Dr. Ivan Lončar

Fakultet organizacije i informatike
Varaždin

UDK : 513
Znanstveni rad

NEPRAZNOST LIMESA INVERZNOG SISTEMA

Nepraznost limesa inverznog sistema ima osobitu ulogu pri istraživanju neprekidnosti raznih topoloških svojstava. U radu su izloženi razni rezultati o nepraznosti limesa inverznog sistema i sistematizirane metode dokazivanja.

Inverzni sistem; inverzni limes; nepraznost.

0. U V O D

U ovom radu termin **prostor** označava topološki prostor, a termin **preslikavanje** **f** : X → Y **neprekidno preslikavanje** između topoloških prostora X i Y. Ne pretpostavlja se da prostor zadovoljava bilo koji aksiom separacije. Potrebni aksiomi aksiomi separacije navode se eksplicite na odgovarajućem mjestu rada.

Ako je $Y \subseteq X$, tada ClY (IntY, FrY = Bd Y) označava zatvorenje (unutrašnjost, rub) podskupa Y.

Pojam inverznog sistema upotrebljavamo u smislu djela [E]. Inverzni sistem označavamo simbolom $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A\}$. Limes inverznog sistema $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A\}$ označavamo s lim$\underline{X}$. Poznati su primjeri inverznih sistema s praznim limesom [E]. Odavde slijedi da neprazan limes imaju samo inverzni sistemi $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A\}$ kod kojih prostori X_a, $a \in A$, ili preslikavanja f_{ab} zadovoljavaju neke posebne uvjete. Mi ćemo u ovom radu kombinirati obje mogućnosti radi dobivanja raznih teorema o nepraznosti limesa lim$\underline{X}$ inverznog sistema. Slijedeće leme su dobro poznate i često ćemo ih koristiti.

0.1. LEMA.[E : 140]. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A\}$ inverzni sistem i B kofinalan podskup skupa A. Prirodno preslikavanje **h** koje svakoj točki $x = (x_a)$ limesa lim$\underline{X}$ pridružuje točku **h**(x) = (x_b : $b \in B$) je homeomorfizam.

0.2.LEMA.[E : 138]. Svaki zatvoreni podskup Y inverznog limesa limX inverznog sistema $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A\}$ je limes inverznog sistema $\{ \mathrm{Cl}\, f_a(Y), f_{ab} / \mathrm{Cl}\, f_b(Y), A\}$.

1. METODA SKUPOVA X_{ab} I NEPRAZNOST INVERZNOG LIMESA

Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A\}$ inverzni sistem prostora $X_a, a \in A$. Neka je na dalje $Y = \prod \{X_a : a \in A\}$ produkt prostora X_a. Promatrajmo u produktu Y skupove $X_{ab} \subseteq Y$ definirane slijedećom relacijom :

(1) $$X_{ab} = \{ x \in Y : x=(x_c : c \in A),\ f_{ab}(x_b) = x_a \}.$$

Slijedeće leme slijede jednostavno iz definicije inverznog sistema i definicije skupova X_{ab}.

1.1.LEMA. Za svaki inverzni sistem $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ je familija $\{ X_{ab} : a, b \in A\}$ centrirana familija.

1.2.LEMA. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ inverzni sistem prostora X_a. Vrijedi slijedeća relacija

(2) $$\lim \underline{X} = \cap \{ X_{ab} : a, b \in A, a \leq b \}.$$

1.3.DEFINICIJA. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ preslikavaanje sa **zatvorenim grafom** ili **G - zatvoreno** ako je graf $G(f) = \{ (x, y) : y = f(x) \}$ zatvoren u produktu X x Y.

Slijedeća lema je dobro poznata.

1.4.LEMA.[E : 114]. Ako je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje , tada je preslikavanje $F : X \to G(f)$, $F(x) = (x, f(x))$ homeomorfizam .Restrikcija $p / G(f)$ projekcije $p : X \times Y \to X$ je homeomorfizam. Ako je Y T_2 prostor ,tada je G(f) zatvoreni podskup produkta X x Y.

Važnost grafa $G(f_{ab})$ proizlazi iz slijedeće leme.

1.5.LEMA. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ inverzni sistem . Skup X_{ab} je zatvoren u produktu $\Pi \{X_a : a \in A\}$ onda i samo onda kada je $G(f_{ab})$ zatvoren u produktu $X_a \times X_b$, tj. kada je preslikavanje f_{ab} G-zatvoreno .

Dokaz. Dokaz slijedi iz činjenice da je $X_{ab} = G(f_{ab}) \times \Pi\{X_c : c \neq a,b\}$. Primjenom poznate relacije za zatvorenje produkta [E :108 ,2.3.3. Proposition] slijedi da je $\mathrm{Cl}\, X_{ab}\ \mathrm{Cl}\ G(f_{ab}) \times \Pi\{X_c : c \neq a,b\}$. Dakle, ako je $\mathrm{Cl}\, X_{ab} = X_{ab}$, tada je $\mathrm{Cl}\, G(f_{ab}) = G(f_{ab})$ i obratno . Dokaz je gotov.

1.6.LEMA. Ako je $f : X \to Y$ G-zatvoreno preslikavanje ,tada je svaka restrikcija $f_Z : Z \to W \subseteq Y$ G-zatvoreno preslikavanje.

Dokaz. Ako je $G(f)$ zatvoren u produktu $X \times Y$,tada je $G(f_Z) = G(f) \cap (Z \times W)$ zatvoren u potprostoru $Z \times W$. Dokaz je gotov.

Jednostavno se dokazuje i slijedeća lema.

1.7.LEMA. Preslikavanje $f: X \to Y$ je G-zatvoreno onda i samo onda kada za svaki par točaka $x, y, y \neq f(x)$, postoje okoline U i V točaka x i y sa svojstvom $U \cap f(V) = \emptyset$.

Dokažimo sada osnovne teoreme ovog odjeljka koji se odnose na nepraznost inverznog limesa inverznog sistema kvazikompakata.

Kažemo da je prostor X **kvazikompaktan** ako se svaki otvoreni pokrivač prostora X može reducirati na konačan potpokrivač.Ekvivalentno, X je kvazikompaktan [E : 177] ako i samo ako svaka centrirana familija zatvorenih podskupova prostora X ima neprazan presjek .

1.8. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ inverzni sistem kvazikompaktnih prostora X_a i G-zatvorenih veznih preslikavanja f_{ab}. Inverzni limes $\lim \underline{X}$ je neprazan onda i samo onda kada su neprazni prostori X_a.

