Mr. Mirko Čubrilo

Fakultet organizacije i informatike
Varaždin

UDK: 681.372.2
Znanstveni rad

PRAVILO REZOLUCIJE I RELACIJSKE BAZE PODATAKA

Razvoj sistemske programske podrške za računala pete generacije ide u smjeru objedinjavanja glavnih dostignuća prethodne faze razvoja. To su s jedne strane, svakako, relacijske baze podataka kao, slobodno se može reći, ekspertni sistemi vrhunske složenosti, sposobni za obuhvat i veoma složene transakcije ogromnih količina podataka, izloženih svim vratama prostorne i vremenske nestabilnosti. Drugi smjer razvoja kulminirao je implementacijom izražajnih mogućnosti i deduktivne snage računa predikata prvog reda i nekih srodnih logičkih sistema, gotovo u punom obimu. Mislimo pritom na jezik PROLOG i njegove, sada već mnogobrojne, derivate. Ovakva sinteza, naravno, ne bi bila moguća bez odgovarajuće interakcije na teorijskom nivou, između teorije relacijskih baza podataka s jedne i matematičke logike s druge strane. Njena bit je u logičkoj interpretaciji temeljnih pojmova relacijskog modela baze podataka, uključujući i aksiomatiku funkcijskih i višeznačnih zavisnosti. U ovom radu dane su formulacije računa funkcijskih i višeznačnih zavisnosti u duhu računa sudova i izloženi su rezultati koji kulminiraju metateoremom o ekvivalentnosti tih računa i nekih fragmenata računa sudova. Time je postala moguća primjena pravila rezolucije za račun sudova kao pravila izvoda na razne probleme izvedivosti za račune funkcijskih i višeznačnih zavisnosti.

Funkcijska ovisnost; višeznačna ovisnost; pravilo rezolucije, relacijski model

---

1. Uvod

Baze podataka kao kompleksne programe koji podržavaju veoma složene transakcije s velikim informacijskim resursima u realnom vremenu s punim pravom možemo smatrati jednim od vrhova u razvoju ekspertnih sistema. One su izrasle kao odgovor na probleme što su u oblasti obrade podataka nastali primjenom koncepta pojedinačnih datoteka (my file concept). Taj koncept nije mogao osigurati efikasnu obradu narastajućih informacijskih resursa zbog velike redundance koju je proizvodio. Drugi nedostatak tog koncepta bila je velika osjetljivost razvijenih aplikacija na promjene u realizaciji njihovog fizičkog dizajna. Posljednji, a možda i najvažniji, nedostatak ovog koncepta bio je u nemogućnosti da se osigura konzistentnost informacijskih resursa obzirom na demokratizaciju pristupa i povećanje broja osoba koje učestvuju na poslovima obrade.

Terminologija relacijskih baza podataka uključuje pojmove kao što su *relacijska shema, relacija na relacijskoj shemi, atribut, ključ relacijske sheme, funkcijska ovisnost, višeznačna ovisnost itd.* Ovdje ćemo izložiti samo nužni minimum pojmova, a za šire upoznavanje s relacijskim modelom preporučujemo monografije [5] i [8]. Potrebni rezultati o pravilu rezolucije za račun sudova mogu se naći na primjer u [1] ili [3].

2. Osnovni pojmovi i definicije

Varijablu koja može poprimiti svaku od vrijednosti iz zadanog (konačnog ili potencijalno prebrojivog) skupa zovemo atributom. Sam taj skup zovemo domenom danog atributa. Atribute obično označavamo velikim slovima abecede ili riječima sačinjenima od njih i znaka "–", tako da on ne nastupa na početku ili na kraju riječi. Riječi IME–STUDENTA, GODINA–STUDIJA, BROJ–INDEKSA, NAZIV–KOLEGIJA itd. primjeri su atributa. Domenu atributa X označavamo s $\partial(X)$, a njene elemente riječima iz alfanumeričke abecede, koristeći i poštujući uobičajene načine zadavanja skupova. Primjeri mogućih domena za navedene atribute su:

∂(IME–STUDENTA)={IVICA, GORAN, BERISLAV, SONJA},

∂(GODINA–STUDIJA)={1,2,3,4},

∂(BROJ–INDEKSA)=$\{n\in N: 1000\leq n\leq 50000\}$,

∂(NAZIV–KOLEGIJA)={algebra, topologija, teorija-mjere}

Relacijska shema je skup atributa. Svaki skup atributa ne smatramo relacijskom shemom. Relacijske sheme označavamo slovom $\mathcal{R}$, po potrebi s indeksima ili riječima u "lijepo pisanoj" abecedi kojoj to slovo pripada, i uz mogućnost korištenja znaka "–" kao kod zapisivanja atributa. Primjeri relacijskih shema su:

$\mathcal{MALO{-}INDEKS}$={IME–STUDENTA, GODINA–STUDIJA, BROJ–INDEKSA, NAZIV-KOLEGIJA},

$\mathcal{VELIKO{-}INDEKS}$=$\mathcal{MALO{-}INDEKS}$∪{DATUM–ROĐENJA, MJESTO–ROĐENJA, ADRESA, GODINA–UPISA–STUDIJA}

Domena relacijske sheme je unija domena svih njenih atributa.

Relacija na relacijskoj shemi $\mathcal{R}=\{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ je svaki podskup kartezijevog produkta $\prod_{i=1}^{n}\partial(R_i)$, tj. skup svih preslikavanja $t:\mathcal{R}\rightarrow\bigcup_{i=1}^{n}\partial(R_i)$, za koje je ispunjen dodatni uvjet: $t(R_i)\in\partial(R_i)$ za svaki $i\in\{1,\ldots,n\}$. Relacije označavamo malim slovima abecede, po potrebi s indeksima ili riječima u toj abecedi, uz pomoć znaka "–", na već opisani način. Da je r relacija na relacijskoj shemi $\mathcal{R}$ pišemo kao $r(\mathcal{R})$. Umjesto $r(\{R_1, R_2, \ldots, R_n\})$ jednostavno pišemo $r(R_1, R_2, \ldots, R_n)$. Najčešći način zadavanja relacija na relacijskoj shemi je putem tablica, kao u narednom primjeru: zadana je relacijska shema $\mathcal{LETOVI}$={BROJ–LETA, IZ, ZA, POLAZAK, DOLAZAK} i relacija $letovi_1(\mathcal{LETOVI})$ tablicom:

$letovi_1$(	BROJ–LETA,	IZ,	ZA,	POLAZAK,	DOLAZAK)
t_1	25	Čilipi	Pleso	7^{22}	8^{30}
t_2	41	Čilipi	Brnik	7^{52}	8^{52}
t_3	117	Brnik	Sarajevo	13^{00}	13^{50}
t_4	120	Sarajevo	Osijek	17^{15}	17^{35}
t_5	225	Osijek	Pleso	19^{00}	19^{40}

Na istoj relacijskoj shemi može biti zadano više relacija. Na relacijama mogu biti definirane operacije poput izdvajanja, projiciranja, udruživanja, unije, presjeka, razlike i kvocijenta. Dajemo definicije samo onih operacija koje će biti potrebne u daljnjem izlaganju.

Neka je $\mathcal{R}$ relacijska shema, $r(\mathcal{R})$ relacija na njoj, A atribut iz $\mathcal{R}$ i $a\in\partial(A)$. Tada je rezultat operacije izdvajanja, primijenjene na $r(\mathcal{R})$ relacija $(\sigma_{A=a}(r))(\mathcal{R})=\{t\in r(\mathcal{R}): t(A)=a\}$. Ako je iz konteksta jasno o kojoj relacionoj shemi se radi, zapis reduciramo do $\sigma_{A=a}(r)$. Tako je na primjer $\sigma_{IZ=\check{C}ilipi}(letovi_1)=\{t_1, t_2\}$, dok je $\sigma_{ZA=Pleso}(letovi_1)=\{t_1, t_5\}$. Operacije izdvajanja moguće je izvoditi uzastopno, tj. komponirati. Tako je

$$\sigma_{IZ=\check{C}ilipi}(\sigma_{ZA=Pleso}(letovi_1))=\sigma_{IZ=\check{C}ilipi}(\{t_1, t_5\})=\{t_1\}.$$

Jasno je da je kompozicija operacija izdvajanja komutativna.

Neka je $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{R}$ i $r(\mathcal{R})$ relacija na relacijskoj shemi $\mathcal{R}$. Operaciju projiciranja relacije r na podskup atributa $\mathcal{X}$, u oznaci $\pi_{\mathcal{X}}(r(\mathcal{R}))$, definiramo jednakošću:

$$\pi_{\mathcal{X}}(r(\mathcal{R}))=\{t' : \exists t \in r(\mathcal{R}) \wedge t'=t \upharpoonright \mathcal{X}\},$$

gdje zapis $t \upharpoonright \mathcal{X}$ označava restrikciju preslikavanja t sa skupa $\mathcal{R}$ na $\mathcal{X}$. Ako je $\mathcal{R}$ poznato iz konteksta, zapis operacije reduciramo do $\pi_{\mathcal{X}}(r)$. Slijedi primjer.

Neka je $\mathcal{X}$={BROJ–LETA,IZ,ZA}$\subseteq \mathcal{LETOVI}$. Tada je relacija

$\pi_{\mathcal{X}}(letovi_1)$ zadana tablicom:

$\pi_{\mathcal{X}}(letovi_1)$(BROJ–LETA, IZ, ZA)

	BROJ–LETA	IZ	ZA
t'_1	25	Ćilipi	Pleso
t'_2	41	Ćilipi	Brnik
t'_3	117	Brnik	Sarajevo
t'_4	120	Sarajevo	Osijek
t'_5	225	Osijek	Pleso

Operacija projiciranja je također komutativna.

