14. DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

Siniša Matić
Velebitska 2, Zadar
sinmatic@gmail.com

Natjecanja iz logike za učenike trećih i četvrtih razreda gimnazija i drugih srednjih škola koje u svom planu sadrže nastavni predmet logike, u zajedničkoj organizaciji Agencije za odgoj i obrazovanje*,* Hrvatskog filozofskog društva i Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa, održavaju se od 1998. godine, a od 2001. u sastavu združenog natjecanja iz logike i filozofije. Natjecatelji, većinom učenici prirodoslovno-matematičkih gimnazija, odmjeravaju svoje znanje i vještinu rješavanjem uglavnom složenijih zadataka iz područja tradicionalne i suvremene logike prvoga reda, koje je gdjekad primjereno prošireno zanimljivim i izazovnim zadacima iz neformalne, modalne, temporalne, epistemičke te viševrijednosnih logika. Spomenuta primjerenost ovdje se temelji na trostrukom obziru: obziru prema obradivom gradivu tijekom redovnog školovanja i mentorskog rada s natjecateljima, obziru prema intelektualnim mogućnostima mladih darovitih rješavača i, napokon, obziru prema značaju logike kao neizbježnog oruđa filozofijskih i uopće znanstvenih istraživanja. Sastavljači zadataka za državna natjecanja (a i za međužupanijska natjecanja do 2009. godine), prof. dr. Srećko Kovač i prof. dr. Berislav Žarnić, ni u jednom trenutku ne zanemarujući spomenute obzire, uspjeli su značajno podignuti intelektualni status natjecanja, a time i ugled logike. Ohrabrujuća je i ujedno zanimljiva činjenica da uz vidljiv porast težine zadataka na državnim natjecanjima iz logike tijekom vremena uspješnost natjecatelja pri rješavanju nimalo ne opada (primjerice, 2002. David Tarandek, učenik gimnazije Čakovec, 2005. Luka Nimac i 2010. Luka Mikec, oba učenici gimnazije Franje Petrića iz Zadra, pobjedu su ostvarili s osvojenih 100% bodova).

Ove je pak godine, uz ugodno domaćinstvo gimnazije Vladimira Nazora iz Zadra, od 27. do 29. ožujka bilo posebno uzbudljivo, kako u borbi samih natjecatelja za pobjedu tako i u »nadmetanju« sastavljača i rješavača za pobjedu same logike nad natjecateljskim duhom. Pravo sudjelovanja, temeljem uspjeha na školskim te međužupanijskim natjecanjima, ostvarilo je i iskoristilo 46 učenika iz 12 gimnazija i 9 gradova (Daruvar, Krapina, Osijek, Rijeka, Sisak, Split, Varaždin, Zadar, Zagreb), a prvo mjesto su podijelili Lovro Basioli i Marko Šarlija, učenici gimnazije Franje Petrića iz Zadra, osvojivši 150 od 165 mogućih bodova, za njima s tri boda zaostatka (samo jedan podzadatak manje) Kristijan Kilassa Kvaternik, učenik V. gimnazije iz Zagreba, a potom lanjski pobjednik, također učenik pobjedničke škole, zadarske gimnazije Franje Petrića, Luka Mikec (141 bod).

Iako je svih osam zadataka zbog njihove zanimljivosti i korisnosti vrijedno posebne stručne pozornosti, ovdje ćemo tu pozornost usmjeriti šestom i sedmom zadatku, koji zalaze u natjecateljima dostupno područje metalogike i viševrijednosnih logika. Iako ti zadaci ne spadaju u red logički i tehnički najzahtjevnijih zadataka, od natjecatelja traže, pored stalne pozornosti pri rješavanju, pažljivo čitanje zadatka, razumijevanje postavki te povezivanje naučenog znanja. Radi mogućnosti što potpunijeg uvida, izložit ćemo cjelovito oba zadatka, kako su izvorno postavljena u samom ispitu. Autor oba zadatka je Berislav Žarnić.