Dokaz. Skupovi X_{ab} su neprazni i zatvoreni u produktu $\Pi\{X_a : a \in A\}$ (Lema 1.5.).Iz činjenice da je $\Pi\{X_a : a \in A\}$ kvazikompaktan [E : 184] i lema 1.1. , 1.2 .slijedi da je limes $\lim \underline{X}$ neprazan . Dokaz je gotov.

1.9. TEOREM. Limes inverznog sistema iz teorema 1.8. je kvazikompaktan .

Dokaz. Iz leme 1.2. slijedi da je $\lim \underline{X}$ zatvoren podskup produkta ,pa je prema tome kvazikompaktan.

Ako je kvazikompaktan prostor X Hausdorfov tj. T_2 ,kažemo da je **kompaktan.** Iz leme 1.4. i teorema 1.8. sada slijedi poznati teorem o nepraznosti limesa inverznog sistema nepraznih kompakata.

1.10.KOROLAR. [E :188]. Inverzni limes inverznog sistema nepraznih kompaktnih prostora je neprazan kompaktan prostor.

Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ inverzni sistem i B kofinalan dio skupa A. Neka je za svaki $b \in B$ određen $Y_b \subseteq X_b$ i preslikavanje $f_{bb'}/Y_{b'} : Y_{b'} \to Y_b$. Inverzni sistem $\underline{Y} = \{ Y_b, f_{bb'}/Y_{b'}, B \}$ nazivamo **kofinalnim podsistemom** sistema $\underline{X}$ .Ako je $B = A$,govorimo jednostavno o podsistemu.Ako su svi Y_b zatvoreni,kažemo da je podsistem zatvoren.Iz leme 0.1. slijedi da je dovoljno promatrati kofinalne podsisteme.

1.11.LEMA. Svaki podsistem $\underline{Y} = \{ Y_b, f_{bb'}/Y_{b'}, B \}$ sistema $\underline{X}$ iz 1.8 ima neprazan limes ako su Y_b kvazikompaktni neprazni podskupovi prostora X_a .

Dokaz. Preslikavanja $f_{bb'}/Y_{b'}$ su G-zatvorena (lema 1.6.).Primjena teorema 1.8. završava dokaz.

1.12.LEMA. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ inverzni sistem kvazikompaktnih T_1 prostora i G-zatvorenih veznih preslikavanja.Ako su f_{ab} surjekcije , tada su i projekcije $f_a : \lim\underline{X} \to X_a$ surjekcije.

Dokaz. Neka je x_a bilo koja točka prostora X_a.Skupovi $f_{ab}^{-1}(x_a), b>a$,su neprazni,zatvoreni i prema tome kvazikompaktni.Iz leme 1.11. slijedi da inverzni sistem $\{ f_{ab}^{-1}(x_a), f_{bb'}/f_{ab'}^{-1}(x_a), b>a\}$ ima neprazan limes.Primjenom leme 0.1. završavamo dokaz.

1.13.LEMA. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ inverzni sistem kvazikompaktnih prostora i G-zatvorenih veznih preslikavanja.Za svaka dva disjunktna zatvorena podskupa F_1 i F_2 limesa $\lim\underline{X}$ postoji indeks $a \in A$ sa svojstvom $\mathrm{Cl}\, f_a(F_1) \cap \mathrm{Cl}\, f_a(F_2) = \emptyset$.

Dokaz. Pretpostavimo da takav indeks ne postoji . To znači da je za svaki $a \in A$ neprazan skup $Y_a = \mathrm{Cl}\, f_a(F_1) \cap \mathrm{Cl}\, f_a(F_2)$. Inverzni sistem $\underline{Y} = (Y_a, f_{ab}/Y_b, A)$ zadovoljava uvjete leme 1.11. pa ima neprazan limes Y.Iz leme 0.2. slijedi da je $Y \subseteq F1$ i $Y \subseteq F_2$. To je nemoguće jer su F_1 i F_2 disjunktni skupovi.Dobivena kontradikcija dokazuje lemu.

1.14.TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ inverzni sistem kvazikompaktnih prostora i G-zatvorenih surjektivnih veznih preslikavanja.Da bi inverzni limes $\lim\underline{X}$ bio povezan nužno je i dovoljno da prostori Xa budu povezani.

Dokaz.Nuždan dio teorema slijedi iz činjenice da je neprekidna slika povezanog povezan prostor.

Dovoljan dio teorema dokazujemo indirektno.Pretpostavimo da limes nije povezan.To znači da postoje dva disjunktna zatvorena skupa F_1 i F_2 sa svojstvom $F_1 \cup F_2 = \lim\underline{X}$. Iz teorema 1.13. slijedi da postoji indeks $a \in A$ za koji vrijedi $\mathrm{Cl}\, f_a(F_1) \cap \mathrm{Cl}\, f_a(F_1) = \emptyset$. Iz surjektivnosti projekcija f_a slijedi da vrijedi relacija $\mathrm{Cl}\, f_a(F_1) \cup \mathrm{Cl}\, f_a(F_1) = \lim\underline{X}$. Ova relacija i prethodna su u kontradikciji s povezanošću prostora X_a .Dokaz je gotov.

Kažemo da je prostor X **normalan** ako za svaka dva disjunktna zatvorena podskupa F_1 i F_2 prostora X postoje disjunktni otvoreni skupovi U_1 i U_2 sasvojstvima $F_1 \subseteq U_1$ i $F_2 \subseteq U_2$. Treba napomenuti da ne pretpostavljamo da X zadovoljava T_1 aksiom separacije.

1.15.TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ inverzni sistem kvazikompaktnih normalnih prostora i G-zatvorenih surjektivnih veznih preslikavanja. Ako su prostori X_a povezani , tada je i limes $\lim\underline{X}$ povezan.

Dokaz. Možemo ponoviti dokaz prethodnog teorema , ali $\mathrm{Cl} f_a(F_1) \cup \mathrm{Cl}\, f_a(F_1) = \lim\underline{X}$ ne mora vrijediti.U tom slučaju iz relacije $\mathrm{Cl}\, f_a(F_1) \cap \mathrm{Cl}\, f_a(F_1) = \emptyset$ i normalnosti prostora X_a slijedi da postoje otvoreni skupovi U_1, U_2 sa svojstvima $U_1 \in \mathrm{Cl} f_a(F_1)$, $U_2 \in \mathrm{Cl} f_a(F_2)$. Ako je $U_1 \cup U_2 = X_a$,tada odmah dobivamo kontradikciju s povezanošću prostora X_a.Ako je za sve $b>a$ skup $Y_b =$

$X_b - f_{ab}^{-1}(U_1 \cup U_2)$ neprazan ,tada dobivamo inverzni sistem $\underline{Y} = \{ Y_c, f_{bc}/ Y_c, a<b<c\}$. Ovaj sistem zadovoljava uvjete teorema 1.8. te ima neparazan limes Y. Za svaku točku $y \in Y$ vrijedi da je ili $y \in F_1$ ili $y \in F_2$.U svakom slučaju je $f_a(y) \in \mathrm{Cl}\ f_a(F_1) \cup \mathrm{Cl}\ f_a(F1)$ tj. $f_a(y) \notin Y_a$.Ovo nije moguće.Dokaz je gotov.