Operacija udruživanja je binarna operacija na relacijama. Da bismo je mogli primijeniti, moraju biti zadane relacije $r_1(\mathcal{R})$ i $r_2(\mathcal{R})$. Presjek $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ može ali i ne mora biti neprazan. Operaciju udruživanja obilježavamo znakom $\bowtie$ i definiramo je kako slijedi:

$$r_1(\mathcal{R}) \bowtie r_2(\mathcal{R})=\{t:(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \rightarrow \partial(\mathcal{R}_1) \cup \partial(\mathcal{R}_2): t \upharpoonright \mathcal{R}_1 \in r_1 \wedge t \upharpoonright \mathcal{R}_2 \in r_2\}$$

Za $\mathcal{R}_1$={A,B},$\mathcal{R}_2$={C,D}, r_1(A, B) i r_2(C, D) izlazi:

A	B
a_1	b_2
a_2	b_1
a_3	b_3

C	D
c_1	d_1
c_2	d_2

$r_1(A,B) \bowtie r_2(C,D) = r_3$(A, B, C, D)

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_2	c_2	d_2
a_2	b_1	c_1	d_1
a_2	b_1	c_2	d_2
a_3	b_3	c_1	d_1
a_3	b_3	c_2	d_2

Za r_1 iz prethodnog primjera i r_3(B, D) dobivamo:

B	D
b_1	d_1
b_1	d_2
b_2	d_1

$r_1(A,B) \bowtie r_3(B,D) = r_4($ A , B , D)

A	B	D
a_1	b_2	d_1
a_2	b_1	d_1
a_2	b_1	d_1

3. Račun funkcijskih zavisnosti

Tehnika treće normalne forme (3NF) je danas općenito prihvaćeno sredstvo dekompozicije relacijskih shema, koje u aplikacijama izvorno nastaju jednostavnim ispisivanjem atributa s pojedinačnih dokumenata. Ovom dekompozicijom postiže se znatno smanjenje i kontrola redundance u bazi podataka, a isto tako se svodi na minimum opasnost pojave nekonzistentnosti.

Centralni pojam na kojem se zasniva tehnika 3NF je pojam funkcijske zavisnosti atributa na relacijskoj shemi. Počnimo primjerom:

Primjer 1 : Neka je $\mathcal{R}$ ={VOZAČ, LINIJA, DATUM, POLAZAK, ODREDIŠTE} relacijska shema i relacija ruta($\mathcal{R}$)), zadana tablicom:

ruta(

VOZAČ	LINIJA	DATUM	POLAZAK	ODREDIŠTE)
MARKOVIĆ	25	11.svibanj	6^{30}	ZAGREB
MARKOVIĆ	31	13.svibanj	12^{00}	SKOPJE
MARKOVIĆ	42	18.svibanj	11^{15}	BEOGRAD
PETROVIĆ	25	12.svibanj	6^{30}	ZAGREB
PETROVIĆ	33	08.svibanj	13^{25}	LJUBLJANA
PETROVIĆ	25	20.svibanj	6^{30}	ZAGREB
JANKOVIĆ	42	12.svibanj	11^{15}	BEOGRAD
JANKOVIĆ	45	17.svibanj	6^{30}	GOSPIĆ
IVANOVIĆ	42	09.svibanj	11^{15}	BEOGRAD
IVANOVIĆ	45	18.svibanj	6^{30}	GOSPIĆ
IVANOVIĆ	51	01.svibanj	3^{45}	OPATIJA

Semantički gledano, atributi sheme $\mathcal{R}$ nisu međusobno neovisni, u smislu da svaki od njih može poprimati vrijednosti iz svoje domene neovisno o vrijednostima drugih atributa. Ograničenja su posljedica stanja stvari stvarnog svijeta. Tako je na primjer logično da vrijednosti atributa LINIJA jednoznačno određuje vrijednost atributa POLAZAK. To za relaciju ruta($\mathcal{R}$) znači slijedeće: ako u stupcu vrijednosti atributa LINIJA fiksiramo neku (bilo koju) vrijednost (na primjer 25), onda vrijednost atributa POLAZAK u svakom takvom retku mora biti ista (ovdje je to 6^{30}). Drugi primjeri takvih zavisnosti na relacijakoj shemi su:

- atributi DATUM i POLAZAK jednoznačno određuju atribut VOZAČ;
- atribut LINIJA jednoznačno određuje atribut ODREDIŠTE

Velimo još da je atribut VOZAČ funkcijski zavisan o atributima DATUM i POLAZAK, odnosno da postoji funkcijska zavisnost {DATUM, POLAZAK} → VOZAČ. Slijedi formalna definicija:

Definicija 1 : Neka je $\mathcal{R}$ relacijska shema, $r(\mathcal{R})$ relacija na $\mathcal{R}$ i $X, Y \subseteq \mathcal{R}$. Kažemo da relacija $r(\mathcal{R})$ zadovoljava (ispunjava) funkcijsku zavisnost $X \to Y$ i pišemo $r(\mathcal{R}) \models X \to Y$ ako i samo ako je $\pi_Y(\sigma_{X=x}(r(\mathcal{R})))$ jednočlana relacija za svaki $x \in \partial(X)$.

Za funkcijsku zavisnost $X \to Y$, za koju su X (lijeva strana) i Y (desna strana) podskupovi od $\mathcal{R}$, kažemo da je funkcijska zavisnost nad $\mathcal{R}$.

Prethodnoj definiciji ekvivalentna je:

Definicija 2 : Relacija $r(\mathcal{R})$ zadovoljava funkcijsku zavisnost $X \to Y$ ako za svaka dva elementa $t_1, t_2 \in r(\mathcal{R})$, za koja je ispunjeno $t_1(X) = t_2(X)$ slijedi $t_1(Y) = t_2(Y)$.

Ako je zadana relacijska shema $\mathcal{R}$ i relacija $r(\mathcal{R})$, onda ta relacija može biti podvrgnuta raznim izmjenama, bilo da se radi o dopunjavanju relacije novim elementima, brisanju nekih elemenata ili jednostavno o mijenjanju vrijednosti samo nekih atributa u postojećim elementima relacije. Međutim, u svakom trenutku $r(\mathcal{R})$ zadovoljava neki skup funkcijskih zavisnosti, makar samo trivijalnih, tipa $X \to X$. Nije teško uočiti da su neke funkcijske zavisnosti posljedice nekih drugih, u smislu da čim neka relacija zadovoljava svaku od prvih, automatski zadovoljava i ove druge. U primjeru 1, relacija ruta($\mathcal{R}$) zadovoljava funkcijske zavisnosti {LINIJA, DATUM} → POLAZAK i {POLAZAK, VOZAČ} → ODREDIŠTE, ali i zavisnost {VOZAČ, LINIJA, DATUM} → ODREDIŠTE. Dolazimo tako do pojma semantičke posljedice za funkcijske zavisnosti.

Definicija 3 : Neka je $\mathcal{R}$ relacijska shema i $\mathcal{F}$ skup funkcijskih zavisnosti nad $\mathcal{R}$. Kažemo da je funkcijska zavisnost $X \to Y$ nad $\mathcal{R}$ semantička posljedica skupa funkcijskih zavisnosti $\mathcal{F}$ i pišemo $\mathcal{F} \models X \to Y$ ako i samo ako svaka relacija $r(\mathcal{R})$ koja istovremeno zadovoljava sve funkcijske zavisnosti iz $\mathcal{F}$, zadovoljava i zavisnost $X \to Y$.

Formalni račun zahtijeva međutim definiciju pojma logičke posljedice, što opet pretpostavlja poznavanje (shema) aksioma i pravila izvoda. Formulama računa funkcijskih zavisnosti naravno smatramo iste. Navodimo sada sheme aksioma funkcijskih zavisnosti F_1 - F_6, prvi put izloženih u radu [4]. Relaciju logičke posljedice označavamo znakom $\mapsto$, a uniju $A \cup B$ skupova atributa A i B kao AB.

F_1: $\Phi \mapsto X \rightarrow X$ (shema aksioma refleksivnosti)

F_2: $X \rightarrow Y \mapsto XZ \rightarrow Y$ (shema aksioma proširenja)

F_3: $\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\} \mapsto X \rightarrow YZ$ (shema aksioma pribrajanja)

F_4: $X \rightarrow YZ \mapsto X \rightarrow Y$ (shema aksioma oduzimanja)

F_5: $\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \mapsto X \rightarrow Z$ (shema aksioma tranzitivnosti)

F_6: $\{X \rightarrow Y, YZ \rightarrow W\} \mapsto XZ \rightarrow W$ (shema aksioma pseudotranzitivnosti.

Domaća terminologija nije jedinstvena, pa se shema aksioma F_3 naziva i shemom aksioma aditivnosti, a F_4 shemom aksioma projektivnosti.

Jedno pravilo izvoda je *modus ponens za funkcijske zavisnosti*: iz $F \rightarrow G$ i F slijedi G. F i G su općenito skupovi funkcijskih zavisnosti. Ako je neki od njih jednočlani skup, dozvoljeno je ispuštanje vitičastih zagrada. Kao drugo pravilo izvoda koristimo *pravilo spajanja funkcijskih zavisnosti*: iz $X \rightarrow Y$ i $U \rightarrow V$ slijedi $\{X \rightarrow Y, U \rightarrow V\}$. Na ovaj način izbjegavamo korištenje veznika "$\wedge$" računa sudova i na izvjestan našin povećavamo njegovu samosvojnost.

Pojam izvoda definiramo analogno pojmu izvoda računa sudova (vidjeti na primjer [2]).