Zadatak 6

U namjeri da pokaže da pravila prirodne dedukcije ne mogu biti proizvoljna, Arthur Prior je 1960. uveo poveznik tonk pomoću sljedećih pravila:

- *Uvođenje: p dokazuje (p tonk q)*
- *Isključenje: (p tonk q) dokazuje q*

(a) *Proširimo jezik u sustav naravne dedukcije za iskaznu logiku poveznikom tonk i njegovim pravilima, te tako dobivenu logiku nazovimo ‘tonk logika’. Procijenite točnost sljedećih tvrdnji!*

i. *U tonk-logici bilo koji skup iskaza može dokazati neistinu.*

DA NE

ii. *U tonk-logici svaki se iskaz može dokazati.*

DA NE

iii. *Iskazi iz jezika iskazne logike koji se ne mogu bez dodatnih pretpostavki dokazati u sustavu naravne dedukcije z iskaznu logiku, neće se moći bez dodatnih pretpostavki dokazati ni u tonk-logici.*

DA NE

(b) *Pridodajmo tonk-logici dvovrijednosni semantički sustav iskazne logike, te razmislimo o istinitosnim uvjetima rečenica kojima je oblik p tonk q! Predstavimo semantičku definiciju pomoću tablice kojoj će prvi stupac sadržavati istinitosne vrijednosti lijevoga člana, a prvi redak istinitosne vrijednosti desnoga člana tonk iskaza (u unutarnjem dijelu tablice nalazimo rezultirajuće vrijednosti).*

i. *p → (p tonk q) jest tautologija ako tonk definiramo analogno disjunkciji:*

tonk	*i*	*n*
i	*i*	*i*
n	*i*	*n*

DA NE

ii. *(p tonk q) → q jest tautologija ako tonk definiramo analogno pogodbi (tj. povezniku →):*

tonk	*i*	*n*
i	*i*	*n*
n	*i*	*i*

DA NE

iii. *Unutar semantičkoga sustava iskazne logike moguće je pronaći definiciju za tonk takvu da i p → (p tonk q) i (p tonk q) → q budu tautologije.*

DA NE

(Srećko Kovač, Berislav Žarnić, *Državno natjecanje iz logike 27.−29. ožujka 2011.*, str. 7.)

Taj se zadatak mogao riješiti bez većih teškoća, što su i pokazali natjecatelji. Od 46 natjecatelja njih 19 je svih šest podzadataka riješilo ispravno (dobilo je 6×3=18 bodova), 7 rješavača pet podzataka, 11 rješavača četiri itd.

Evo i obrazloženja ispravnih rješenja!

(a)

i. **U tonk-logici bilo koji skup iskaza može dokazati neistinu. DA!** Uzmimo da je B neki neistinit iskaz, a da polazni skup iskaza sadrži A. Po pravilu uvođenja poveznika »tonk« vrijedi da iz A slijedi (A tonk B), a po pravilu isključenja poveznika »tonk« vrijedi da iz (A tonk B) slijedi B.

ii. **U tonk-logici svaki se iskaz može dokazati. DA!** Iz prethodnog odgovora zaključujemo da se u tonk-logici svaki iskaz može opovrgnuti. A ako je tako, svaki iskaz možemo dokazati tako da opovrgavamo njegov nijek (kao što to pokazujemo na primjeru proizvoljnog iskaza A):

1	$\neg$A	pretpostavka
2	$\neg$A tonk B	uvođenje tonk iz 1
3	$\neg$A tonk $\neg$B	uvođenje tonk iz 1
4	B	isključenje tonk iz 2
5	$\neg$B	isključenje tonk iz 3
6	A	1–5 isključenje $\neg$

iii. **Iskazi iz jezika iskazne logike koji se ne mogu bez dodatnih pretpostavki dokazati u sustavu naravne dedukcije za iskaznu logiku, neće se moći bez dodatnih pretpostavki dokazati ni u tonk logici. NE!** Iz prethodnog podzadatka jasno uviđamo da se svaki iskaz može dokazati u tonk logici, pa tako i oni iskazi koji se u iskaznoj logici mogu dokazati tek uz dodatne pretpostavke.

