Mr. Tihomir Hunjak
Fakultet organizacije i informatike
V a r a ž d i n

UDK. 65.012.122:519.7
Stručni rad

KORIŠTENJE IDEALNOG RJEŠENJA U VIŠEKRITERIJALNOJ OPTIMIZACIJI

U radu je prikazano kako se koncept rješavanja višekriterijalnih problema odlučivanja pomoću idealnog rješenja može varirati, iz čega proizlaze različite metode primjenljive kod diskretnih problema odlučivanja i kod problema višekriterijalnog programiranja. Težište u radu stavljeno je na prikaz osnovne ideje svake metode i na numeričku proceduru u mjeri koja čitaocu omogućuje da za konkretan problem odlučivanja, na bazi informacija koje ima, može izabrati odgovarajuću metodu, ukoliko mu se koncept idealnog rješenja učini prihvatljivim za rješavanje njegovog problema.

Višekriterijalno odlučivanje; idealno rješenje; kompromisno rješnje; kompromisno programiranje

1. UVOD

Problem odlučivanja s više kriterija može se rješavati na različite načine, ovisno o pretpostavkama na osnovi kojih se formulira matematički model takvog problema. Kvantitativne metode, koje se u tom slučaju mogu primijeniti, moguće je klasificirati po više osnova. Jedna mogućnost je da se uvede dihotomija na osnovi toga da li je skup alternativa eksplicite opisan ili je zadan implicite pomoću skupa ograničenja. Grupa metoda koje se primjenjuju u prvom slučaju poznata je pod nazivom Multiple attribute decision making methods (MADM), za što kod nas nije usvojen još uvijek jedinstven prijevod, ali u posljednje vrijeme dominira sintagma **metode za višekriterijalno odlučivanje**. U tom slučaju govori se još o diskretnim problemima odlučivanja. Druga grupa metoda dolazi pod nazivom Mutiple objective decision making methods (MODM), za što se kod nas upotrebljava naziv **metode za višekriterijalno programiranje**. Za obje grupe metoda zajednički naziv je Multiple criteria decision making methods, a kod nas se pokušava udomaćiti naziv **višekriterijalna optimizacija**. [1]

Cilj ovog rada je da se prikaže kako se tzv. **idealno rješenje**[2] problema višekriterijalne optimizacije može koristiti na različite načine kod rješavanja problema odlučivanja s više kriterija. Zbog toga se u toč. 2 daje definicija idealnog rješenja. Metode za rješavanje problema višekriterijalne optimizacije koje se prikazuju u

---

1 - *Daljnja taksonomija ovih metoda proizlazi iz karakteristika atributa kojima se opisuju alternative i koji se koriste kao kriteriji u problemu odlučivanja. Tako su npr. široko prihvaćene taksonomije iz (2) i (3).*

2 - *Za idealno rješenje upotrebljavaju se još pojmovi idealna točka i idealan vektor kad se o njemu govori u terminima ciljnih funkcija.*

ovom radu svrstane su u dvije skupine u skladu s opisanom podjelom i prikazuju se u točkama 3. i 4. Odabrano je nekoliko metoda s ciljem da se pokaže kako se jedan koncept rješavanja problema višekriterijalne optimizacije može varirati u zavisnosti o pristupu problemu koji se rješava. U radu se ne razmatraju problemi normalizacije kriterijalnih vrijednosti i određivanja težina kriterija, iako su oni u uskoj vezi s temom. Razlog tome je ograničenje u prostoru i činjenica da je osnovni cilj rada moguće ostvariti bez objašnjavanja tih postupaka.

2. IDEALNO I KOMPROMISNO RJEŠENJE PROBLEMA VIŠEKRITERIJALNE OPTIMIZACIJE

Skup dopustivih rješenja (alternativa) označava se s X. Ciljne funkcije (kriteriji) označavaju se s f_i, i = 1,....,n. Oznaka za optimalno rješenje jednokriterijalnog problema optimizacije po funkcije f_i je:

$$f_i^* = \max_{x \in X} f_i(x)$$

Napomenimo da kriterijalne funkcije mogu biti funkcije dobiti ili funkcije troška što povlači odgovarajući smisao optimizacije (max ili min). No, zbog toga jer se umjesto problema min f(x) može rješavati problem max -f(x), za potrebe ovog rada može se smatrati da sve funkcije treba maksimizirati.