Primjer 2: Neka je $\mathcal{R} = \{A,B,C,D,E,F,G,H\}$ relacijska shema i $\mathcal{F} = \{AB \rightarrow C, B \rightarrow D, CD \rightarrow E, G \rightarrow A, CE \rightarrow GH\}$ skup funkcijskih zavisnosti nad $\mathcal{R}$.

a) Dokazati da je ispunjeno $\mathcal{F} \mapsto AB \rightarrow E$.

b) Dokazati da vrijedi $\mathcal{F} \mapsto AB \rightarrow G$.

a) 1. $B \rightarrow D$ (element iz $\mathcal{F}$)

2. $B \rightarrow D \mapsto AB \rightarrow D$

(prema shemi aksioma pribrajanja, uvrštavanjem B za X, D za Y i A za Z)

3. $AB \rightarrow D$ (modus ponens iz 1. i 2.)

4. $AB \rightarrow C$ (element iz $\mathcal{F}$)

5. $\{AB \rightarrow D, AB \rightarrow C\}$ (prema pravilu spajanja iz 3. i 4.)

6. $\{AB \to D, AB \to C\} \mapsto AB \to CD$
(prema shemi aksioma pribrajanja, uvrštavanjem AB za X, D za Z i C za Y)
7. $AB \to CD$ (modus ponens iz 5. i 6.)
8. $CD \to E$ (element iz $\mathcal{F}$)
9. $\{AB \to CD, CD \to E\}$
(prema pravilu spajanja iz 7. i 8.)
10. $\{AB \to CD, CD \to E\} \mapsto AB \to E$
(prema shemi aksioma tranzitivnosti, uvrštavanjem AB za X, CD za Y i E za Z)
11. $AB \to E$ (modus ponens iz 9. i 10.)

b) 1. $CE \to GH \mapsto CE \to G$
(prema shemi aksioma oduzimanja, uvrštavanjem CE za X, G za Y i H za Z)
2. $CE \to GH$ (pretpostavka iz $\mathcal{F}$)
3. $CE \to G$ (modus ponens iz 1. i 2.)
4. $AB \to E$ (prema točci a))
5. $AB \to C$ (pretpostavka iz $\mathcal{F}$)
6. $\{AB \to C, AB \to E\}$ (prema pravilu spajanja iz 4. i 5.)
7. $\{AB \to C, AB \to E\} \mapsto AB \to CE$
(prema shemi aksioma pribrajanja, zamjenom AB za X, C za Y i E za Z)
8. $AB \to CE$ (modus ponens iz 6. i 7.)
9. $\{AB \to CE, CE \to G\}$ (prema pravilu spajanja iz 8. i 3.)
10. $\{AB \to CE, CE \to G\} \mapsto AB \to G$
(prema shemi aksioma tranzitivnosti, zamjenom AB za X, CE za Y i G za Z)
11. $AB \to G$ (modus ponens iz 9. i 10.)

Za račun funkcijskih zavisnosti možemo postaviti pitanja adekvatnosti i potpunosti. Analogno značenju pojma adekvatnosti aksiomatizacije računa sudova i izreci metateorema adekvatnosti za nj ([6], tvrdnja 1.11), formulacija metateorema adekvatnosti računa funkcijskih zavisnosti izgleda ovako:

Metateorem 1: Neka je $\mathcal{R}$ relacijska shema, $X \to Y$ funkcijska zavisnost nad $\mathcal{R}$ i $\mathcal{F}$ skup takvih funkcijskih zavisnosti. Ako je ispunjeno $\mathcal{F} \mapsto X \to Y$, onda je ispunjeno i $\mathcal{F} \models X \to Y$.

Dokaz: Dovoljno je dokazati da vrijedi $\Phi \models F_i, i \in \{1, \ldots, 6\}$ i da pravila izvoda modus ponens i pravilo spajanja čuvaju relaciju semantičke posljedice, dane definicijom 3. Pođimo redom.

$F_1: X \to X$. Očito je da skup $\pi_X(\sigma_{X=x}(r(\mathcal{R})))$ sadrži samo jedan element za svaki $x \in \partial(X)$ (sam taj x). Prema tome, na snazi je tvrdnja $\Phi \models X \to X$.

$F_2: X \to Y \vdash XZ \to Y$. Neka je $r(\mathcal{R})$ proizvoljna relacija na relacijskoj shemi $\mathcal{R}$. Skup $\sigma_{XZ=xz}(r(\mathcal{R}))$ ne može imati više elemenata od skupa $\sigma_{X=x}(r(\mathcal{R}))$. Zbog toga ni skup $\pi_Y(\sigma_{XZ=xz}(r(\mathcal{R})))$ ne može imati više elemenata od skupa $\pi_Y(\sigma_{X=x}(r(\mathcal{R})))$. Zbog pretpostavke $\Phi \models X \to Y$, posljednji skup ima najviše jedan element za svaki $x \in \partial(X)$. To dalje znači da je ispunjeno i $\Phi \models XZ \to Y$, a time i $X \to Y \models XZ \to Y$, odnosno $\Phi \models X \to Y \vdash XZ \to Y$.

$F_3: \{X \to Y, X \to Z\} \vdash X \to YZ$. Pretpostavimo da je ispunjeno $\Phi \models X \to Y$ (•) i $\Phi \models X \to Z$ (•) i da nije $\Phi \models X \to YZ$. Posljednje znači da postoji relacija $r(\mathcal{R})$ i njeni elementi t_1, t_2, tako da vrijedi $t_1(X)=t_2(X)$ i $t_1(YZ) \neq t_2(YZ)$. Sada je $t_1(Y) \neq t_2(Y)$ ili $t_1(Z) \neq t_2(Z)$. Prvo je u suprotnosti sa (•), a drugo sa (••).

$F_4: X \to YZ \vdash X \to Y$. Ako je ispunjeno $\Phi \models X \to YZ$, onda je za svaku relaciju $r(\mathcal{R})$ i svaka dva njena elementa t_1 i t_2 na snazi $t_1(YZ)=t_2(YZ)$ ako je $t_1(X)=t_2(X)$. Tim prije je $t_1(Y)=t_2(Y)$, što za sobom povlači $\Phi \models X \to Y$.

$F_5: \{X \to Y, Y \to Z\} \vdash X \to Z$. Redom izlazi: $\Phi \models X \to Y$, $t_1(X)=t_2(X)$ povlači $t_1(Y)=t_2(Y)$, za svaku relaciju $r(\mathcal{R})$ i svaka dva njena elementa t_1 i t_2. $\Phi \models Y \to Z$ povlači za sobom $t_1(Z)=t_2(Z)$ čim je $t_1(Y)=t_2(Y)$. Tranzitivnošću relacije jednakosti izlazi $t_1(Z)=t_2(Z)$. Posljedica je $\Phi \models X \to Z$.

$F_6: \{X \to Y, YZ \to W\} \vdash XZ \to W$. $\Phi \models X \to Y$ povlači $t_1(Y)=t_2(Y)$ čim je $t_1(X)=t_2(X)$ za svaku relaciju $r(\mathcal{R})$. Isto tako je $t_1(W)=t_2(W)$ čim je $t_1(YZ)=t_2(YZ)$. Posljednja jednakost povlači $t_1(Y)=t_2(Y)$ i $t_1(Z)=t_2(Z)$. Neka je sad $t_1(XZ)=t_2(XZ)$. Posljedice su jednakosti $t_1(X)=t_2(X)$ i $t_1(Z)=t_2(Z)$. Prva povlači za sobom jednakost $t_1(Y)=t_2(Y)$, što sa drugom daje $t_1(YZ)=t_2(YZ)$, a to je dovoljno za $t_1(W)=t_2(W)$.

Trivijalno je da pravilo spajanja čuva istinitost, a pravilo modus ponens provjereno je u suštini već na shemama aksioma $F_2 - F_6$.

Da bismo mogli formulirati i dokazati metateorem potpunosti, potrebno je definirati pojmove zatvarača i vanjštine skupa funkcijskih zavisnosti.

Definicija 4: Pod zatvaračem (zatvorenjem) $\mathcal{F}^+$ skupa funkcijskih zavisnosti $\mathcal{F}$ podrazumijevamo najmanji skup koji je zatvoren na primjenu aksioma izvedenih iz shema aksioma $F_1 - F_6$.

Rečeno znači da primjenom aksioma na elemente skupa $\mathcal{F}^+$ nije moguće generirati nove funkcijske zavisnosti, koje već nisu u tom skupu.

Definicija 5 : Pod vanjštinom skupa funkcijskih zavisnosti $\mathcal{F}$ nad relacijskom shemom $\mathcal{R}$ podrazumijevamo skup $\mathcal{F}^- = \mathcal{G} - \mathcal{F}^+$, gdje je $\mathcal{G}$ skup svih funkcijskih zavisnosti nad $\mathcal{R}$.

Metateorem 2 : (metateorem potpunosti računa funkcijsskih zavisnosti)

Neka je $\mathcal{R}$ relacijska shema, $X \to Y$ funkcijska zavisnost nad $\mathcal{R}$ i $\mathcal{F}$ skup takvih funkcijskih zavisnosti. Ako je ispunjeno $\mathcal{F} \models X \to Y$, onda je ispunjeno i $\mathcal{F} \vdash X \to Y$.