Završimo razmatranja o inverznim sistemima kvazikompakata s nekim primjerima i jednim problemom.

1.16.PRIMJERI.a)Neka je $\underline{X}$ bilo koji inverzni sistem s praznim limesom ([H], [HS], [E]).Uvedimo na svakom prostoru $X_a \in \underline{X}$ antidiskretnu topologiju tj. topologiju u kojoj su jedini otvoreni skupovi prazan skup i cijeli prostor. Dobiveni inverzni sistem $\underline{Y}$ je inverzni sistem kvazikompakata s praznim limesom. Nije teško provjeriti da vezna preslikavanja sistema $\underline{Y}$ nisu G-zatvorena.Primjer pokazuje da vezna preslikavanja moraju zadovoljavati posebne uvjete da bi limes bio neprazan.

b) Promatrajmo sada jedan inverzni niz T_1 kvazikompakata s praznim limesom.Neka je X_n skup prirodnih brojeva u topologiji konačnih komplemenata.Neka je nadalje $f_n : X_{n+1} \to X_n$ definirano realcijom $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1} + 1$ [ST : Example 2].Definiramo li preslikavanja f_{nm} kao odgovarajuće kompozicije preslikavanja f_n ,dobi inverzni niz $X = \{ X_n, f_{nm}, N\}$ nepraznih T_1 nasljednih kvazikompakata s praznim limesom.Nije teško pokazati da preslikavanja f_{nm} nisu G-zatvorena.

1.16.1NAPOMENA.U radu [TH : 36 , REMARK.] naveden je kao istinit ovaj teorem:

Svaki inverzni sistem nepraznih T_1 kvazikompakata sa surjektivnim veznim preslikanjima ima neprazan limes.

Dokaz koji je dan vrijedi međutim samo za preslikavanja sa zatvorenim grafom.

1.17.PROBLEM. Neka je $\underline{X}$ inverzni sistem kvazikompakata.Kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru inverzni limes može biti prazan.Zbog kvazikompaktnosti produkta $\Pi\{X_a : X_a \in X\}$ uvijek je neprazan skup $Y = \cap \{ \mathrm{Cl}X_{ab} : a<b, a,b \in A\}$.Skup Y je na neki način "blizu" inverznog limesa.Reći ćemo da je Y skoro inverzni limes i označiti ga s **s-lim$\underline{X}$**.Bilo bi interesantno izučavati svojstva prostora **s-lim$\underline{X}$**.Da li je **s-lim$\underline{X}$** povezan kada su prostori X_a povezani?

Ovaj odjeljak nastaviti ćemo teoremima o nepraznosti inverznih sistema H- zatvorenih prostora.

Hausdorfov prostor X je H-zatvoren [AU] ako svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X posjeduje konačnu potfamiliju $\{ U_1,...,U_n \}$ sa svojstvom $\mathrm{Cl}\ U_1 \cup ... \cup \mathrm{Cl}\ U_n = X$. Hausdorfov prostor X je H-zatvoren onda i samo onda kada je za svaku centriranu familiju F otvorenih skupova prostora X neprazan presjek

$\cap$ { Cl U : U$\in$ U}. Produkt H-zatvorenih prostora je H-zatvoren ([E : 283], [CF]).

Kažemo da je podskup Y prostora X **θ–zatvoren** ako je jednak presjeku zatvorenja svih otvorenih skupova U$\supseteq$Y. Podskup Y prostora X je **θ–zatvoren** onda i samo onda kada sadrži svaku točku x$\in$X čije okoline U imaju svojstvo da je neprazan presjek Cl U $\cap$ Y.

1.18.LEMA. Ako je X H-zatvoren prostor, tada svaka centrirana familija θ-zatvorenih podskupova prostora X ima neprazan presjek.

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ centrirana familija θ-zatvorenih skupova.Svaki F $\in \mathcal{F}$ je presjek zatvorenja otvorenih skupova familije U^F.Neka je $\mathcal{U}$ unija svih familija U^F. Ova centrirana familija otvorenih skupova ima svojstvo da je presjek zatvorenja njenih elemenata neprazan.Taj presjek jednak je presjeku elemenata familije $\mathcal{F}$.Dokaz je gotov.

Kažemo da je preslikavanje f : X $\rightarrow$ Y **θG-zatvoreno** ako je graf G(f) θ-zatvoren u produktu.

Slijedeća lema dokazuje se jednostavno.

1.19.LEMA. Preslikavanje f : X $\rightarrow$ Y je θG-zatvoreno onda i samo onda kada za svaki par točaka x ,y ,y$\neq$f(x) , postoje okoline U i V točaka x i y sa svojstvom Cl V $\cap$ f(Cl U) = $\emptyset$.

Kažemo da je prostor X potpuno Hausdorfov ako svake dvije različite točke prostora X imaju okoline s disjunktnim zatvorenjima.

1.20.LEMA. Svako preslikavanje f : X $\rightarrow$ Y u potpuno Hausdorfov prostor je θG-zatvoreno.

Dokaz. Neka je x točka prostora X,a y$\neq$f(x) točka prostora Y.Postoje okoline U i V točaka f(x) i y sa svojstvom Cl U$\cap$ Cl V = $\emptyset$.Neka je W okolina točke x za koju je f(W)$\subseteq$U.Sada je Cl V disjunknto s f(Cl W)$\subseteq$ U.Primjena leme 1.19. završava dokaz.

1.21.LEMA. Neka je $\underline{X}$ = { X_a , f_{ab} ,A } inverzni sistem.Ako su preslikavanja f_{ab} θG zatvorena , tada su skupovi X_{ab} θ-zatvoreni u produktu $\Pi\{X_a$:a$\in$A}.

Dokaz. Neka je G(fab) presjek zatvorenja otvorenih u X_a x X_b skupova U neke familije $\mathcal{U}$.Svaki skup UxΠ{X_c : c$\neq$a,b} je otvoren u produktu Π{ Xc : c$\in$A}.Sada je $\cap$ Cl { UxΠ{X_c : c$\neq$a,b} : U$\in\mathcal{U}$} = ($\cap$ { Cl U : U$\in\mathcal{U}$})x Π {X_c : c$\neq$a,b}=G(f_{ab}) x Π {X_c : c$\neq$a,b}= X_{ab} . Dokaz je gotov. Sada možemo dokazati slijedeći teorem o nepraznosti limesa inverznog sistema.