(b)

i. **p → (p tonk q) jest tautologija ako tonk definiramo analogno disjunkciji. DA!** Ako je p tonk q istovrijedan disjunkciji p ∨ q, onda je p → (p tonk q) istovrijedan iskazu p → (p ∨ q), koji je doista tautologija.

ii. **(p tonk q) → q jest tautologija ako tonk definiramo analogno pogodbi. NE!** Kao što iskaz (p → q) → q nije tautologija (već je istovrijedan disjunkciji p → q), tako ni iskaz (p tonk q) → q ne može biti tautologija.

iii. **Unutar semantičkoga sustava iskazne logike moguće je pronaći definiciju za tonk takvu da i p → (p tonk q) i (p tonk q) → q budu tautologije. NE!**

Pokušajmo izgraditi istinitosnu tablicu u kojoj će oba iskaza biti tautologije:

p	q	p → (p tonk q)	(p tonk q) → q
i	i	i i i	i i
i	n	i i *i*	***n*** i n
n	i	I	i
n	n	I	i

Pokušaj izrade takve istinitosne tablice, kao što se vidi, završava neizbježnim prekršajem protiv načela očuvanja istinitosti. Nije moguće pronaći definiciju tonk iskaza takvu da u istom vrednovanju (drugi redak) čini iskaz p tonk q istinitim (treći stupac) i neistinitim (četvrti stupac). *Općenito nije moguće da iskazi p → r i r → q budu istiniti onda kada je p istinit, a q neistinit*.

Sedmi zadatak zaslužuje posebnu pozornost, jer su ga u cijelosti riješila tek trojica natjecatelja, a nitko od onih iz gornje polovine ljestvice službenog poretka. Poput prethodnog, ujedno predstavlja i malu lekciju iz suvremene povijesti logike.

Zadatak 7

Roy T. Cook je 2005. opisao četverovrijednosnu semantiku iskazne logike u kojoj vrednovanje svakoj rečenici pridružuje točno jednu od sljedećih vrijednosti: T (istinito), B (i istinito i neistinito), N (ni istinito ni neistinito), F (neistinito). Nazovimo T i B 'vrijednostima koje sadrže istinu', a T i N 'vrijednostima koje ne sadrže neistinu'. Definirajmo slijed kao ispunjenje barem jednoga od dva uvjeta: bilo uvjeta nasljeđivanja sadržavanja istine, bilo uvjeta nasljeđivanja nesadržavanja neistine:

Definicija 2 (Cookov slijed) Iz skupa iskaza Γ semantički slijedi iskaz p akko za svako vrednovanje vrijedi da p sadrži istinu ako svi iskazi iz Γ sadrže istinu ili za svako vrednovanje vrijedi da p ne sadrži neistinu ako nijedan iskaz iz Γ ne sadrži neistinu.

(a) Procijenite za svaku od ponuđenih definicija poveznika tonk jamči li ona da (p tonk q) slijedi iz p i istodobno da q slijedi iz (p tonk q) u smislu »Cookova slijeda«!

i.

tonk	*T*	*B*	*N*	*F*
T	*T*	*B*	*T*	*F*
B	*T*	*B*	*T*	*F*
N	*N*	*F*	*N*	*F*
F	*N*	*F*	*N*	*F*

DA *NE*

ii.

tonk	*T*	*B*	*N*	*F*
T	*T*	*B*	*T*	*B*
B	*T*	*B*	*T*	*B*
N	*N*	*F*	*F*	*N*
F	*N*	*F*	*F*	*N*

DA *NE*

iii.

tonk	*T*	*B*	*N*	*F*
T	*T*	*B*	*T*	*B*
B	*T*	*B*	*T*	*B*
N	*N*	*F*	*N*	*F*
F	*N*	*F*	*N*	*F*

DA *NE*

(b) Ispitivanje provedeno u ovome zadatku dokazuje da je moguć semantički sustav koji opravdava Priorova pravila za poveznik tonk.

DA NE

(Srećko Kovač, Berislav Žarnić, *Državno natjecanje iz logike 27.–29. ožujka 2011.*, str. 8.)