Dokaz: Dajemo najprije drugu formulaciju ovog metateorema koja će biti pogodnija za dokaz. Pretpostavimo da je $U \to V$ funkcijska zavisnost nad relacijskom shemom $\mathcal{R}$, ali koja ne pripada skupu $\mathcal{F}'$, tj. $U \to V \in \mathcal{G}$ i $U \to V \notin \mathcal{F}^+$. Tim prije je ispunjeno $\mathcal{F} \not\vdash U \to V$. Pretpostavimo da postoji relacija $r(\mathcal{R})$ koja zadovoljava sve funkcijske zavisnosti iz $\mathcal{F}^+$ i ne zadovoljava $U \to V$. To bi značilo da $\mathcal{F} \not\vdash U \to V$ povlači za sobom $\mathcal{F} \not\models U \to V$, što je obrat po kontrapoziciji meteteorema potpunosti, a to je naravno njemu ekvivalentna formulacija. Prije nego li damo konstrukciju relacije $r(\mathcal{R})$, za koju će vrijediti gore rečeno, napominjemo da za svaki $X \subseteq \mathcal{R}$ postoji maksimalni podskup $Y \subseteq \mathcal{R}$, takav da je $X \to Y$ funkcijska zavisnost nad $\mathcal{R}$. U najgorem slučaju takav Y je sam $\mathcal{R}$. Y zovemo zatvaračem od X i pišemo $Y = X^+$. Neka je sad $\mathcal{R} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ i $\partial(A_i) \supset \{a_i, b_i\}$, za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$. Relaciju $r(\mathcal{R})$ definiramo ovako:

$r(\mathcal{R}) = \{t, t'\}$, gdje je n-orka $t: \mathcal{R} \to \bigcup_{i=1}^{n} \partial(A_i)$ i $t(A_i) = a_i$, dok je t' zadano sa:

$$t'(A_i) = \begin{cases} a_i \text{ za } A_i \in U \\ b_i \text{ u protivnom} \end{cases}$$

Dokažimo najprije da $r(\mathcal{R})$ ne zadovoljava $U \to V$. Zbog $U \subseteq U^+$ ispunjeno je $t(U) = t'(U)$. Kad bi bilo $t(V) = t'(V)$, vrijedilo bi $V \subseteq U^+$. Jer je očito $U \to U^+ \in \mathcal{F}^+$, primjenom (sheme) aksioma F_4, zamjenom U za X i $U^+ \setminus V$ za Y, izašlo bi $U \to V \in \mathcal{F}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $U \to V \in \mathcal{F}^-$. Da dokažemo $r(\mathcal{R})$ zadovoljava svaku funkcijsku zavisnost iz $\mathcal{F}^+$, dovoljno je da se ograničimo na zavisnosti oblika $W \to Z$ za $W \subseteq U^+$. Ako je naime na snazi suprotno, tj. $W \supset U$, onda je $t'(W) \neq t(W)$ prema definiciji $r(\mathcal{R})$ pa ova relacija na trivijalan način zadovoljava funkcijsku zavisnost $W \to Z$. Pretpostavimo zato da je $W \to Z \in \mathcal{F}^+$ i $W \subseteq U^+$. Dokažimo da je funkcijska zavisnost $U \to Z$ element zatvarača skupa $\mathcal{F}^+$. Kao prvo, uočimo da je ispunjeno $U^+ = WW'$ za neki $W' \subseteq \mathcal{R}$. Redom izlazi:

1) $W \to W \in \mathcal{F}^+$ (prema shemi aksioma F_1)

2) $WW'=U^+\rightarrow W\in\mathcal{F}^+$ (iz 1), prema shemi aksioma F_2)
3) $W\rightarrow Z\in\mathcal{F}^+$ (pretpostavka)
4) $U^+\rightarrow Z\in\mathcal{F}^+$ (iz 2) i 3), primjenom sheme aksioma F_5)
5) $U\rightarrow U^+\in\mathcal{F}^+$ (prema definiciji U^+ i pretpostavci $U\subseteq\mathcal{R}$)
6) $U\rightarrow Z\in\mathcal{F}^+$ (iz 4) i 5), primjenom sheme aksioma F_5)

Posljednje povlači za sobom da je $Z\subseteq U^+$ i prema tome je $t(Z)=t'(Z)$ čim je (a jest po pretpostavci) $t'(W)=t(W)$. To naravno znači da relacija $r(\mathcal{R})$ zadovoljava funkcijsku zavisnost $W\rightarrow Z$. Time je metateorem dokazan.

Od velikog značaja za aplikacije je eventualna mogućnost razlaganja (dekompozicije) dane relacije na svoje projekcije na neke podsheme pripadne relacijske sheme. Obrazložimo to detaljnije.

Neka je r relacija nad relacijskom shemom $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2=(\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2)$ i $r_1=\pi_{\mathcal{R}_1}(r)$, $r_2=\pi_{\mathcal{R}_2}(r)$ njene projekcije na $\mathcal{R}_1$ odnosno $\mathcal{R}_2$ i $r'=r_1\bowtie r_2$. Ako je $t\in r$, onda je $t\restriction\mathcal{R}_1\in r_1$ i $t\restriction\mathcal{R}_2\in r_2$. Prema definiciji operacije $\bowtie$, vrijedi $t\in r'$, tj. $r\subseteq r'$ (*). Obrat općenito ne mora vrijediti, kao što pokazuje naredni primjer.

Primjer 3: Neka je $\mathcal{R}_1=\{A,B\}$, $\mathcal{R}_2=\{B,C\}$ i relacija $r(A,B,C)$ zadana tablicom:

$r(A, B, C)$

A	B	C
a	b	c
a'	b	c
a'	b	c'
a''	b'	c''
a''	b'	c'''

Tada je $\pi_{\mathcal{R}_1}(r)=r_1(A, B)$, $\pi_{\mathcal{R}_2}(r)=r_2(B, C)$ i

A	B
a	b
a'	b
a''	b'

B	C
b	c
b	c'
b'	c''
b'	c'''

$r'=(r_1\bowtie r_2)(A, B, C)$

	A	B	C
	a	b	c
t:	a	b	c'
	a'	b	c
	a'	b	c'
	a''	b'	c''
	a''	b'	c'''

Očito je $t\notin r$, što potvrđuje gore rečeno.

U slučaju da vrijedi obrat od (*), a time i r=r', kažemo da se r razlaže bez gubitka informacije na svoje projekcije r_1 i r_2.

Postojanje funkcijskih zavisnosti u određenom kontekstu osigurava dekompoziciju relacije, na način da se ona može potpuno (tj. bez gubitka informacije) rekonstruirati kao rezultat udruživanja svojih projekcija na neke podsheme polazne relacijske sheme. Na snazi je naime naredni metateorem:

Metateorem 3 : Neka su $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ relacijske sheme sa presjekom X. Ako relacija $r(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)$ zadovoljava funkcijsku zavisnost $X \to \mathcal{R}_2$, onda se ona bez gubitka informacije može razložiti na svoje projekcije na $\mathcal{R}_1$, odnosno $\mathcal{R}_2$, tj. ispunjeno je

$$r = \pi_{\mathcal{R}_1}(r) \bowtie \pi_{\mathcal{R}_2}(r)$$

Dokaz: Pretpostavimo da su izabrani elementi $t_1' \in r_1$ i $t_2' \in r_2$, za koje vrijedi $t_1'(X) = t_2'(X)$ i da je $t = t_1' \bowtie t_2'$. Tada postoje n-orke t_1 i t_2 iz r, i vrijedi $t_i' = t_i \upharpoonright \mathcal{R}_1$, odnosno $t_2' = t_2 \upharpoonright \mathcal{R}_2$. Očito je ispunjeno $t_1(X) = t_2(X)$ (*). Ako n-orka t nije element od r, to može biti samo tako da bude $t_1(\mathcal{R}_2 - X) \neq t_2(\mathcal{R}_2 - X)$ (**). Zbog (*) i pretpostavke $X \to \mathcal{R}_2$ ispunjeno je $t_1(\mathcal{R}_2 - X) = t_2(\mathcal{R}_2 - X)$, što je kontradikcija sa (**). Time je metateorem dokazan.

U prethodnom primjeru uvjet (**) iz dokaza metateorema ispunjen je za $t_1 = (a,b,c)$ i $t_2 = (a',b,c')$ jer je $t_1 \upharpoonright C = (c) \neq t_2 \upharpoonright C = (c')$ i zbog toga $t = t_1' \bowtie t_2'$ kao element od $r_1 \bowtie r_2$ nije i element od r.

4. Ekvivalentnost računa funkcijskih zavisnosti i jednog fragmenta računa sudova

Cilj izlaganja u ovom odjeljku bit će uspostavljanje veze između relacije $\models\!\!\!\to$ semantičke implikacije za račun funkcijskih zavisnosti i njoj analogne relacije $\models$ za račun sudova. Preko metateorema potpunosti odgovarajućih aksiomatizacija ova ekvivalentnost prenosi se na relacije sintaktičke implikacije $\vdash\!\!\!\to$ i $\vdash$. Prvi korak ka tom cilju predstavlja svođenje relacije semantičke implikacije za račun funkcijskih zavisnosti na istovjetnu relaciju, ali restringiranu na dvoelementne relacije $r(\mathcal{R})$.

Definicija 1 : Neka je $\mathcal{R} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ relacijska shema i $r(\mathcal{R}) = \{t, t'\}$ dvoelementna relacija. Relaciji r pridružena valuacija je preslikavanje $\ell_r : \mathcal{R} \to \{0,1\}$, za koje je ispunjeno:

$$\iota_r(A_j)=\begin{cases}1, \text{ ako je } t(A_j)=t'(A_j)\\ 0, \text{ ako je } t(A_j)\neq t'(A_j)\end{cases}$$

Primjer 1 : Neka je $\mathcal{R}=\{A,B,C,D,E\}$ relacijska shema i relacija $r(\mathcal{R})$ zadana tablicom:

r(A	B	C	D	E)
a	b	c	d	e
a'	b	c'	d'	e

Očito je $\iota_r(B)=\iota_r(E)=1$ i $\iota_r(A)=\iota_r(C)=\iota_r(D)=0$.