1.22.TEOREM. Neka je $\underline{X}$ = { X_a , f_{ab} ,A } inverzni sistem H-zatvorenih prostora s θG-zatvorenim veznim preslikavanjima. Da bi lim$\underline{X}$ bio neprazan nužno je i dovoljno da prostori X_a budu neprazni.

Dokaz. Teorem slijedi iz činjenice da je produkt H-zatvorenih prostora H-zatvoren i leme 1.18. H-zatvoren prostor koji je potpuno Hausdorfov zove se skoro **kompaktan prostor.**

1.23. KOROLAR. Svaki inverzni sistem nepraznih skoro kompaktnih prostora ima neprazan limes.

Dokaz. Primjeni prethodni teorem jer su vezna preslikavanja, prema lemi 1.20., θG - zatvorena. Dokaz je gotov.

1.23'. PRIMJER. Inverzni limes u teoremu 1.22. kao i korolaru ne mora biti H-zatvoren. **To pokazuje primjer inverznog niza iz rada** [VD : Example (4.1.)]. Neka je Y skup točaka ravnine oblika $a_{mn}=(1/m,1/n)$ ili $c_m = (1/m,0)$, gdje su m i n pozitivni cijeli brojevi. Neka je Y snabdjeven relativnom topologijom ravnine. Neka je a objekt koji ne pripada skupu Y i neka je X unija skupa Y i skupa $\{a\}$. Bazu okolina točke neka čine skupovi $\{ a_{mn} : m>m_0, n>n_0 \} \cup \{a\}$. Nije teško provjeriti da je X skoro kompaktan tj. H-zatvoren i potpuno Hausdorfov prostor. Definiramo sada inverzni niz $\underline{X} = \{ X_n, f_{nm}, N \}$ tako da za svako $n \in N$ bude $X_n = X$. Preslikavanja f_{nm} definiramo kao kompoziciju preslikavanja $f_{nn-1} : X_n \to X_{n-1}$, pri čemu vrijedi : $f_{nn-1}(a_{mn}) = a_{m+1n}$, $f_{nn-1}(c_m) = c_m$, $f_{nn-1}(a) = a$. Jasno je da je $\lim \underline{X}$ sastavljen točaka oblika $(c_n, c_n, \ldots)$ ili $(a, a, a, \ldots)$. Lako je ustanoviti da ima diskretnu topologiju. Iz beskonačnosti i diskretnosti inverznog limesa slijedi da nije H-zatvoren iako su vezna preslikavanja - kao preslikavanja u potpuno Hausdorfov prostor (lema 1.20.) θG-zatvorena.

Neka je $f: X \to R$ neprekidna realna funkcija u skup realnih brojeva R. Skup $f^{-1}(0)$ nazivamo nula-skup. Komplement nula-skupa je **konula-skup.** Skup koji je unija konula-skupova zove se **τ-otvoren** skup. Prostor X je **w-kompaktan** ako je za svaku centriranu familiju $\mathcal{U}$ τ-tvorenih skupova U neprazan presjek $\cap\{ \mathrm{Cl}\, U : U \in \mathcal{U}\}$. Prostor **$\tau$-kompaktan** ako svaki pokrivač iz konula-skupova prostora posjeduje konačan potpokrivač [I]. Svaki H-zatvoreni prostor je w-kompaktan. Produkt w-kompaktnih prostora je w-kompaktan prostor [I:62, Teorema 2 . 2.]. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ **w-zatvoreno** preslikavanje ako je graf G(f) presjek zatvorenja svih konula skupova produkta koji sadrže G(f). Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A\}$ inverzni sitem. Ako je $G(f_{ab})$ presjek zatvorenja nekih konula-skupova, tada je takav i X_{ab}. Dokaz je sličan dokazu leme 1.21. Istim dokazom kao i u slučaju teorema 1.22. imamo ovaj teorem.

1.24. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A\}$ inverzni sistem w-kompaktnih prostora i w-zatvorenih veznih preslikavanja. Da bi $\lim \underline{X}$ bio neprazan nužno je i dovoljno da prostori X_a budu neprazni.

Neka je m beskonačan kardinalan broj. Kažemo da je prostor X **m-kompaktan** ako svaka centrirana familija $s \leq m$ zatvorenih podskupova prostora X ima neprazan presjek. Ekvivalentno, prostor X je m-kompaktan ako se svaki otvoreni pokrivač prostora X od najviše m otvorenih podskupova može reducirati na konačan potpokrivač. Najpoznatiji su $\aleph_0$ - kompaktni ili **prebrojivo kompaktni** prostori [E:258].

1.25.TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_a, f_{ab}, A\}$ inverzni sistem definiran nad usmjerenim skupom A potencije m.Ako su prostori $X_a, a \in A$, neprazni i m-kompaktni, produkt $\Pi\{X_a : a \in A\}$ m-kompaktan, a vezna preslikavanja G-zatvorena,tada je $\lim \underline{X}$ neprazan i m-kompaktan.

Dokaz. Teorem slijedi jednostavno iz činjenica da zatvorenih skupova X_{ab} ima najviše **m** i da je zatvoreni podskup m-kompaktnog prostora m-kompaktan.

NAPOMENA. U preostalom dijelu ovog odjeljka pretpostavljamo da su prostori T_2,pa uvjet G-zatvorenosti veznih preslikavanja ispuštamo jer je automatski zadovoljen.

1.26.KOROLAR. Neka je $\underline{X} = \{X_n, f_{mn}, N\}$ inverzni niz nepraznih prebrojivo kompaktnih prostora.Ako je produkt $\Pi\{X_n : n \in N\}$ prebrojivo komapaktan ,tada je $\lim \underline{X}$ neprazan i prebrojivo kompaktan.

Ovaj korolar možemo primjeniti za neke specijalne vrste prebrojivo kompaktnih prostora jer općenito produkt prebrojivo kompaktnih prostora nije prebrojivo kompaktan [E : 262].Najpoznatija klasa prebrojivo kompaktnih prostora za koju je i produkt od prebrojivo mnogo prostora prebrojivo kompaktan je klasa **nizovno kompaktnih** prostora [E : 267]. To su T_2 prostori u kojima svaki niz ima konvergentan podniz.

1.27.KOROLAR. Neka je $\underline{X} = \{X_n, f_{mn}, N\}$ inverzni niz nepraznih nizovno kompaktnih prostora.Prostor $\lim \underline{X}$ je neprazan i nizovno kompaktan.