Evo kako se zadatak mogao riješiti!

a) Jamči li zadana definicija tonk poveznika da (p tonk q) slijedi iz p i da q slijedi iz (p tonk q), odn. da su iskazi p → (p tonk q) i (p tonk q) → q tautologije? Cookov slijed R ⊦ S nalaže da S ima vrijednosti T ili B kad god R ima neku od njih (neka to bude C_1 slijed), ili da ima vrijednosti T ili N, kad god R ima neku od njih (neka to bude C_2 slijed).

i.

tonk	**T**	**B**	**N**	**F**
T	**T**	**B**	**T**	**F**
B	**T**	**B**	**T**	**F**
N	**N**	**F**	**N**	**F**
F	**N**	**F**	**N**	**F**

Istinitosna vrijednost iskaza p nalazi se u prvom stupcu, istinitosna vrijednost iskaza q u prvom retku, dok je istinitosna vrijednost iskaza (p tonk q) u preostalom kvadratu tablice (16 polja).

p ⊦ (p tonk q): Svjetlijom sivom bojom označena su vrednovanja koja su protuprimjeri C_1 slijeda (Cookov slijed nasljeđivanjem sadržavanja istine), a tamnijom sivom protuprimjeri za C_2 slijed (Cookov slijed nasljeđivanjem nesadržavanja neistine).

Nije potrebno ispitivati slijed (p tonk q) ⊦ q. **Ispravan odgovor: NE.**

ii.

tonk	**T**	**B**	**N**	**F**
T	**T**	**B**	**T**	**B**
B	**T**	**B**	**T**	**B**
N	**N**	**F**	**F**	**N**
F	**N**	**F**	**F**	**N**

Vrijedi p $\vdash$ (p tonk q) prema C_1 slijedu, jer ne nalazimo redak koji započinje vrijednošću sadržavanja istine (T ili B), a negdje u nastavku nema takvu vrijednost.

Slijed (p tonk q) $\vdash$ q ne vrijedi već prema C_1 , jer postoji vrednovanje za koje je (p tonk q) B (sadrži istinu), a q F (ne sadrži istinu), dok prema C_2 ne vrijedi jer postoji vrednovanje za koje je (p tonk q) N (ne sadrži neistinu), a q F (sadrži neistinu). **Ispravan odgovor: NE.**

ii.

tonk	T	B	N	F
T	T	B	T	B
B	T	B	T	B
N	N	F	N	F
F	N	F	N	F

p $\vdash$ (p tonk q) vrijedi prema C_1 kao u ii. zadatku.

(p tonk q) $\vdash$ q vrijedi prema C_2 slijedu jer u svakom stupcu u kojemu je (p tonk q – nutrina tablice) T ili N (dakle, ne sadrži neistinu), ujedno i q (vodoravni obrub tablice) T ili N (ne sadrži neistinu).

Ispravan odgovor: DA.

b) **Ispravan odgovor: DA**. Ako postoji semantički sustav u kojem postoji definicija »tonk« iskaza koja omogućuje da p → (p tonk q) i (p tonk q) → q budu u tom sustavu tautologije (a jedan takav sustav je upravo prikazan u podzadatku iii.), onda taj semantički sustav uz tu definiciju može opravdati Priorova pravila uvođenja i isključivanja poveznika »tonk« koja odgovaraju tim pogodbama kao valjanim iskazima.