Funkcijskoj zavisnosti $X\to Y$ nad relacijskom shemom $\mathcal{R}$, gdje je $X=\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$ i $Y=\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$ pridružujemo sud:

$$F: (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m) \to (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$$

Sud F ćemo po potrebi označavati i kao $F: X^{\wedge} \to Y^{\wedge}$. Za danu funkcijsku zavisnost $X\to Y$ nad relacijskom shemom $\mathcal{R}$ i dvoelementnu relaciju $r(\mathcal{R})$ možemo zadati interpretaciju pripadnog suda F, restringirajući valuaciju ι_r na skup atributa XY.

Primjer 2 : Neka su relacijska shema $\mathcal{R}$ i relacija $r(\mathcal{R})$ kao u prethodnom primjeru.

a) $\{A,B\}\to E$. Ovo je funkcijska zavisnost tipa $X\to Y$ za $X=\{A,B\}$ i $Y=\{E\}$. Pripadni sud je $F: A\wedge B\to E$. Restrikcija $\iota_r\restriction\{A,B,E\}=\iota_r^{\cdot}$ valuacije ι_r iz prethodnog primjera predstavlja interpretaciju suda F, u kojoj je on istinit. Naime, na snazi je $\iota_r^{\cdot}(A)=0$, što za sobom povlači $\iota_r^{\cdot}(A\wedge B)=0$, a to je dovoljno za $\iota_r^{\cdot}(F)=1$. Istovremeno, lako je utvrditi da relacija $r(\mathcal{R})$ zadovoljava funkcijsku zavisnost $\{A,B\}\to E$.

b) $\{B,E\}\to\{D,A\}$. Očito je da relacija $r(\mathcal{R})$ ne zadovoljava ovu funkcijsku zavisnost. Pripadni sud je $F: B\wedge E\to A\wedge D$. Jer je $\iota_r^{\cdot}(B)=\iota_r^{\cdot}(E)=1$, ispunjeno je i $\iota_r^{\cdot}(B\wedge E)=1$. S druge strane je $\iota_r^{\cdot}(A)=0$, i zbog toga $\iota_r^{\cdot}(A\wedge D)=0$. Krajnja posljedica je $\iota_r^{\cdot}(F)=0$.

Da odnos između istinitosti suda F, pridruženog funkcijskoj zavisnosti $X\to Y$ i činjenice da dana dvoelementna relacija $r(\mathcal{R})$ zadovoljava ili ne tu funkcijsku zavisnost, naznačen prethodnim primjerom, nije slučajan, pokazuje naredni metateorem:

Metateorem 1 : Neka je $X\to Y$ funkcijska zavisnost nad relacijskom shemom $\mathcal{R}$ i $r(\mathcal{R})$ dvoelementna relacija. Relacija $r(\mathcal{R})$ zadovoljava funkcijsku zavisnost $X\to Y$ ako i samo ako je njoj pridruženi sud F istinit u interpretaciji $\iota_r^{\cdot}$.

Dokaz: Pretpostavimo najprije da relacija $r(\mathcal{R})$ zadovoljava funkcijsku zavisnost $X \to Y$ i da, suprotno tvrdnji metateorema, pripadni sud $F: A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \to B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$ nije istinit u interpretaciji ι_r. To znači da je ispunjeno $\iota_r(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m)=1$ i $\iota_r(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)=0$. Prvo povlači za sobom $\iota_r(A_j)=1$, za svaki $j \in \{1,\ldots,m\}$ (*), a drugo $\iota_r(B_k)=0$ za neki $k \in \{1,\ldots,n\}$ (**). Zbog (*) ispunjeno je $t(X)=t'(X)$, a zbog pretpostavke da $r(\mathcal{R})$ zadovoljava $X \to Y$, i $t(Y)=t'(Y)$. Posljednje znači da je $t(B_k)=t'(B_k)$ za svaki $k \in \{1,\ldots,n\}$, što je u suprotnosti sa (**).

Pretpostavimo sada da je sud F istinit u interpretaciji ι_r. Tada je ispunjeno $\iota_r(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)=0$ (*) ili $\iota'(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)=1$ (**). Ako je ispunjeno (*), onda je $\iota'(A_j)=0$ za neki $j \in \{1,\ldots,m\}$. Posljedica je $t(X) \neq t'(X)$, iz čega slijedi da $r(\mathcal{R})$ zadovoljava $X \to Y$. Ako je umjesto (*) na snazi(**), onda je $\iota'(B_k)=1$ za svaki $k \in \{1,\ldots,n\}$. Rezultat toga je $t(Y)=t'(Y)$, što za sobom opet povlači da relacija $r(\mathcal{R})$ zadovoljava $X \to Y$. Time je metateorem dokazan u potpunosti.

Nakon ovoga, moguće je formulirati i dokazati glavni metateorem ovog odjeljka.

Metateorem 2: Neka je $X \to Y$ funkcijska zavisnost nad relacijskom shemom $\mathcal{R}$, $\{A_1,\ldots,A_m\}=X \subseteq \mathcal{R}$, $\{B_1,\ldots,B_n\} \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{F}$ skup funkcijskih zavisnosti nad $\mathcal{R}$. Naredne tri tvrdnje međusobno su ekvivalentne.

1. $\mathcal{F} \models X \to Y$
2) $\mathcal{F} \models X \to Y$ u svijetu dvoelementnih relacija $r(\mathcal{R})$
3) $\mathcal{F} \models F$, gdje je $F:(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \to (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$

Dokaz:

a) 1) povlači 2). Dokaz je trivijalan.

b) 2) povlači 1). Pretpostavimo da ne vrijedi $\mathcal{F} \models X \to Y$. Tada neka relacija $r(\mathcal{R})$ zadovoljava sve funkcijske zavisnosti iz $\mathcal{F}$ i ne zadovoljava $X \to Y$. To znači da postoje elementi $t, t' \in r(\mathcal{R})$, za koje vrijedi $t(X)=t'(X)$ i $t(Y) \neq t'(Y)$. Neka je $r^*(\mathcal{R})=\{t,t'\}$. Očito je da $r^*(\mathcal{R})$ zadovoljava sve funkcijske zavisnosti iz $\mathcal{F}$, ali ne i $X \to Y$. Dokazano je slijedeće: ako neka relacija $r(\mathcal{R})$ zadovoljava sve funkcijske zavisnosti iz skupa $\mathcal{F}$ i ne zadovoljava zavisnost $X \to Y$, onda postoji bar jedna dvoelementna relacija $r^*(\mathcal{R})$, za koju vrijedi to isto. Obrat po kontrapoziciji ove tvrdnje je tvrdnja "2) povlači 1)".

c) 2) povlači 3). Pretpostavimo da je $\iota_r: \mathcal{R} \to \{0,1\}$ interpretacija u kojoj su istiniti svi sudovi, generirani funkcijskim zavisnostima iz $\mathcal{F}$ i u kojoj nije istinit sud generiran zavisnošću $X \to Y$. Stavimo $\mathcal{Q}=\{R \in \mathcal{R} : \iota_r(R)=1\}$. Neka je $r_2(\mathcal{R})=\{t_1, t_2\}$, gdje je $t_1(R)=1$, za svaki $R \in \mathcal{R}$, dok je t_2 definirano ovako:

$$t_2(R)=\begin{cases}1, \text{ ako je } R\in\mathcal{Q}\\ 0, \text{ u suprotnom}\end{cases}$$

Dokažimo najprije da relacija $r_2(\mathcal{R})$ zadovoljava svaku funkcijsku zavisnost iz $\mathcal{F}$. Neka je $U\rightarrow V$ neka (bilo koja) funkcijska zavisnost iz $\mathcal{F}$ za koju je ispunjeno $t_1(U)=t_2(U)$. Zbog definicije t_1 mora biti $t_2(R)=1$ za svaki $R\in U$. To dalje znači da je $U\subseteq\mathcal{Q}$, tj. da je $\ell_r(R)=1$ za svaki $R\in U$, odnosno $\ell_r(U^\wedge)=1$ (•). Da nije $t_1(V)=t_2(V)$, bilo bi $t_1(R)=1$ i $t_2(R)=0$ za neki $R\in V$. To bi dalje značilo da nije $R\in\mathcal{Q}$, odnosno da je $\ell_r(R)=0$, i zbog toga $\ell_r(V^\wedge)=$ $=0$. Ovo, zajedno sa (•) povlači sa sobom $\ell_r(U^\wedge\rightarrow V^\wedge)=0$, što je u kontradikciji s polaznom pretpostavkom. Ostaje još da dokažemo da $r_2(\mathcal{R})$ ne zadovoljava funkcijsku zavisnost $X\rightarrow Y$. Zbog pretpostavke da ona nije istinita u interpretaciji ℓ_r, mora biti $\ell_r(X^\wedge)=1$ i $\ell_r(Y^\wedge)=0$ (••). Pretpostavimo sada da je $t_1(X)=t_2(X)$. Da je ispunjeno $t_1(Y)=t_2(Y)$, vrijedilo bi $Y\subseteq\mathcal{Q}$, odnosno $\ell_r(B_j)=$ $=1$, za svaki $j\in\{1,\ldots,n\}$. To bi za sobom povlačilo $\ell_r(Y^\wedge)=1$, što nije moguće zbog (••).

