Mr. Predrag Lončar
Viša geotehnička škola
V a r a ž d i n

UDK: 51
Stručni rad

SINGULARNO PERTURBACIJSKI PROBLEMI ZA LINEARNE ELIPTIČKE DIFERENCIJALNE OPERATORE

U radu se daje pregled tehnika i rezultata za rješavanje singularno perturbacijskih problema zasnovanih na metodi Vishik-Lyusternika. Na temelju toga razmatra se asimptotska valjanost metode u Hölderovim normama.

Singularna perturbacija; linearni eliptički operator

1. RUBNE ZADAĆE ZA LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE S MALIM PARAMETROM. METODA VISHIKA I LYUSTERNIKA

Izučimo najprije singularno perturbiranu zadaću oblika:

$$L_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) = N_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) - M(u_\varepsilon(x)) = f(x);\quad 0 \leq x \leq 1$$

pri čemu je

$$N_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) = \varepsilon^{m_1-k_1}\cdot u_\varepsilon^{(m_1)}(x) + \sum_{\nu=1}^{m_1-k_1-1} \varepsilon^\nu a_\nu(x)\, u_\varepsilon^{(k_1+\nu)}(x)$$

$$M(u_\varepsilon(x)) = \sum_{\mu=0}^{k_1} b_\mu(x)\, u_\varepsilon^{(k_1-\mu)}(x) \tag{1.1}$$

$$m_1 > k_1$$

uz Dirichletove rubne uvjete:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^{(i)}(0) &= 0 \quad &; i = 0,1,\ldots,s-1\\ u_\varepsilon^{(j)}(1) &= 0 \quad &; j = 0,1,\ldots,t-1\\ s+t &= m_1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Pri tome pretpostavljamo da su funkcije $a_\nu(x)$ analitičke u intervalu $0 < x < 1$. Posebno to znači da ih možemo razviti u konvergentan red potencija u okolici točke $x = 0$ ili točke $x = 1$:

$$a_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{\nu r}^{0}\cdot x^r \quad ; \nu = 1,2,\ldots,m_1-k_1 \tag{1.3}$$

$$a_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{\nu r}^{1}\,(x-1)^r \quad ; \nu = 1,2,\ldots,m_1-k_1 \tag{1.4}$$

Mathematics subject classifications: Primary 34D15, Secondary 34E15.

Nadalje, pretpostavljamo da je $f \in C^l([0,1])$ pri čemu je $l \in N$ dovoljno velik prirodni broj, $l \geq m_1$. Uz razvoje (1.3) i (1.4) vežemo algebarske jednadžbe:

$$Q_o(\lambda) = \sum_{=1}^{m_1-k_1} a^o_{\nu o} . \lambda^\nu - b_o(0) = 0 \tag{1.5}$$

$$Q_1(\mu) = \sum_{\nu=1}^{m_1-k_1} a^1_{\nu o} . \mu^\nu - b_o(1) = 0 \tag{1.6}$$

Izučavamo ponašanje rješenja $u(x, \varepsilon)$ kada $\varepsilon \to 0$.

U okolici ruba $x = 0$ ili $x = 1$ uvodimo nove varijable:

$$\sigma = x / \varepsilon$$

$$\tau = (x-1)/\varepsilon$$

Ako sada zapišemo problem (1.1) u okolici ruba $x = 0$, i to u lokalnim varijablama, onda imamo:

$$\varepsilon^{k_1} . L(u_\varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{m_1-k_1} a_\nu(\varepsilon\sigma) . \frac{d^{k_1+\nu} u_\varepsilon}{d\sigma^{k_1+\nu}} - \sum_{=0}^{k_1} \varepsilon^\mu b_\mu(\varepsilon\sigma) \frac{d^{k_1-\mu} u_\mu}{d\sigma^{k_1-\mu}}$$

Desnu stranu možemo pri tom razložiti u red po potencijama od ε i dobiti:

$$\varepsilon^{k_1} . L(u_\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} R^o_r(u_\varepsilon) . \varepsilon^r$$