Ostaje nam pokušati objasniti zašto je ovaj zadatak bio tako teško rješiv? Susret s novim pojmom slijeda (Cookov slijed) rješavačima je povećao potrebu za pažljivošću pri čitanju ključne definicije. Kroz razgovore s nekim rješavačima utvrđeno je da tu definiciju, vjerojatno zbog zamora, nisu čitali s dostatnom pozornošću, pa su pri čitanju definiciju pojednostavljivali i time ograničili mogućnost rješavanja. Neki su disjunkciju koja je u sastavu »implicitnog definiensa« nepažnjom zamijenili za konjunkciju, a neki su to napravili s pogodbom. Osim toga, njihova je pozornost bila opterećena i četverostrukom podjelom istinitosnih vrijednosti, pri čemu je jedna od njih, vrijednost »N« bila određena ne kao »neistina«, na što su se u redovnom školovanju navikli, nego »ni istina ni neistina«, čega su morali pri rješavanju biti svjesni ne ispuštajući iz vida upravo naučenu, a prilično složenu definiciju Cookovog slijeda. U četverovrijednosnoj logici tako vrednovanje T-N nije protuprimjer za slijed, kao što je to u logici sudova koju snažno poznaju (i utoliko povećavaju vjerojatnost da im pozornost bude ometena tim znanjem). No ključno objašnjenje činjenice da se ambiciozniji i ukupno uspješniji natjecatelji nisu snašli u tom zadatku leži možda u načelu ekonomične raspodjele vremena za rješavanje. Kada rješavač na natjecanju raspolaže ograničenim vremenom za rješavanje većeg broja zadataka, a želi pritom dobiti što više bodova, prednost daje zadacima koje brzo može razumjeti i koji donose više bodova (malo traže, mnogo daju). Slijedom toga, Cookov je slijed velika većina rješavača rješavala na kraju, umorna od već napravljenog posla i uznemirena zbog oskudice vremena za posao koji im predstoji. To može objasniti greške pri čitanju definicije koje im se u okolnostima bez takvih pritisaka ne bi događale.

Također, to ukazuje i na važnost dobre pripremljenosti, čak u sportskom smislu, što može biti dobra orijentacija mentorima: s natjecateljima valja vježbati razvoj i održavanje pune, najmanje 90-minutne koncentracije, koliko će im trebati na natjecanju.

Iako bi se moglo pomisliti kako je loše rješavanje sedmog zadatka znak da je isti neprimjeren, ovdje bismo mogli tvrditi upravo suprotno, da je za natjecatelje najkorisniji. Baš to što je jedan takav zadatak ostao neriješen i najpripremljenijim rješavačima, kao »bodovno nepotrošen« i nakon natjecanja zaokupljao im je zanimanje pozivajući ih da neklasičnu viševrijednosnu logiku sagledavaju mirno, rasterećeni rješavačkih pritisaka koji navode volju i mišljenje obrađivati problem taman onoliko koliko je potrebno da se dođe do predviđenog rješenja traženog, i da je tako doživе potpunije, otvorenije i slobodnije, kao jednu živu, razvojnu mogućnost. Pitanja poput »postoji li za svako proizvoljno deduktivno pravilo semantički sustav koji bi ga mogao opravdati«, »koliko minimalno logika mora sadržavati vrijednosti da bi se Priorov ‘tonk’ poveznik mogao uključivati i isključivati prema njegovim pravilima« spadaju u red istraživački poticajnih pitanja koja mlade znanstvene umove mogu na pravi način potaknuti i usmjeriti. U tom smislu bi bilo vrlo poželjno da svako državno natjecanje sadrži barem jedan dovoljno rješiv i dovoljno neriješen zadatak koji spada u rubna područja učeničkog znanja, kako za obogaćivanje priprema budućih natjecatelja tako i za buđenje nutarnjih poticaja k osobnom napredovanju u logici neovisno o natjecateljskim ambicijama (koje su, iako nesporno snažne, za većinu natjecatelja i jedine pokretačice za temeljit i ozbiljan rad na razumijevanju, jasnoći i točnosti logičkog promišljanja, ipak donekle i ograničavajuće, dajući prednost (inženjerskim) vještinama rješavanja postavljenih zadataka nad (znanstvenim i filozofijskim) vještinama istraživanja i problematizacije).

Za kraj jedno općenito zapažanje. Činjenica da se na državnom natjecanju iz logike već dugi niz godina susreću, između ostalih i naši najbolji mladi matematičari, fizičari i informatičari, kojima ni veliki međunarodni uspjesi nisu strani, snažno doprinosi dragocjenom porastu ugleda logike (pa time posredno i filozofije) u vrijednosnoj svijesti mladih znanstvenika, te svakako treba pozdraviti i na sve raspoložive načine podržati autore testova natjecanja u njihovom nastojanju da težina zadataka bude i dalje izazovna za najprobranije mlade intelektualne moćnike naše zemlje.