d) 3) povlači 2). Pretpostavimo da 2) ne vrijedi. Tada postoji dvoelementna relacija $r(\mathcal{R})=\{t,t'\}$ koja zadovoljava sve funkcijske zavisnosti iz $\mathcal{F}$, ali ne i $X\rightarrow Y$. Na već opisani način, relacijom $r(\mathcal{R})$ određena je interpretacija ℓ_r pripadnih sudova $U^\wedge\rightarrow V^\wedge$, za $U\rightarrow V\in\mathcal{F}$ i suda $X^\wedge\rightarrow Y^\wedge$. Dokažimo da je $\ell_r(U^\wedge\rightarrow V^\wedge)$ $=1$ (•) i $\ell_r(X^\wedge\rightarrow Y^\wedge)=0$ (••). Da nije ispunjeno (•), bilo bi $\ell_r(U^\wedge)$ $=1$ i $\ell_r(V^\wedge)=0$, odnosno $t(P)=t'(P)$ za svaki $P\in U$ i $t(Q)\neq t'(Q)$ za neki $Q\in V$. Prvo bi značilo da je $t(U)=t'(U)$, a drugo da nije $t(V)=$ $t'(V)$. Zajedno, to je u suprotnosti s polaznom pretpostavkom da $r(\mathcal{R})$ zadovoljava sve funkcijske zavisnosti iz $\mathcal{F}$. Time je (•) dokazano. Da ne vrijedi (••), bilo bi $\ell_r(X^\wedge)=0$ (•••) ili $\ell_r(Y^\wedge)=$ $=1$ (••••). Ako je ispunjeno (•••), onda je $t(A_j)\neq t'(A_j)$ za neki $j\in\{1,\ldots,m\}$ pa prema tome i $t(X)\neq t'(X)$. Očito tada $r(\mathcal{R})$ zadovoljava $X\rightarrow Y$, što je u suprotnosti s polaznom pretpostavkom. Ako je na snazi (••••), onda je $t(B_j)=t'(B_j)$ za svaki $j\in\{1,\ldots,n\}$, te zbog toga $t(Y)=t'(Y)$. Zaključujemo da i u ovom slučaju $r(\mathcal{R})$ zadovoljava $X\rightarrow Y$, što ponovo daje kontradikciju s polaznom pretpostavkom.

Dokazani metateorem omogućava primjenu pravila rezolucije za račun sudova kao pravila izvoda, na račun funkcijskih zavisnosti. Ilustrirajmo to na narednim primjerima.

Primjer 3 : Neka je $\mathcal{R}=\{A,B,C,D,E,G,H\}$ i $\mathcal{F}=\{AB\rightarrow C, CD\rightarrow E, B\rightarrow D, G\rightarrow A, CE\rightarrow GH\}$ skup funkcijskih zavisnosti nad $\mathcal{R}$. Primjenom pravila rezolucije za račun sudova dokazati da je ispunjeno:

a) $\mathcal{F}\mapsto AB\rightarrow E$

b) $\mathcal{F} \mapsto AB \rightarrow G$

Zadatak je isti kao u primjeru 3.2. Prema metateoremu 3.2., dovoljno je dokazati da vrijedi $\mathcal{F} \models AB \rightarrow E$, odnosno $\mathcal{F} \models AB \rightarrow G$, dok je prema prethodnom metateoremu dovoljno dokazati da je ispunjeno $\mathcal{F}^{\wedge} \models (A \wedge B) \rightarrow E$, odnosno $\mathcal{F}^{\wedge} \models (A \wedge B) \rightarrow G$. Pridružimo najprije zavisnostima iz $\mathcal{F}$ odgovarajuće sudove, koji će činiti skup $\mathcal{F}^{\wedge}$, kako slijedi:

$AB \rightarrow E$	$F_1 : (A \wedge B) \rightarrow C$
$B \rightarrow D$	$F_2 : B \rightarrow D$
$CD \rightarrow E$	$F_3 : (C \wedge D) \rightarrow E$
$G \rightarrow A$	$F_4 : G \rightarrow A$
$CE \rightarrow GH$	$F_5 : (C \wedge E) \rightarrow (G \wedge H)$

Prema metateoremu karakterizacije pojma logičke posljedice (formulacija i dokaz kojega se mogu naći u [1], odnosno [3]) i gore rečenome, da dokažemo a), dovoljno je dokazati da je sud

$$F: \left(\bigwedge_{i=1}^{5} F_i \right) \wedge \neg G$$

kontradiktoran, gdje je $\neg G: \neg((A \wedge B) \rightarrow E)$. Da bismo mogli primijeniti pravilo rezolucije, potrebno je najprije pretvoriti F u konjunktivnu normalnu formu. Za sudove $F_1 - F_5$ i $\neg G$ redom izlazi:

$$F_1: (A \wedge B) \rightarrow C \equiv \neg(A \wedge B) \vee C \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$$
$$F_2: B \rightarrow D \equiv \neg B \vee D$$
$$F_3: (C \wedge D) \rightarrow E \equiv \neg(C \wedge D) \vee E \equiv \neg C \vee \neg D \vee E$$
$$F_4: G \rightarrow A \equiv \neg G \vee A$$
$$F_5: (C \wedge E) \rightarrow (G \wedge H) \equiv \neg(C \wedge E) \vee (G \wedge H) \equiv$$
$$\equiv (\neg C \vee \neg E) \vee (G \wedge H) \equiv (\neg C \vee \neg E \vee G) \wedge (\neg C \vee \neg E \vee H)$$
$$\neg G: \neg((A \wedge B) \rightarrow E) \equiv \neg(\neg(A \wedge B) \vee E) \equiv A \wedge B \wedge \neg E$$

Skup $\mathcal{F}^*$ kao reprezentant suda F izgleda ovako:

$$\mathcal{F}^* = \{\neg A \vee \neg B \vee C, \neg B \vee D, \neg C \vee \neg D \vee E, \neg G \vee A, \neg C \vee \neg E \vee G, A, B, \neg E, \neg C \vee \neg E \vee H\}.$$

Slijedeći niz disjunkta predstavlja rezolutivni izvod identički lažnog disjunkta $\perp$ iz skupa $\mathcal{F}^*$.

1)	$\neg A \vee \neg B \vee C$	(element iz $\mathcal{F}^*$)
2)	$\neg C \vee \neg D \vee E$	(element iz $\mathcal{F}^*$)
3)	$\neg A \vee \neg B \vee \neg D \vee E$	(rezolventa 1) i 2)
4)	$\neg E$	(element iz $\mathcal{F}^*$)

5)	$\neg A \vee \neg B \vee \neg D$	(rezolventa 3) i 4))
6)	$\neg B \vee D$	(element iz $\mathcal{F}^*$)
7)	$\neg A \vee \neg B$	(rezolventa 5) i 6))
8)	B	(element iz $\mathcal{F}^*$)
9)	$\neg A$	(rezolventa 7) i 8))
10)	A	(element iz $\mathcal{F}^*$)
11)	$\perp$	(rezolventa 9) i 10))

b) Sud $\neg G$ sada je $\neg G: \neg((A \wedge B) \rightarrow G) \equiv A \wedge B \wedge \neg G$. Skup $\mathcal{F}^*$ dobije se u ovom slučaju zamjenom disjunkta $\neg E$ disjunktom $\neg G$. Slijedi izvod praznog disjunkta $\perp$.

1)	$\neg C \vee \neg E \vee G$	(element iz $\mathcal{F}^*$)
2)	$\neg G$	(element iz $\mathcal{F}^*$)
3)	$\neg C \vee \neg E$	(rezolventa 1) i 2))
4)	$\neg C \vee \neg D \vee E$	(element iz $\mathcal{F}^*$)
5)	$\neg C \vee \neg D$	(rezolventa 3) i 4))
6)	$\neg B \vee D$	(element iz $\mathcal{F}$)
7)	$\neg C \vee \neg B$	(rezolventa 5) i 6))
8)	$\neg A \vee \neg B \vee C$	(element iz $\mathcal{F}^*$)
9)	$\neg A \vee \neg B$	(rezolventa 7) i 8))
10)	A	(element iz $\mathcal{F}^*$)
11)	$\neg B$	(rezolventa 9) i 10))
12)	B	(element iz $\mathcal{F}^*$)
13)	$\perp$	(rezolventa 11) 12))

5. Račun višeznačnih zavisnosti

Iz metateorema 3.3 vidljivo je da je postojanje funkcijskih zavisnosti pod izvjesnim uvjetima dovoljno za dekompoziciju dane relacije na neke svoje projekcije, bez gubitka informacije. Da to nije i nužan uvjet, pokazuje naredni primjer.

Primjer 1 : Neka su $\mathcal{R}_1=\{A,B\}$, $\mathcal{R}_2=\{B,C\}$ relacijske sheme i r(A,B,C) relacija, zadana tablicom:

r(A , B , C)

A	B	C
a	b	c
a'	b	c
a	b	c'
a'	b	c'

a''	b'	c''	(nastavak)
a''	b'	c'''	

Tada je $\pi_{\mathcal{R}_1}(r)=r_1($ A , B $)$, $\pi_{\mathcal{R}_2}(r)=r_2($ B , C $)$ i

A	B
a	b
a'	b
a''	b'

B	C
b	c
b	c'
b'	c''
b'	c'''

$r'=(r_1 \bowtie r_2)($ A , B , C $)$

A	B	C
a	b	c
a'	b	c
a	b	c'
a'	b	c'
a''	b'	c''
a''	b'	c'''

Očito je r'=r, iako r ne zadovoljava ni jednu od funkcijskih zavisnosti $B \to C$, odnosno $B \to A$, tj. ne zadovoljava pretpostavku iz metateorema 3.3.