***D*-kompaktne** prostore uveo je Bernstein u radu [B] , a izučavani su u radovima [S] i [GS].Neka je D slobodni ultrafiltar na skupu N prirodnih brojeva.Kažemo da je točka x topološkog prostora X D-limes niza $\{x_n : n \in N\}$ točaka x_n prostora X ako je za svaku okolinu U točke x skup $\{n : x_n \in U\}$ element ultrafiltra D. Ako svaki niz u prostoru X ima D-limes,kažemo da je X ***D*-kompaktan.**

Svaki D-kompaktan prostor je prebrojivo kompaktan.D-kompaktnost je nasljedna po zatvorenim podskupovima.Produkt D-kompaktnih prostora je D-kompaktan [S].

1.28.TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_n, f_{mn}, N\}$ inverzni niz nepraznih D- kompaktnih prostora.Prostor $\lim \underline{X}$ je neprazan i D-kompaktan.

Napomenimo na kraju ovog odjeljka da je za D-kompaktne i prebrojivo kompaktne prostore moguće dokazati teoreme analogne teoremima 1.11.-1.16.

2. METODA PODSISTEMA

Metoda podsistema prvi put je objavljena u djelu [Bu : 190] i primijenjena na inverzni sistem kompakata.Druga primjena na inverzni sistem kvazikompakata nalazi se u radu [ST].Slijedeći teorem dokazan je djelu [Bu:190].

2.1.TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ takav inverzni sistem nepraznih skupova X_a u kojem je za svaki $a \in A$ definirana familija S_a podskupova skupa X_a sa svojstvima:

(I) Familija S_a je zatvorena s obzirom na operaciju presjeka,

(II) Svaka centrirana potfamilija $\mathcal{F} \subseteq S_a$ nepraznih podskupova $F \in \mathcal{F}$ ima neprazan presjek.(Ekvivalentno,svaka padajuća potfamilija nepraznih skupova iz S_a ima neprazan presjek).

(III) Za svaku točku $x_a \in X_a$ i svaki $b \geq a$ je $f_{ab}^{-1}(x_a) \in S_b$,

(IV) Za svaki $M_b \in S_b$ i svaki $a \leq b$ je $f_{ab}(M_b) \in S_a$, tada je $\lim \underline{X}$ neprazan i za svaki $a \in A$ vrijedi relacija $f_a(\lim \underline{X}) = \cap \{f_{ab}(X_b): b \geq a\}$.

Za dobro uređene inverzne sisteme moguće je dokazati teoreme analogne prethodnom teoremu.

2.2.TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ dobro uređeni inverzni sistem kofinalnosti $cf(A) \leq m$.Ako za svaki $a \in A$ postoji familija S_a nepraznih podskupova skupa X_a koja ima svojstva :

$(I)_m$ Presjek svake centrirane potfamilije koja ima $\leq m$ elemenata iz S_a je element familije S_a,

$(II)_m$ Ako su elementi familije u $(I)_m$ neprazni,tada je i presjek neprazan,

$(III)_m$ Za svaku točku $x_a \in X_a$ i svaki $b \geq a$ je $f_{ab}^{-1}(x_a) \in S_b$,

$(IV)_m$ Za svaki $M_b \in S_b$ i svaki $a \leq b$ je $f_{ab}(M_b) \in S_a$,

tada je $\lim \underline{X}$ neprazan i za svaki $a \in A$ vrijedi relacija $f_a(\lim \underline{X}) = \cap \{f_{ab}(X_b): b \geq a\}$.

Dokaz. Promatrajmo takozvane **niti** $\{ A_a : A_a \in S_a, f_{ab}(A_b) \subseteq A_a, b \geq a\}$.Takve niti potoje jer je $X_a \in S_a$ za svaki $a \in A$ jer vrijedi $(IV)_m$. Za dvije niti (A_a) i (B_a) neka je $(A_a) \geq (B_a)$ onda i samo onda kada je $A_a \supseteq B_a$ za svaki $a \in A$. Neka je $(A_a^1) \geq (A_a^2) \geq \ldots \geq (A_a^k) \geq \ldots$ padajući niz s najviše m niti. Za svaki $a \in A$ je,zbog $(I)_m$ i $(II)_m$, neprazan skup $B_a = \cap \{ A_a^k : k \in A\} \in S_a$.Provedimo sada **redukciju na surjekcije** tj. dokažimo da je za $b \geq a$ ispunjena relacija $f_{ab}(B_b) = B_a$.Za svaku točku $x_a \in B_a$ neprazan je $Y_{bk} = A_b^k \cap f_{ab}^{-1}(x_a) \in S_a$ (zbog $(I)_m$ i $(III)_m$).Zbo $(II)_m$ neprazan je i presjek $Y_b = \in \{Y_b^k : k \leq m\} = B_b \cap f_{ab}^{-1}(x_a)$.Za svaku točku $y_b \in Y_b$ je $f_{ab}(y_b) = x_a$.

Dokaz relacije $f_{ab}(B_b) = B_a$ je gotov.

Primjenimo sada **metodu transfinitne indukcije** i konstruirajmo jednu točku inverznog limesa.Neka je **a** bilo koji element dobro uređenog skupa A.Neka je

$x_a \in B_a$.Za sve $b \leq a$ $x_b = f_{ba}(x_a)$.Pretpostavimo sada da je za sve $c \leq d$ definirana koordinata x_c točke inverznog limesa.Konstruirajmo koordinatu x_d.Ako je d prve vrste , tada postoji $x_d \in B_d$ sa svojstvom $f_{cd}(x_d)=x_c$.Ako je d druge vrste ,tada iz nepraznosti skupova $f_{cd}^{-1}(x_c) \cap B_d$ i svojstva $(II)_m$ slijedi da je neprazan presjek $B_d \cap (\cap f_{cd}^{-1}(x_c):c \leq d)$.To znači da postoji $x_d \in B_d$ sa svojstvom $f_{cd}(x_d)=x_c, c \leq d$.Transfinitna indukcija ide dalje i dokaz je gotov.

2 .3.NAPOMENA. Iz provedbe transfinitne indukcije vidljivo je da će ona ići sve do slijedećeg rednog broja m^+ ako je surjektivnost već osigurana.Imamo dakle slijedeći teorem.

2 .4.TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ dobro uređeni inverzni sistem kofinalnosti $cf(A) \leq m^+$ sa surjektivnim veznim preslikavanjima.Ako za svaki $a \in A$ postoji familija S_a nepraznih podskupova skupa X_a koja ima svojstva :

$(I)_{m+}$Presjek svake podfamilije koja ima $\leq m$ elemenata iz S_a je element familije S_a ,

$(II)_{m+}$ Ako su elementi familije u $(I)_m$ neprazni,tada je i presjek neprazan,

$(III)_{m+}$ Za svaku točku $x_a \in X_a$ i svaki $b \geq a$ je $f_{ab}^{-1}(x_a) \in S_b$,

$(IV)_{m+}$ Za svaki $M_b \in S_b$ i svaki $a \leq b$ je $f_{ab}(M_b) \in S_a$, tada je $\lim \underline{X}$ neprazan i za svaki $a \in A$ je projekcija $f_a: \lim \underline{X} \to X_a$ surjekcija.