Vektor $F^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*)$ u prostoru ciljnih funkcija zove se **idealno rješenje** (idealna točka , idealni vektor) problema višekriterijalne optimizacije. Ukoliko postoji $x^* \in X$ za koji vrijedi $f_i(x^*) = F_i^*$, i=1,...,n, onda je x^* optimalno rješenje problema višekriterijalne optimizacije. Međutim, takvo rješenje x^* obično ne postoji. Bit korištenja idealnog rješenja kod rješavanja problema višekriterijalne optimizacije je da se pronađe rješenje najbliže idealnom i takvo rješenje zove se **kompromisno rješenje**.[3]. Kod mjerenja udaljenosti od idealnog rješenja moguće je primijeniti različite metrike što povlači različite moguće interpretacije u kontekstu realnog problema odlučivanja.

Neka je $x \in X$ $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ vektor vrijednosti funkcija kriterija. Za mjeru udaljenosti od idealnog rješenja najčešće se koristi L_p metrika Minkovskog

$$d_p = \left(\sum_{i=1}^{n} (f_i^* - f_i(x))^p \right)^{1/p}$$

Osnovna svojstva ove metrike su $d_1 \geq d_p \geq d_\infty$, $d_\infty = \max_j \{ f_j^* - f_j(x) \}$, pri čemu izbor parametra p ovisi o stavu donosioca odluke prema interpretacijama vezanim za njegove ekstremne vrijednosti. Naime, za p=1 vezana je maksimalna ukupna korist, a za p =∞ minimalno maksimalno odstupanje. Također je važno svojstvo kompromisnog rješenja činjenica da je ono za $1 \leq p < \infty$ Pareto optimalno ili efikasno dok za p =∞ to ne mora biti slučaj, ali je najmanje jedno kompromisno rješenje u tom slučaju efikasno. Ostala važna svojstva kompromisnog rješenja vezana uz parametar p mogu se naći npr. u (5).

Ukoliko su u problemu višekriterijalnog odlučivanja atributi koji se koriste kao kriteriji različite važnosti, što rezultira uvođenjem težina w_i, i=1,...,n za kriterijalne funkcije[4], kao mjera udaljenosti od idealnog rješenja koristi se funkcija

3 - *Ovu ideju Zeleny je (vidi npr. /7/) formalizirao u obliku aksioma izbora koji glasi: "Alternative koje su bliže idealnoj, preferirane su u odnosu na one udaljenije od nje. Racionalna osnova ljudskog izbora je biti što bliže uočenom idealu".*

4 - *O određivanju težina kriterija u problemima višekriterijalnog odlučivanja vidi npr. (1).*

$$d_p = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^p (f_i^* - f_i(x))^p \right)^{1/p}$$

3. KOMPROMISNO RJEŠENJE U DISKRETNIM PROBLEMIMA ODLUČIVANJA

Kada je skup alternativa za neki problem odlučivanja eksplicite poznat, kompromisno rješenje se određuje traženjem minimalne vrijednosti za funkciju distance na skupu alternativa. Mogućnost primjene različitih metrika kod mjerenja distance razlog je za nejedinstvenost takvog rješenja. U ovoj točki ukratko se prikazuju dva načina na koje se nastoji riješiti problem određivanja kompromisnog rješenja, respektirajući njegovu nejedinstvenost.

3.1. Metoda TOPSIS

Iscrpan prikaz metode TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) može se naći u (2). Ova metoda se razlikuje od običnog određivanja alternative najbliže idealnoj po tome što se u analizu problema uvodi i tzv. **negativno idealno rješenje**, koje je po smislu suprotno idealnom rješenju (negativno idealno rješenje zapravo je vektor najlošijih vrijednosti po svim kriterijima).

Neka je oznaka za najslabiju kriterijalnu vrijednost za kriterij f_i, $i=1,\dots,n$

$$f_i^- = \min_{x \in X} f_i(x)$$

Udaljenost alternative x od negativnog idealnog rješenja je u tom slučaju:

$$d_p^-(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^p \left| f_i^- - f_i(x) \right|^p \right)^{1/p}$$

Određivanjem maksimalne vrijednosti ove funkcije na skupu alternativa dobiju se tri kompromisna rješenja za $p=1,2$ i ∞.[5]

Sinteza korištenja idealnog i negativnog idealnog rješenja odražava se u istodobnom korištenju vrijednosti $d_p^*(x)$ i $d_p^-(x)$. U metodi TOPSIS koristi se funkcija

$$D_p(x) = d_p^-(x) / (d_p^*(x) + d_p^-(x)), \quad p = 1,\ 2,\ \infty$$

Skup TOPSIS rješenja čine one alternative za koje se postiže maksimalna vrijednost ove funkcije.