Usporedimo li relaciju r s istoimenom relacijom iz primjera 3.3 , uočavamo da su one istovjetne, osim što posljednja ne sadrži trojku t=(a,b,c'). Za relaciju r ispunjeno je k tome slijedeće: sa svake svoja dva elementa t=(x,y,z) i t'=(x',y,z') ona sadrži i element t''=(x,y,z'). Za istoimenu relaciju iz primjera 3.3 to ne vrijedi. Uzmemo li naime za t trojku (a,b,c), a za t' trojku (a',b,c'), onda trojka t''=(a,b,c') ne pripada toj relaciji.

Upravo izrečeno svojstvo relacije r iz gornjeg primjera osnova je za definiciju višeznačnih zavisnosti.

Definicija 1 : Neka je $\mathcal{R}$ relacijska shema, $X,Y \subseteq \mathcal{R}$, $X \cap Y = \emptyset$ i $Z=\mathcal{R}-(XY)$. Velimo da relacija $r(\mathcal{R})$ zadovoljava višeznačnu zavisnost $X \twoheadrightarrow Y$ ako je ispunjen slijedeći uvjet: za svake dvije n-orke t_1 i t_2 iz $r(\mathcal{R})$, za koje je ispunjeno $t_1(X)=t_2(X)$, postoji n-orka t_3 u $r(\mathcal{R})$, takva da je $t_3(X)=t_1(X)$, $t_3(Y)=t_1(Y)$ i $t_3(Z)=t_2(Z)$.

Relacija iz primjera 1 zadovoljava dakle višeznačnu zavisnost $B \twoheadrightarrow C$.

Gornja definicija je simetrična obzirom na zamjenu mjesta n-orki t_1 i t_2. To za posljedicu ima postojanje i n-orke t_4, za koju vrijedi $t_4(X)=t_1(X)$, $t_4(Y)=t_2(Y)$ i $t_4(Z)=t_1(Z)$.

Definiciju višeznačne zavisnosti moguće je oslabiti odustajanjem od uvjeta $X \cap Y = \Phi$ (•), na način da postojanje iste u smislu izvorne definicije osigurava postojanje višeznačne zavisnosti za koju (•) ne vrijedi i obratno. Prema potrebi i bez posebne najave koristimo ravnopravno obadvije definicije.

Svojstvo relacije $r(A,B,C)$ iz primjera 1 koje je poslužilo kao motivacija za definiciju višeznačne zavisnosti obećavalo je da je njihovo postojanje nužan i dovoljan uvjet dekompozicije pripadne relacije bez gubitka informacije. Potvrđuje to i naredni metateorem.

Metateorem 1 : Neka je r relacija na relacijskoj shemi $\mathcal{R}$; $X,Y,Z \subseteq \mathcal{R}$ i $Z=\mathcal{R}-(XY)$. Tada $r(\mathcal{R})$ zadovoljava višeznačnu zavisnost $X \twoheadrightarrow Y$ ako i samo ako se ona razlaže bez gubitka informacije na podsheme $\mathcal{R}_1 = XY$ i $\mathcal{R}_2 = XZ$.

Dokaz: Pretpostavimo najprije da $r(\mathcal{R})$ zadovoljava višeznačnu zavisnost $X \twoheadrightarrow Y$ (•) i stavimo $r_1 = \pi_{\mathcal{R}_1}(r)$ i $r_2 = \pi_{\mathcal{R}_2}(r)$. Neka je $t \in r_1 \bowtie r_2$. Zbog $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = X$ i definicije n-orke t, ispunjeno je $t(X)=t_1(X)=t_2(X)$, $t(Y)=t_1(Y)$ i $t(Z)=t_2(Z)$. Jer su relacije r_1 i r_2 projekcije relacije r, moraju postojati n-orke t_1' i t_2' iz r, za koje vrijedi $t_1'(X)=t_1(X)$, $t_1'(Y)=t_1(Y)$, $t_2'(X)=t_2(X)$ i $t_2'(Z)=t_2(Z)$. Očito je $t_1'(X)=t_2'(X)$, pa zbog (•) postoji n-orka t_3' iz r, za koju vrijedi $t_3'(X)=t_1'(X)$, $t_3'(Y)=t_3'(Y)$ i $t_3'(Z)=t_2'(Z)$. Računajmo sada redom restrikcije n-orke t na skupove X,Y i Z. Dobivamo slijedeći niz jednakosti:

$$t(X)=t_1(X)=t_1(X)=t_3'(X),$$
$$t(Y)=t_1(Y)=t_1(Y)=t_3'(Y) \quad \text{i}$$
$$t(Z)=t_2(Z)=t_2'(Z)=t_3'(Z)$$

Zaključujemo da vrijedi $t=t_3'$, tj. $t \in r$, što i znači da se r razlaže bez gubitka informacije na $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$.

Pretpostavimo sad da r ne zadovoljava višeznačnu zavisnost $X \twoheadrightarrow Y$, ali da se razlaže bez gubitka informacije na relacijske sheme $\mathcal{R}_1$, odnosno $\mathcal{R}_2$. Prvo znači da postoje n-orke t_1 i t_2 iz r, takve da je $t_1(X)=t_2(X)$ te da je za svaku n-orku t_3 iz na snazi bar jedno od ovog što slijedi:

$$t_3(X) \neq t_1(X),\ t_3(Y) \neq t_1(Y),\ \text{odnosno}\ t_3(Z) \neq t_2(Z).$$

Neka su redom r_1 i r_2 projekcije relacije r na sheme $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$. Kako je $t_1(X)=t_2(X)$, postoje n-orke t_1' i t_2' iz r_1, odnosno r_2, za koje vrijedi $t_1' = t_1 \upharpoonright \mathcal{R}_1$ i $t_2' = t_2 \upharpoonright \mathcal{R}_2$. Jer je $t_1'(X)=t_2'(X)$, postoji n-orka t_3' iz $r_1 \bowtie r_2$, takva da je $t_3' \upharpoonright \mathcal{R}_1 = t_1'$ i $t_3' \upharpoonright \mathcal{R}_2 = t_2'$. Zbog pretpostavke da se r razlaže bez gubitka informacije na $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$, mora biti $t_3' \in r$. Osim toga, na snazi je slijedeće:

$$t_3'(X)=t_1'(X)=t_1(X) \quad (\circ),$$
$$t_3'(Y)=t_1'(Y)=t_1(Y) \quad (\circ\circ) \text{ i}$$
$$t_3'(Z)=t_2'(Z)=t_2(Z) \quad (\circ\circ\circ)$$

Očito je $(\circ)$ u kontradikciji sa $(\bullet)$, $(\circ\circ)$ sa $(\bullet\bullet)$ i $(\circ\circ\circ)$ sa $(\bullet\bullet\bullet)$. što dokazuje da relacija r zadovoljava višeznačnu zavisnost $X\twoheadrightarrow Y$. Time je metateorem dokazan.

Neposredna posljedica gornjeg metateorema, uzimajući u obzir metateorem 3.3 jest da je svaka funkcijska zavisnost $X\rightarrow Y$ ujedno i višeznačna zavisnost $X\twoheadrightarrow Y$.

Za kraj ovog odjeljka dajemo sheme aksioma višeznačnih zavisnosti samih za sebe te sheme aksioma koje se odnose na interakciju funkcijskih i višeznačnih zavisnosti. Zajedno sa shemama aksioma funkcijskih zavisnosti one čine adekvatan i potpun sustav aksioma za skup funkcijskih i višeznačnih zavisnosti. Dokaze pripadnih metateorema ovdje ne dajemo. Zainteresiranog čitaoca upućujemo na monografiju [5].

Slijedi popis shema aksioma za višeznačne zavisnosti.

V_1: $\Phi\mapsto X\twoheadrightarrow X$ (shema aksioma refleksivnosti)

V_2: $X\twoheadrightarrow Y\mapsto XZ\twoheadrightarrow Y$ (shema aksioma proširenja)

V_3: $\{X\twoheadrightarrow Y, X\twoheadrightarrow Z\}\mapsto X\twoheadrightarrow YZ$ (shema aksioma pribrajanja)

V_4: $\{X\twoheadrightarrow Y, X\twoheadrightarrow Z\}\mapsto\{X\twoheadrightarrow Y\cap Z, X\twoheadrightarrow Y-Z\}$
(shema aksioma oduzimanja)

V_5: $\{X\twoheadrightarrow Y, Y\twoheadrightarrow Z\}\mapsto X\twoheadrightarrow Z-Y$
(shema aksioma tranzitivnosti)

V_6: $\{X\twoheadrightarrow Y, YW\twoheadrightarrow Z\}\mapsto XW\twoheadrightarrow Z-(YW)$
(shema aksioma pseudotranzitivnosti)

V_7: $X\twoheadrightarrow Y\mapsto X\twoheadrightarrow Z$, za $Z=\mathcal{R}-(XY)$
(shema aksioma komplementiranja)

Dužni smo još samo dvije sheme aksioma koji povezuju funkcijske zavisnosti s "pravim" višeznačnim zavisnostima.

FV_1: $X\rightarrow Y\mapsto X\twoheadrightarrow Y$ (shema aksioma "kopiranja")

FV_2: $\{X\twoheadrightarrow Y, Z\rightarrow W\}\mapsto X\rightarrow W$ uz uvjete $W\subseteq Y$ i $Y\cap Z=\Phi$.
(shema aksioma unije)

6. Ekvivalentnost računa višeznačnih zavisnosti i jednog fragmenta računa sudova

U ovom odjeljku bit će izloženi rezultati koji predstavljaju poopćenje rezultata izloženih u odjeljku 4, točnije rečeno, poopćenja metateorema 4.1 i 4.2.