Najpoznatiji primjer familije S_a koja zadovoljava uvjete teorema 2.1. je familija zatvorenih podskupova kompakta.U ovom slučaju iz teorema 2.1. slijedi poznati korolar 1.10.

Slijedeća familija koja zadovoljava uvjete teorema 2.1. je familija zatvorenih podskupova T_1 kvazikompakata uz zatvorena vezna preslikavanja.Sada iz teorema 2.1. slijedi poznati Stoneov teorem [ST] o nepraznosti inverznog sistema nepraznih T1 kvazikompakata uz zatvorena vezna preslikavanja.

Neka je S_a familija Θ-zatvorenih skupova definiranih prije leme 1.18.,tada iz leme 1.18. slijedi da S_a zadovoljava uvjete (I) i (II) teorema 2.1. ako je $\underline{X}$ inverzni sistem H-zatvorenih prostora.Nije teško pokazati da je i uvjet (III) zadovoljen.Ostaje da definiramo preslikavanja koja zadovoljavaju uvjet (IV).Nazovimo dakle **Θ-zatvorenim** preslikavanja koja preslikavaju Θ-zatvorene skupove u Θ-zatvorene. Sada su svi uvjeti teorema 2.1. zadovoljeni pa imamo

2 .5.TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ inverzni sistem nepraznih H-zatvorenih prostora i Θ-zatvorenih veznih preslikavanja.Tada je $\lim \underline{X}$ neprazan prostor.

2 .6.PROBLEM. Da li je $\lim \underline{X}$ u teoremu 2.5. H-zatvoren?

2 .7.PROBLEM. Da li su klase ΘG-zatvorenih i Θ-zatvorenih preslikavanja u inkluzivnom odnosu?

2 .8.NAPOMENA. Drugačija primjena Θ-zatvorenih preslikavanja dana je u radu [L1].

Poznato je da svaka padajuća familija H-zatvorenih skupova ima neprazan presjek [IF:68].Također je poznato da je neprekidna slika H-zatvorenog prostora H-zatvoren prostor.Nadalje,ako f:X→Y neprekidno preslikavanje među H-zatvorenim prostorima,tada je original svake točke prostora Y H-zatvoren.Vrijedi još jača lema.

2.9.LEMA. Neka je f:X→Y neprekidno preslikavanje među H-zatvorenim prostorima ,tada je za svaki H-zatvoreni podskup Z prostora X i svaku točku $y \in Y$ skup $f^{-1}(y) \cap Z$ H-zatvoren.

Dokaz. Neka je *U* centrirana familija otvorenih skupova potprostora $W = f^{-1}(y) \cap Z$. Postoji centrirana familija *V* otvorenih skupova takva da za svaki $U \in \mathcal{U}$ postoji $V \in \mathcal{V}$ sa svojstvom $U = W \cap V$.Proširimo familiju *V* sa skupovima $f^{-1}(O)$,gdje su O okoline točke y. Dobivamo familiju Q.Postoji točka $z \in Z$ koja je u zatvorenju (s obzirom na Z) svih elemenata familije Q.Jasno je da je z u zatvorenju (s obzirom na X) svih skupova $f^{-1}(O)$. Odatle slijedi da je f(z)=y.Dokaz je gotov.

Na temelju svega rečenog i torema 2 . 1. sada lako slijedi ovaj

2 .10.TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ dobro uređeni inverzni sistem H-zatvorenih nepraznih prostora. Tada je $\lim \underline{X}$ neprazan prostor.

Dokaz. Kao i u dokazu teorema 2.2. najprije dokazujemo redukciju na surjekcije.Dokaz se temelji na činjenici nepraznosti padajuće familije nepraznih H-zatvorenih skupova.Zatim koristimo transfinitnu indukciju uz primjenu leme 2.9.Dokaz je gotov.

2 .11. NAPOMENA. Teorem 2.10. prvi put dokazan je u radu [FP] uz pretpostavku o surjektivnosti veznih preslikavanja.Naš dokaz pokazuje da se ta pretpostavka može izostaviti.

Neka je *H* klasa H-zatvorenih prostora u kojima svaka centrirana familija H-zatvorenih skupova ima neprazan H-zatvoren presjek.Tada vrijedi ovaj teorem.

2 . 12.TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ inverzni sistem H-zatvorenih nepraznih prostora klase *H*.Tada je $\lim \underline{X}$ neprazan.

Dokaz. Primjena teorema 2.1. i definicije klase *H*.

2 . 13.PROBLEM. Da li postoji prostor klase *H* koji nije kompakt (skoro kompakt)?

Kažemo da T_2 prostor X **lagano kompaktan** ako svaka prebrojiva centrirana njegovih nepraznih otvorenih podskupova U_n ima neprazan presjek $\cap \{ \mathrm{Cl} U_n \}$.

Potpuno regularan lagano kompaktan prostor zove se **pseudokompaktan** prostor.

Dokažimo sada slijedeći teorem.

2 . 14.TEOREM.Neka je $\underline{X} = \{ X_n , f_{mn}, N \}$ inverzni niz nepraznih lagano kompaktnih prostora s 1. aksiomom prebrojivosti.Ako su vezna preslikavanja otvorena ,tada je lim$\underline{X}$ neprazan.

Dokaz. Za svaki $n \in N$ neprazan je skup $Y_n = \cap \{ Cl\ f_{nm}(X_m) : m \geq n \}$ jer je X_n laganokompaktan a skupovi $f_{nm}(X_m)$ su otvoreni. Neka je y_n bilo koja točka iz Y_n i $\{V_k : k \in N\}$ prebrojiva baza okolina te točke.Odatle slijedi da je $V_k \cap f_{nm}(X_m)$ neprazan za svaki k i m.To znači neprazan i $f_{nm}{-1}(V_k) \in f_{mm'}(X_{m'})$ za svaki k,fiksirani m i svaki $m' \geq m$.Familija $\{ f_{nm}{-1}(V_k) \in f_{mm'}(X_{m'}) \}$ je prebrojiva centrirana familija u lagano kompaktnom prostor X_m.Postoji točka $y_m \in X_m$ koja je zatvorenju elemenata te familije.Lako je zaključiti da je $y_m \in Y_m$ i $f_{nm}(y_m) = y_n$. Odatle slijedi da je $f_{nm}(Y_m) = Y_n$.Primjena totalne indukcije na inverzni sistem $\{Y_m, f_{nm}/Y_m, N\}$ završava dokaz.