Neka lako vidljiva svojstva ove funkcije jesu:

(1) $0 \le D_p(x) \le 1$

(2) ako se x podudara s idealnim rješenjem, $D_p(x) = 1$

(3) za negativno idealno rješenje vrijedi $D_p(x)=0$.

Ukoliko se alternative žele rangirati, rang lista se formira u skladu s opadajućim nizom vrijednosti D_p.

U citiranom radu (6) prikazan je još jedan način kako se mogu uskladiti različita kompromisna rješenja (s obzirom na vrijednosti parametra p). Funkcija distance kombinira se od distanci d_1, d_2 i d_∞ prema formuli

$$d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3$$

5-Alternativa najbliža idealnom rješenju nije nužno ona koja je ujedno i najudaljenija od negativnog idealnog rješenja. O tome se može više naći u (2).

pri čemu se za vrijednosti koeficijenata λ_i, i=1,2,3 daje tabela u kojoj su te vrijednosti vezane uz broj kriterija. Te vrijednosti ovise o vjerodostojnosti mjernog sistema za pojedini kriterij, a način njihovog izračunavanja može se naći u citiranom radu (6). U tabeli 1 dane su vrijednosti za λ_1, λ_2 i λ_3 za probleme odlučivanja do 10 kriterija.

Tabela 1. Relativne vjerodostojnosti funkcija distance (preuzeto djelomično iz /6/)

Broj kriterija	λ_1	λ_2	λ_3
1	0.3333	0.3333	0.3333
2	0.4113	0.3147	0.2741
3	0.4673	0.2992	0.2335
4	0.5098	0.2861	0.2041
5	0.5437	0.2747	0.1816
6	0.5717	0.2647	0.1636
7	0.5951	0.2559	0.1490
8	0.6154	0.2479	0.1367
9	0.6328	0.2407	0.1267
10	0.6479	0.2342	0.1179

3.2. Metoda IKOR

Metoda IKOR (iterativno kompromisno rangiranje) također služi za rangiranje alternativa u diskretnim problemima odlučivanja s više kriterija. Za ovu metodu karakteristično je da se vodi računa o rang listama koje se dobiju kompromisnim rangiranjem za različite vrijednosti parametra p. Iscrpan prikaz ove metode može se naći u citiranom radu pod (5).

Primjena ove metode počinje formiranjem dviju rang lista za p=1 i p=∞, u skladu s vrijednostima

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} (f_i^* - f_i(x))/(f_i^* - f_i^-) \qquad \text{za } p=1$$

$$R(x) = \max_i \, (f_i^* - f_i(x))/(f_i^* - f_i^-) \qquad \text{za } p=\infty$$

Formiranjem dviju rang lista na osnovi ovih vrijednosti početni problem prelazi u dvokriterijalan problem odlučivanja. Idealno rješenje tog problema karakterizirano je vrijednostima

$$S^* = \min_{x \in X} S(x) \quad \text{i} \quad R^* = \min_{x \in X} R(x)$$

Alternative se u odnosu na ovo idealno rješenje rangiraju uz pomoć funkcije

$$Q(x) = (S(x) - S^*)/(S^- - S^*) + (R(x) - R^*)/(R^- - R^*)$$

Pri tom su upotrijebljene oznake

$$S^- = \max_{x \in X} S(x) \quad \text{i} \quad R^- = \max_{x \in X} R(x)$$

Ukoliko kriteriji imaju različitu važnost izraženu odgovarajućim težinama w_i, $i=1,\dots,n$ (težine moraju biti normalizirane, tj. $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, $w_i \geq 0$, $i = 1,\dots,n$), upotrebljavaju se slijedeće vrijednosti $S(x)$ i $R(x)$

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \, (f_i^* - f_i(x))/(f_i^* - f_i^-) \quad \text{za } p = 1$$

$$R(x) = \max_i \; w_i(f_i^* - f_i(x))/(f_i^* - f_i^-) \quad \text{za } p = \infty$$

Rang lista koja se određuje na osnovi vrijednosti $S(x)$ je rang lista koja preferira maksimalnu grupnu korist, dok je rang lista koja se dobiva pomoću vrijednosti $R(x)$ posljedica strategije minimiziranja maksimalnih odstupanja od idealnog rješenja.

Rang lista na osnovi vrijednosti $Q(x)$ je sinteza spomenutih dviju rang listi, pa se učešće svake od dviju spomenutih strategija u određivanju konačne rang liste može regulirati odgovarajućim ponderom v i $1-v$, $0 \leq v \leq 1$. U tom slučaju se umjesto $Q(x)$ upotrebljava vrijednost

$$Q'(x) = v(S(x)-S^*)/(S^- - S^*) + (1-v)(R(x) - R^*)/(R^- - R^*)$$

Preporuča se da se rang lista, dobivena na osnovi ovih vrijednosti, ne smatra konačnom, već da se uklone najbolja i najlošija alternativa i zatim ponavlja postupak kompromisnog rangiranja da bi se dobila druga po redu alternativa (odnosno pretposljednja), odnosno dok se ne formira cijela rang lista alternativa.