Neka je $\mathcal{R}=(XYZ)$ relacijska shema, takva da je $X=\{A_1,\dots,A_n\}$, $Y=\{B_1,\dots,B_m\}$ i $Z=\{C_1,\dots,C_p\}$. Višeznačnoj zavisnosti $X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y$ pridružujemo sud:

$$F:\ (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow ((B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_m) \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_p)).$$

Tako na primjer višeznačnoj zavisnosti $DF \rightarrow\!\!\!\rightarrow CE$ nad relacijskom shemom $\mathcal{R}=\{A,B,C,D,E,F\}$ pridružujemo sud $F:(D \wedge F) \rightarrow ((C \wedge E) \vee (A \wedge B))$. Ovdje je $X=\{D,F\}$, $Y=\{C,E\}$ i $Z=\{A,B\}$.

Analog metateorema 4.2 glasi sada ovako:

Metateorem 1: Neka je $\mathcal{F}$ skup funkcijskih i višeznačnih zavisnosti nad relacijskom shemom $\mathcal{R}$ i F takva zavisnost. Tada su slijedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne.

1. $\mathcal{F} \mapsto F$
2. $\mathcal{F} \models F$ u svijetu dvoelementnih relacija
3. $\mathcal{F} \vdash F$ ako F i zavisnosti iz $\mathcal{F}$ interpretiramo kao sudove

Umjesto dokaza, koji je analogan dokazu metateorema 4.2, dajemo primjer u kojem koristimo ekvivalentnost prve i treće tvrdnje metateorema.

Primjer 1: Neka je $\mathcal{R}=\{A,B,C,D,E\}$ relacijska shema, $\mathcal{F}=\{B \rightarrow\!\!\!\rightarrow CD, AE \rightarrow\!\!\!\rightarrow D\}$ skup višeznačnih zavisnosti i $F: BE \rightarrow\!\!\!\rightarrow AC$.

Dokazati:

a) $\mathcal{F} \mapsto F$ uz pomoć aksioma višeznačnih zavisnosti.

b) $\mathcal{F} \mapsto F$ uz pomoć pravila rezolucije za račun sudova.

a) 1. $B \rightarrow\!\!\!\rightarrow CD$ (element iz $\mathcal{F}$)

2. $B \rightarrow\!\!\!\rightarrow AE$

(prema shemi aksioma V_7, zamjenom B za X, CD za Y i AE za $Z=\mathcal{R}-(XY)$).

3. $AE \rightarrow\!\!\!\rightarrow D$ (element iz $\mathcal{F}$)

4. $B \rightarrow\!\!\!\rightarrow D$

(iz 3. i 4., prema shemi aksioma V_5, uz $Y \not\subset Z$)

5. $BE \twoheadrightarrow D$ (iz 4., prema shemi aksioma V_2)
6. $BE \twoheadrightarrow AC$ (iz 5., prema shemi aksioma V_7)

b) Da bismo mogli primijeniti pravilo rezolucije za račun sudova u cilju dokaza tvrdnje $\mathcal{F} \mapsto BE \twoheadrightarrow AC$, moramo najprije zavisnostima iz $\mathcal{F}$, a zatim i zavisnosti $BE \twoheadrightarrow AC$ pridružiti odgovarajuće sudove, na već opisani način. Redom izlazi:

Višeznačna zavisnost	**Pridruženi sud**
$B \twoheadrightarrow CD$	F_1: $B \to ((C \wedge D) \vee (A \wedge E))$
$AE \twoheadrightarrow D$	F_2: $(A \wedge E) \to (D \vee (B \wedge C))$
$BE \twoheadrightarrow AC$	F: $(B \wedge E) \to ((A \wedge C) \vee D)$

Prema točkama 1 i 3 prethodnog metateorema i metateoremu karakterizacije pojma logičke posljedice za račun sudova, da dokažemo tvrdnju $\mathcal{F} \mapsto F$, dovoljno je dokazati da je sud $F_1 \wedge F_2 \wedge \neg F$ (•) kontradiktoran. Da bismo to učinili uz pomoć pravila rezolucije, pretvaramo faktore iz (•) u konjunktivnu normalnu formu. Pritom se koristimo tablicom parova semantički ekvivalentnih sudova računa sudova ([4],primjer 2.5). Redom dobivamo:

$$
\begin{aligned}
F_1:\ & B \to ((C \wedge D) \vee (A \wedge E)) \equiv \neg B \vee ((C \wedge D) \vee (A \wedge E)) \equiv \\
\equiv\ & (\neg B \vee (((C \wedge D) \vee A) \wedge ((C \wedge D) \vee E))) \equiv \\
\equiv\ & \neg B \vee ((A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (E \vee C) \wedge (E \vee D)) \equiv \\
\equiv\ & (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee E) \wedge (\neg B \vee D \vee E)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2:\ & (A \wedge E) \to (D \vee (B \wedge C)) \equiv \neg(A \wedge E) \vee (D \vee (B \wedge C)) \equiv \\
\equiv\ & (\neg A \vee \neg E) \vee ((D \vee B) \wedge (D \vee C)) \equiv \\
\equiv\ & (\neg A \vee B \vee D \vee \neg E) \wedge (\neg A \vee C \vee D \vee \neg E)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\neg F:\ & \neg((B \wedge E) \to ((A \wedge C) \vee D)) \equiv B \wedge E \wedge \neg((A \wedge C) \vee D) \equiv \\
\equiv\ & B \wedge E \wedge \neg(A \wedge C) \wedge \neg D \equiv B \wedge E \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge \neg D
\end{aligned}
$$

Reprezentant suda (•) je skup:

$$
\mathcal{D} = \{A \vee \neg B \vee C, A \vee \neg B \vee D, \neg B \vee C \vee E, \neg B \vee D \vee E, \neg A \vee B \vee D \vee \neg E, \neg A \vee C \vee D \vee \neg E, \neg A \vee \neg C, B, \neg D, E\}
$$

Tvrdnja $\mathcal{F} \mapsto BE \twoheadrightarrow AC$ bit će dokazana uspijemo li uz pomoć pravila rezolucije generirati identički lažni disjunkt iz skupa $\mathcal{D}$. Slijedi izvod:

1) $\neg A \vee C \vee D \vee \neg E$ (pretpostavka iz $\mathcal{D}$)
2) E (pretpostavka iz $\mathcal{D}$)

3)	$\neg A \vee C \vee D$	(rezolventa 1) i 2))
4)	$\neg D$	(pretpostavka iz $\mathcal{D}$)
5)	$\neg A \vee C$	(rezolventa 3) i 4))
6)	$\neg A \vee \neg C$	(pretpostavka iz $\mathcal{D}$)
7)	$\neg A$	(rezolventa 5) i 6))
8)	$A \vee \neg B \vee D$	(pretpostavka iz $\mathcal{D}$)
9)	$A \vee \neg B$	(rezolventa 4) i 8))
10)	$\neg B$	(rezolventa 7) i 9))
11)	B	(pretpostavaka iz $\mathcal{D}$)
12)	$\perp$	(rezolventa 10) i 11))

Ovim primjerom završavamo odjeljak uz nekoliko napomena.

Aksiomi računa funkcijskih i višeznačnih zavisnosti izloženi su prema [5], ali u obliku bližem duhu računa sudova. Isto vrijedi i za izložene metateoreme, s tim da su neki od njih "ostavljeni čitaocu", a ovdje su razrađeni u svim detaljima.

Izloženim rezultatima ni izdaleka nisu iscrpljene mogućnosti primjene pravila rezolucije na relacijske baze podataka. To posebice vrijedi za pravilo rezolucije za račun predikata. Poznato je na primjer da se postojanje funkcijskih, odnosno višeznačnih zavisnosti među atributima relacijske sheme dade opisati formulama računa predikata (vidjeti [7]). Isto vrijedi za tranzitivne zavisnosti. Posljedica je da se pravilo rezolucije kao pravilo izvoda može koristiti za provjeru statusa dane relacijske sheme u odnosu da bude u nekoj od normalnih formi, obzirom na dani skup funkcijskih ili višeznačnih zavisnosti. Druga mogućnost primjene je u tome da se pravilo rezolucije koristi kao sredstvo dobivanja odgovora na pitanja u nekom logičkom jeziku upita.

Literatura:

1. C.L. Chang, R.C.T. Lee: Symbolic logic and mechanical theorem proving, Academic Press, 1973.

2. A. Church: Introduction to mathematical logic, Princeton University Press, 1956.

3. M. Čubrilo: Princip rezolucije kao teorijska osnova jezika umjetne inteligencije PROLOG, Zbornik radova Fakulteta organiza-

cije i informatike Varaždin, 11, 1987., str. 53—88.

4. C.Delobel,R.G.Casey: Decomposition of a data base and the theory of boolean switching functions, IBM Journal of Research and Development, 21:5, 1977.,str 484—485,.

5. D. Maier: The Theory of Relational Databases, Computer Science Press, 1983.

6. E. Mendelson: Introduction to mathematical logic, D. Van Nostrand Company

7. J.M. Nicolas, H. Gallaire: Data Base: Theory vs. Interpretation, u H. Gallaire, J. Minker (ed.): Logic and Data Bases, Plenum Press, 1978., str. 33 — 54

8. S. Tkalac: Relacijski model baze podataka, Informator, Zagreb, 1988. (u pripremi)

Primljeno 1988—05—20

SUMMARY

Čubrilo M. : Resolution rule and relational data base

This article is concerned with the axiomatisations both of the functional and multivalued dependencies in relational data base model. On the basis of the logical equivalence between a fragment of propositional calculus and both of calculus of functional and multivalued dependencies the interchangebility of appropriate derivation rules is demonstrated. On the side of propositional calculus "rule of the game" was played by the well known resolution rule.