2 . 15.PROBLEM.Da li je lim$\underline{X}$ u prethodnom teoremu lagano kompaktan?

Specijalni podsistemi inverznog sistema $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ su kofinalni podsistemi $\underline{X}(x_a) = \{ f_{ab}^{-1}(x_a), f_{bc}/f_{ac}^{-1}(x_a), a \leq b \leq c \}$,gdje je x_a neka točka prostora X_a Očito da je limX neprazan ako je neprazan lim$\underline{X}(x_a)$.Ako je to istina za svaku točku x_a ,tada je projekcija $f_a : \lim\underline{X} \to X_a$ surjekcija. Na temelju ove spoznaje možemo iz svakog prethodno dokazanog teorema dobiti odgovarajući teorem ako svojstva koja su u tom teoremu zahtijevana zahtijevamo samo za podsistem $\underline{X}(x_a)$.Iznesimo ovdje samo jedan primjer za teorem 1.8.Kažimo da je preslikavanje f_{bc} $GX(x_a)$-zatvoreno ako G-zatvoreno preslikavanje $f_{bc}/f_{ac}^{-1}(x_a)$.Iz teorema 1.8. i gornjeg slijedi teorem.

2.15. TEOREM.Neka je $\underline{X} = \{ X_a, f_{ab}, A \}$ inverzni sistem kvazikompaktnih prostora X_a i $GX(x_a)$-zatvorenih veznih preslikavanja f_{bc}. Inverzni limes lim$\underline{X}$ je neprazan onda i samo onda kada su neprazni prostori X_a.

U daljnjem tekstu promatrati ćemo takva preslikavanja f_{ab} za koja originali $f_{ab}^{-1}(x_a)$ imaju svojstvo prebrojive kompaktnosti ili kompaktnosti.Najpoznatija takva preslikavanja su zatvorena preslikavanja.Michael [M] dokazao je slijedeći teorem.

2.16.TEOREM.Neka je $f : X \to Y$ neprekidno zatvoreno preslikavanje normalnog prostora X na T_1 q-prostor Y.Za svaku točku $y \in Y$ je Fr $f^{-1}(y)$ prebrojivo kompaktan.

Pri tome za prostor X kažemo da je **q-prostor** ako za svaku točku $x \in X$ postoji prebrojiva familija $\{U_n : n \in N\}$ okolina točke x sa svojstvom da svaki niz $\{x_n : n \in N\}$,$x_n \in U_n, x_n \neq x_m$ za $m \neq n$, ima gomilište.

Teorem 2.16. poopćavan je od raznih autora.Mi dajemo još jedno poopćenje.

Iz dokaza tog teorema [AP:353] vidljivo je da se normalnost može zamijeniti s prebrojivom normalnošću a zatvorenost preslikavanja s prebrojivom zatvorenošću.

Prebrojivu normalnost prostora uveli su Aleksandrov i Uryson [AU:78].Prostor X je **prebrojivo normalan** ako svaka dva disjunktna zatvorena podskupa prostora od kojih je barem jedan prebrojiv imaju disjunktne okoline.Prostor U_3* iz djela [AU:79] pokazuje da se klasa prebrojivo normalnih prostora razlikuje od klase regularnih prostora,a prostor U_4 da se klasa prebrojivo normalnih prostora razlikuje od klase normalnih prostora.Svaki T_1 prebrojivo normalan prostor je regularan.

Kažemo da je preslikavanje $f:X\to Y$ **prebrojivo zatvoreno** ako je za svaki prebrojiv zatvoreni $Z\subseteq X$ zatvoren i $f(Z)\subseteq Y$.

2.17.PRIMJER. Postoji prebrojivo zatvoreno preslikavanje koje nije zatvoreno.Neka je W_0 skup svih prebrojivih rednih brojeva,a ω_1 prvi neprebrojivi redni broj.Neka je $W_1=W_0\cup\{\omega_1\}$ u uređajnoj topologiji i $X=W_1\times W_0$.Promatrajmo zatvoreni skup $Z=\{(\alpha,\alpha):\alpha\in W_0\}$.Projekcija $p:X\to W_1$ nije zatvorena jer $p(Z)$ nije zatvoren.Nije teško pokazati da je projekcija p prebrojivo zatvorena.

2.18.LEMA. Svako regularno zatvoreno preslikavanje prebrojivo normalnog prostora X je prebrojivo zatvoreno.

Dokaz. Prije svega napomenimo da je preslikavanje regularno zatvoreno ako je slika svakog regularno zatvorenog $Z=\mathrm{ClInt}Z$ zatvorena.Neka je $f:X\to Y$ regularno zatvoreno i $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ zatvoren u X.Neka je $y\notin f(A)$.Zbog prebrojive normalnosti prostora X postoje disjunktne otvorene okoline U i V skupova f-1(y) i A.Očito je $\mathrm{Cl}V\cap U=\emptyset$.Odatle slijedi da zatvoreni skup $f(\mathrm{Cl}\,V)$ sadrži $f(A)$ a ne sadrži y.Dokaz je gotov.

2.19.GENERALIZACIJA MICHAELOVOG TEOREMA. Neka je $f:X\to Y$ prebrojivo zatvoreno preslikavanje prebrojivo normalnog T_1 prostora X na q-prostor Y.Za svaku točku $y\in Y$ je $\mathrm{Fr}\,f^{-1}(y)$ prebrojivo kompaktan.

Dokaz.Ako $\mathrm{Fr}\,f^{-1}(y)$ nije prebrojivo kompaktan,tada postoji prebrojiv diskretan skup $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,..\}\subseteq \mathrm{Fr}\,f^{-1}(y)$.Iz prebrojive normalnosti prostora X slijedi diskretna u X familija okolina $G=\{U_n:n\in N\}$ takvih da je $x_n\in U_n$ .To se dobiva jednostavnom modifikacijom poznatih dokaza [AP:178,Zad.22.].Moguće je U_n odabrati tako da bude $f(U_n)\subseteq V_n$,gdje su V_n okoline točke y koje dolaze u definiciji q-prostora. Kako su točke x_n na granici skupa $f^{-1}(y)$,moguće je odabrati točke $y_n\in U_n\cap(X-f^{-1}(y))$.Zbog diskretnosti familije G je skup $X_1=\{y_n:n\in N\}$ zatvoren.Njegova slika $f(X_1)$ je također zatvorena jer je f prebrojivo zatvoreno.To je nemoguće jer je $f(y_n)\in V_n$ a Y q-prostor u kojem bi $f(X_1)$ morao imati gomilište. Dokaz je gotov.

