanje postiže interaktivno, kao u algoritmu simpleks metode. Svaki sudionik tržišne ekonomije u svrhu učinkovitosti npr. reorganizira proizvodnju *(x)* koja povlači promjene cijene *(y)* dobavljača resursa.

U današnje turbulentno vrijeme principi ekonomije nisu linearni, pa slobodno gledajući svjetska ekonomija je daleko od ravnoteže, ali u neravnoteži ima šansi za profit i zaradu.

4. Minimax

Promatrajmo dualnost u kanonskoj formi:
$\max\{z^\tau x{:}Ax\leq b,\ x\geq 0\}$ i $\min\{b^\tau y{:}y^\tau A\geq z^\tau,\ y\geq 0\}$.

Dualnost tvrdi da je max = min uz uvjet da su skupovi

$P\{x{:}Ax\leq b,\ x\geq 0\}$

(skup dopustivih točaka primarnog problema) i skup

$D=\{y{:}y^\tau A\geq z^\tau,\ y\geq 0\}$

(skup dopustivih točaka dualnog problema) neprazni.

Ako prethodno interpretiramo u ekonomskom kontekstu, tada u uvjetima slobodnog tržišta vrijedi

$y^\tau(b-Ax)x=0$

za optimalne x i y u trenutku ravnoteže na tržištu.

Zamijetimo da je lijeva strana prethodne jednakosti razlika između vrijednosti nabavljenih resursa $y^\tau b$ i troškova proizvodnje , $y^\tau Ax$

što predstavlja vrijednost neiskorištenih resursa. Proizvodnja je optimalna ako je ta vrijednost minimalna.

Imamo:

$$\max_{x\in P} z^\tau x=\max_{x\geq 0}\min_{y\geq 0}\{z^\tau x-y\ (Ax-b)\}=\max_{x\geq 0}\min_{y\geq 0}\{(z^\tau-y^\tau A)x+y^\tau b\}$$

Pretpostavimo da se mogu zamijeniti max i min, prethodni izraz postaje:

$$=\min_{x\geq 0}\max_{y\geq 0}\{(z^\tau-y^\tau A)x+y^\tau b\}$$

Ako je $z^\tau-y^\tau A\leq 0$, onda je

$$=\min_{y\geq 0}\max_{x\geq 0}\{(z-y\ A)x+y\ b\}=\infty$$

za svaku vrijednost od y.

Ako je $z^\tau-y^\tau A\leq 0$,

onda je $\max_{x\geq 0}\{(z^\tau-y^\tau A)x+y^\tau b\}=y^\tau b$

i to vrijedi za onu točku $x\in P$ za koju je $(z^\tau-y^\tau A)x=0$

pa možemo pisati da je
$$\min_{y\geq 0}\max_{x\geq 0}=\min_{x\in D} y^\tau b$$

Tvrdnja:

Neka su $v\in P$ i $u\in D$

dopustive točke primarnog i dualnog problema. Tada su v i u optimalni ako i samo ako je (v,u) sedlasta točka Langrangeove funkcije[4]

$L(x,y)=z^\tau x-y^\tau A+y^\tau b$, tj.

$$\min_{y\geq 0}\max_{x\geq 0} L(x,y)=L(v,u)=\max_{x\geq 0}\min_{y\geq 0}L(x,y).$$

Prethodna formula je ekvivalentna teoremu dualnosti, što se jednostavno dokazuje koristeći prethodno razmišljanje, pa je

$$\max_{x\in P} z^\tau x=\min_{y\in D} b^\tau y.$$

Dakle vrijedi teorem dualnosti i $v\in P$ i $u\in D$ su optimalni.

Zamijetimo da vrijedi i obratno, jer teorem dualnosti povlači formulu

$$\min_{y\geq 0}\max_{x\geq 0} L(x,y)=L(v,u)=\max_{x\geq 0}\min_{y\geq 0}L(x,y).$$

a to je zapravo prethodna tvrdnja.

4 I. Pavković, Poslovna matematika za ekonomiste, Sveučilište u Dubrovniku, Sveučilište u Mostaru, 2005., str. 101.-102.

Prethodno možemo zapisati u obliku

Primarni problem	Dualni problem
$\min_{y\geq 0}\max_{x\geq 0} L(x,y)$	$\max_{x\geq 0}\min_{y\geq 0}L(x,y)$.

gdje je

$L(x,y)=z^\tau x-y^\tau Ax+y^\tau b$.

5. Zaključak

U ovom radu prikazan je jedan model ekonomije koji uvažava principe slobodnog tržišta. Pokazano je da se u uravnoteženoj ekonomiji sva poduzeća ponašaju kao da pripadaju velikoj kompaniji koja maksimira svoj profit.

Pokazano je i da ravnoteža nastupa kad je profit nula. U radu je dana jedna interestantna formula koja je ekvivalentna teoremu dualnosti.

Literatura

1. *Barković, D.: Osnove operacijskih istraživanja I, Ekonomski fakultet Osijek, Osijek, 1989.*
2. *Chiang, A.C.: Osnovne metode matematičke ekonomije, Treće izdanje, Mate d.o.o., Zagreb, 1994.*
3. *Dantzig, G.B.: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.*
4. *Martić, Lj.: Matematičke metode za ekonomske analize, Narodne novine, Zagreb, 1987.*
5. *Nesterov, Y., Nemirovskii, A.: Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programing, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.*
6. *Neumann, J.: Discussion of a maximum problem, Collected Works, Vol. VI, Oxford, 1963., str. 89.-95.*
7. *Pavlović, I.: Poslovna matematika za ekonomiste, Sveučilište u Mostaru, Mostar, 1997.*
8. *Thomson, G.E.: Linear Programming: An Elementary Introduction, Macmillan, New York, 1971.*
9. *Vallée-Poussin, Ch.J. de la.: Surla méthode de l'approximation minimum, Annales de la Société Scientifigue de Bruxelles, 35, 1911., str. 1.–16.*
10. *Vanderbei, R.J.: Linear Programming: Foundations and Extensions, Second Edition, Springer, New York, 2001.*

***Dr. sc. Dominika Crnjac Milić*[1]**

Free Market Economy Model

Abstract

A model of economy relying on the free market principle is presented in this paper. In practice, in addition to the primary model there is also a dual model. The quantity of produced goods is taken as the primary variable, and calculated price is used as the dual variable. We will see to what extent economic principles model the economy. It will be shown that in economic balance all companies behave like they belong to a single large company which maximises its profit.

Key words: Market, dual, model, economy, transponed vector, optimisation, profit, resource.

1 Doc.dr. sc. Dominika Crnjac Milić, Faculty of Electrical Engineering in Osijek, 31000 Osijek, Kneza Trpimira 2B