4. METODE ZA VIŠEKRITERIJALNO PROGRAMIRANJE U KOJIMA SE KORISTI IDEALNO RJEŠENJE

4.1. STEP metoda[6]

Ova se metoda može koristiti kod rješavanja problema višekriterijalnog linearnog programiranja

$$\max_{x \in X} Cx \qquad (4.1)$$

pri čemu je C matrica nxk, čiji reci sadrže koeficijente ciljnih funkcija f_i, $i=1,\dots,n$ a skup X je skup mogućih rješenja određen obično sistemom nejednadžbi $Ax \leq b$, $x \geq 0$, $x \in R^k$.

Matrica A je formata mxk i sadrži koeficijente varijabli x_j, $j = 1,\dots,k$. Vektor stupac b sadrži slobodne koeficijente b_i, $i=1,\dots,m$. Značajno je za ovu metodu da je ona interaktivna, što omogućuje donosiocu odluke da progresivno, tokom procesa analize odluke, oblikuje svoje preferencije.

Metoda počinje određivanjem idealne točke u prostoru ciljnih funkcija, tj. rješavanjem n problema tipa

$$\max_{x \in X} f_i(x) \quad i=1,\dots,n \qquad (4.2)$$

Optimalna rješenja ovih programa f_i^* su komponente idealnog vektora $F^*=(f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*)$. Ukoliko postoji $x^* \in X$ takav da je $f_i(x^*) = f_i^*$, x^* se zove optimalno rješenje problema (4.1) i postupak se zaustavlja.

6-Više o razvoju ove metode i vezi sa srodnim metodama može se naći u(4).

Smisao iterativnog postupka koji se provodi nakon izračunavanja idealnog vektora je da se odredi efikasno rješenje što bliže idealnom, a u skladu s preferencijama donosioca odluke. U tu svrhu rješava se zadatak

$$\text{Min } z \qquad (4.3)$$

uz ograničenja $\quad x \in X_k,\ z \geq w_i(f_i^* - f_i(x)),\ i=1,\ldots,n,\ z \geq 0$

gdje je X_k skup dopustivih rješenja u k-toj iteraciji, koji se dobiva reduciranjem skupa X_{k-1} . w_i, $i=1,\ldots,n$ su težinski koeficijenti kao odraz relativne važnosti distance u odnosu na idealno rješenje po pojedinoj kriterijalnoj funkciji. Ovi ponderi računaju se po formuli

$$w_j = \alpha_j / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

pri čemu je
$$\alpha_j = \frac{f_j^* - f_j^{min}}{f_j^*} \cdot \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} c_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{ako je } f_j^* > 0$$

$$\alpha_j = \frac{f_j^{min} - f_j^*}{f_j^{min}} \cdot \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} c_{ji}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{ako je } f_j^* \leq 0$$

gdje su c_{ij} koeficijenti ciljne funkcije f_j, f_j^{min} je minimalna vrijednost ciljne funkcije f_j na skupu optimalnih rješenja pojedinih problema (4.2). Svrha razlomka $1/(\sum_{i=1}^{k} c_{ji}^2)^{\frac{1}{2}}$ je da se vrijednosti za raznorodne kriterije normaliziraju.

Optimalno rješenje problema (4.3) predočuje se donosiocu odluke i on ga uspoređuje s idealnim rješenjem F^*. Neke vrijednosti ciljnih funkcija ga zadovoljavaju, a neke ne. Da bi poboljšao vrijednosti s kojima nije zadovoljan, donosilac odluke mora pristati na smanjivanje nekih zadovoljavajućih vrijednosti. Prihvatljivo smanjenje funkcije f_j označava se s Δf_j. Nakon što se odredi ova vrijednost, modificira se skup dopustivih rješenja

$$X_{k+1} = \begin{array}{l} X_k \\ f_j(x) \geq f_j(x) - \Delta f_j \\ \qquad x \in X_k \\ f_i(x) \geq f_i(x), \quad i \neq j,\ i = 1,\ldots,n \\ \qquad x \in X_k \end{array}$$

težinski koeficijent funkcije f_j za koju je zadana relaksacija Δf_j stavlja se $w_j = 0$ i ide se u novu iteraciju s ciljem da se popravi rješenje. Postupak se završava kad se ustanovi da su nakon neke iteracije postignute zadovoljavajuće vrijednosti svih kriterijalnih funkcija ili kad broj iteracija pređe n (broj funkcija kriterija).