Naravno da će u primjeni ovog teorema biti potrebno osigurati nepraznost ruba $f^{-1}(y)$.To je moguće osigurati ako je prostor X povezan ili ako je preslikavanje ireducibilno [AP:356,Zad.112.].Skup $Frf^{-1}(y)$ neprazan je također za svaku neizoliranu točku $y \in Y$ ako je f regularno zatvoreno preslikavanje. Naime,u slučaju nepraznog ruba je skup $U=f^{-1}(y)$ regularno otvorena okolina skupa $f^{-1}(y)$.To znači da postoji okolina V točke y sa svojstvom $f^{-1}(V) \supseteq U=f^{-1}(y)$.Odatle slijedi da je V=y tj. y je izolirana točka.Dokažimo sada neke teoreme o nepraznosti inverznog limesa.

2 .20.TEOREM. Neka je $\underline{X} =\{ X_n , f_{nm} ,N\}$ inverzni niz nepraznih prebrojivo normalnih q-prostora X_n bez izoliranih točaka i regularno zatvorenih ireducibilnih preslikavanja f_{nm}.Da bi $\lim\underline{X}$ bio neprazan nužno je i dovoljno da za svaki $n \in N$ bude neprazan skup $Y_n=\cap\{ f_{nm}(X_m):m\geq n\}$.

Dokaz. Skupovi $f_{nm}(X_m)$ su zatvoreni,a za $y_n \in Y_n$ neprazni su skupovi $f_{nm}^{-1}(y_n)\cap f_{mp}(X_p)$. Zbog prebrojive kompaktnosti skupa $f_{nm}^{-1}(y_n)$ neprazan je i presjek svih tih skupova tj. neprazan je $\cap\{ f_{nm}^{-1}(y_n)\cap f_{mp}(X_p)\}= f_{nm}^{-1}(y_n)\cap (\cap f_{mp}(X_p))=f_{nm}^{-1}(y_n)\cap\Psi_m$. To znači da za m>n vrijedi relacija $f_{mn}(Y_m)=Y_n$.Totalna indukcija završava dokaz.

Ako su prostori inverznog sistema parakompaktni,tada su njihovi prebrojivo kompaktni dijelovi kompaktni [E:380].U tom slučaju možemo dokazati ovaj teorem.

2 .21.TEOREM. Neka je $\underline{X} =\{ X_a, f_{ab} ,A\}$ inverzni sistem nepraznih parakompaktnih q-prostora bez izoliranih točaka.Ako su vezna preslikavanja prebrojivo zatvorena i surjektivna,tada je $\lim\underline{X}$ neprazan i projekcije $f_a :\lim\underline{X}\to X_a$ su surjekcije.

Dokaz. Za svako $x_a \in X_a$ imamo sistem $X(x_a)=\{Frf_{ab}^{-1}(x_a),f_{bc}/Frf_{ac}^{-1}(x_a),a\leq b\leq c\}$. To je inverzni sistem nepraznih kompakata koji prema 1.10. ima neprazan limes. Dokaz je gotov.

Posebna vrsta q-prostora su prostori s 1. aksiomom prebrojivosti,a posebna vrsta parakompakata su metrički prostori.Imamo dakle ovaj teorem.

2 .21.TEOREM. Neka je $\underline{X} =\{ X_a, f_{ab} ,A\}$ inverzni sistem nepraznih metričkih prostora bez izoliranih točaka.Ako su vezna preslikavanja prebrojivo zatvorena i surjektivna,tada je $\lim\underline{X}$ neprazan i projekcije $f_a :\lim\underline{X}\to X_a$ su surjekcije.

LITERATURA

[A] Alas O.T. ,*A generaliztion of a Stone - Hanai - Morita theorem* ,Topics Topology ,1974,23 - 38 .

[A U] Aleksandrov P.S. ,Urison P.S. , *Memuar o kompaktnyh topologičeskih prostranstvah* ,Nauka ,Moskva 1971.

[AP] Arhangel'skij A.V. ,Ponomarev V.I. , *Obščaja topologija v zadačah i upražnenijah* ,Nauka ,Moskva 1974.

[B] Bernstein A.R.,*A new kind of compactness of topological spaces* ,Fund. Math. 67 (1970),185-193.

[Bu] Burbaki N., *Obščaja topologija,osnovnye struktury*,Nauka,Moskva,1968.

[CH] Chaber J. , *Remarks on open - closed mappings* ,Fund. Math. 76 (1972),197-208.

[CF] Chevalley C.,Frink O.,*Bicompactness of Cartesian product*,Bull. Amer. Math. Soc. 47(1941),612-614.

[FP] Friedler L.M. and Pettey D.H., *Inverse limits and mappings of minimal topological spaces*, Pacific Journal of Mathematics 71(1977),429-448.

[E] Engelking R . ,*General Topology* ,PWN ,Warszawa 1977.

[H] Henkin L. , *A problem on inverse mapping systems* ,Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950) , 224 - 225.

[HS] Higman G. and Stone A.H., *On inverse systems with trivial limits* ,J. London Math. Soc. 29 (1954) ,233 - 236.

[GS] Ginsburg J. and Saks V.,*Some applications of ultrafilters in topology*, Pac.J.Math. 57(1975),403-417.

[I] Ishii T.,*Some results on w-compact spaces,*UMN 35 (1980),61-66.

[IF] Iliadis S.,Fomin S., *Metod centrirovannyh sistem v teorii topologičeskih prostranstv*,UMN 21(1966),47-76.

[L1] Lončar I.,*Applications of Θ-closed and u-closed sets,*Zbornik radova Fakulteta organizacije i informatike Varaždin 8(1984),237-254.

[M] Michael E., *A note on closed maps and compact sets*,Israel J.Math. 2(1964),173-176.

[S] Saks V., *Ultrafilter invariants in topological spaces,*Trans. Amer.Math.Soc. 241(1978),79-97.

[ST] Stone A.H. , *Inverse limits of compact spaces*, General Topology and its Applications 10 (1979),203 - 211.

[TH] Thomas E.S., *Monotone decompositions of irreducible continua*, Rozprawy Matematyczne 50 ,Warszawa 1966.

[VD] Vinson T.O. and Dickman R.F.,*Inverse limits and absolutes of H-closed spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 66(1977),351-358.*

Primljeno: 1991-07-15

Lončar I. Non-emptiness of inverse limit space

SUMMARY

In the present paper the non-emptiness of inverse limit space is investigated.

The main theorems of Section One are Theorems 1.8. and 1.22. for the nonemptiness of the inverse limit of the inverse system of quasi-compact and H-closed spaces.

Section Two contains the generalization of the well-known Michael theorem.

Some theorems for the non-emptiness of the inverse limit space based on this generalization are given.