4.2. Metoda pomičnog ideala

Ova metoda koristi se da bi se reducirao skup nedominirajučih rješenja višekriterijalnog problema linearnog programiranja. Opća ideja algoritma može se prikazati u 4 koraka:

Korak 1: Odredi se skup efikasnih rješenja problema višekriterijalnog linearnog programiranja i označi s N.

Korak 2: Odredi se idealno rješenje problema koji se rješava.

Korak 3: Odredi se kompromisan skup C^i (i je broj iteracije) koji sadrži podskup rješenja iz N, najbližih idealnom po nekom kriteriju.

Korak 4: Ako je skup C^i dovoljno mali, tako da donosilac odluke može izabrati zadovoljavajuće rješenje bez daljnjih analiza, postupak je gotov. Ako to nije slučaj, definira se novo idealno rješenje i ide se ponovo na korak 3.

Pošto je već objašnjen pojam idealnog rješenja, metoda se prikazuje od trećeg koraka. Skup C^i određuje se pomoću L_p metrike uvođenjem mjere bliskosti za $x^i \varepsilon N$ u odnosu na idealno rješenje x^*.

Svojstva te mjere su

$$d_j(x^i) = 1 \text{ ako je } f_j(x^i) = f_j^*$$

$$0 \leq d_j(x^i) \leq 1, \quad j = 1,\ldots,n, \quad i = 1,\ldots,m$$

Ako razlika $f_j^* - f_j(x^i)$ poraste za neki $x^i \varepsilon N$, odgovarajuća vrijednost $d_j(x^i)$ opada k nuli.

Jedna od funkcija kojom se može poslužiti je

$$d_j(x^i) = \frac{f_j(x^i) - f_{jL}}{f_j^* - f_{jL}}$$

gdje je $f_{jL} = \min_{x^i \varepsilon N} f_j(x^i)$.

Distanca između x^i i x^* za kriterij j definira se kao

$$\bar{d}_j(x^i) = 1 - d_j(x^i) \equiv \bar{d}_{ji}$$

Na osnovi ovih distanci po kriterijalnim vrijednostima formira se mjera za distancu x^i i x^* koja u L_p metrici glasi

$$L_p(x^i) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\bar{d}_{ji})^p\right)^{1/p} \qquad 0 \leq p < \infty$$

Ova funkcija potom se koristi za određivanje kompromisnog rješenja u pojedinoj iteraciji. Ukoliko svi kriteriji nisu jednako važni, koristi se općenitiji oblik funkcije $L_p(x^i)$

$$L_p(W, x^i) = \left(\sum_{j=1}^{n} (w_j)^p (\bar{d}_{ji})^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

gdje su w_j težine kriterija. Problemi izbora parametra p i težina kriterija isti su kao kod rangiranja alternativa u diskretnim problemima odlučivanja.

LITERATURA

1. T.Hunjak: Određivanje težina kriterija kod višekriterijalnog izbora investicionih projekata pomoću metode svojstvenog vektora i metode entropije, Ekonomski glasnik, Sarajevo, 1986, str. 331-337.

2. C.L.Hwang, K.Yoon: Multiple Attribute Decision Making, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol.186, Springer, Berlin, 1981.

3. C.L.Hwang, A.S.M.Masud: Multiple Objective Decision Making, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 164, Springer, Berlin, 1979.

4. Lj.Martić (redaktor): Višekriterijalno programiranje, Informator, Zagreb, 1978.

5. S.Opricović: Višekriterijumska optimizacija, Naučna knjiga, Beograd, 1986.

6. K.Yoon: A Reconcilation Among Discrete Compromise Solutions, J.Opl.Res.Soc. Vol.38, No.3, str. 277-286, 1987.

7. M.Zeleny: Compromise Programming, u Multiple Criteria Decision Making (J.L. Cochran, M.Zeleny, redaktori): University of South Carolina Press, Columbia S.C., 1973, str.262-301.

Primljeno: 1988-09-05

Hunjak T. Use of the ideal solution for multicriteria optimization

S U M M A R Y

In this paper the concept of the ideal solution for solving decision problems with multiple criteria is presented. For solving discrete multi-objective problems, TOPSIS, IKOR and the procedure for the reconciliation among discrete compromise solutions, developed by K.Yoon, are recommended. From the set of multiple objective decision making methods, STEP and the Method of Displaced Ideal are chosen.