Sasvim analogan bismo postupak mogli provesti i u okolici drugog ruba $(x=1)$:

$$\varepsilon^{k_1} . L(u_\varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{m_1-k_1} a_\nu(1+\varepsilon.\tau) \frac{d^{k_1+\nu} u_\varepsilon}{d_\sigma^{k_1+\nu}} - \sum_{\mu=0}^{k_1} \varepsilon^\mu b_\mu(1+\varepsilon.\tau) . \frac{d^{k_1-\mu} u_\varepsilon}{d_\sigma^{k_1-\mu}}$$

$$\varepsilon^{k_1} . L(u_\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} R^1_r(u_\varepsilon) . \varepsilon^r$$

pri čemu je

$$R^o_o(u) = \frac{d^{k_1}}{d\sigma^{k_1}} Q_o\left(\frac{d}{d\sigma}\right)u \tag{1.7}$$

$$R^1_o(u) = \frac{d^{k_1}}{d\tau^{k_1}} Q_1\left(\frac{d}{d\tau}\right)u \tag{1.8}$$

Neka je sada broj korijena jednadžbe $Q_o(\lambda) = 0$ s negativnim realnim dijelom jednak p (brojeći ih do na njihovu algebarsku kratnost), a broj korijena jednadžbe $Q_1(\mu) = 0$ s pozitivnim realnim dijelom jednak q. Prve označimo redom s $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, a druge s $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$.

Definicija 1.1. Rubnu zadaću (1.1), (1.2) zovemo regularnom ako vrijedi $p+q=m_1-k_1$ i osim toga $p \leq s$, $q \leq t$.

Definicija 1.2. Zadaća $-M(u) = f(x)$ (1.9)

s rubnim uvjetima $u^{(i)}(0) = 0 \quad i = 0,1,\dots,s-p-1$

$u^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0,1,\dots,t-q-1$ (1.10)

zove se degeneriranom zadaćom zadaće (1.1), (1.2).

U daljnjem se pretpostavlja da zadaća (1.9), (1.10) ima jedinstveno rješenje i za $\varepsilon > 0$ dovoljno maleno da to isto vrijedi za zadaću (1.1), (1.2). Jedinstvenost se može osigurati nekim specijalnim dovoljnim uvjetima (npr. [1], str. 45-47, teoremi 4', 4'' i 4''').

Nadalje, želimo izračunati tzv. formalnu aproksimaciju jednadžbe $L_\varepsilon u_\varepsilon = f$ uz Dirichletove rubne uvjete. U tu svrhu trebaju nam osnovni pojmovi asimptotske analize (vidi [2], chapter 1).

Definicija 1.3. Neka su $f(\varepsilon)$ i $g(\varepsilon), \varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_0]$ bilo koji par realnih neprekidnih funkcija. Kažemo da je $f=0(g)$ za $\varepsilon \downarrow 0$ ako postoje pzitivne konstante k i C takve da vrijedi $|f(\varepsilon)| \leq k|g(\varepsilon)|$ za $0<\varepsilon< C$. Kažemo, nadalje, da je $f=0(g)$ ako postoji $\lim_{\varepsilon\to 0} \{ f(\varepsilon)\ g(\varepsilon)\} = 0$.

Definicija 1.4. δ je element skupa uređajnih funkcija ε ako $\delta(\varepsilon), \varepsilon \in \langle 0,\varepsilon_0]$ je realna, pozitivna, neprekidna i monotona funkcija, tj. postoji $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta(\varepsilon)$.

Dobro poznati primjeri uređajnih funkcija jesu $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$ ili $\delta_n(\varepsilon) = e^{-\frac{n}{\varepsilon}}$.

Definicija 1.5. Niz uređajnih funkcija δ_n, $n=0,1,2,\dots N$ zove se asimptotskim nizom ako je za sve $n=1,2,3,\dots N$ ispunjeno $\delta_n = 0(\delta_{n-1})$. Takav je npr. niz $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$.

Definicija 1.6. Niz funkcija $f_n(\varepsilon)$ zove se asimptotskim nizom ako je za svaki $n = 0,1,2,\dots N$ $f_n(\varepsilon) = 0(\delta(\varepsilon)_n)$ i $f_n(\varepsilon) \neq 0(\delta_n(\varepsilon))$ pri čemu je $\delta_n \in \xi$ i $\{\delta_n\}_{n=0}^{N}$ asimptotski niz..

Definicija 1.7. Suma $\sum_{n=0}^{m} a_n f_n(\varepsilon)$ gdje su a_n konstante, zove se asimptotskim redom ako je $\{f_n(\varepsilon)\}_{m=0}^{m}$ jedan asimptotski niz.

Definicija 1.8. Neka je $\Phi_{aj}^{(m)}(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{m} \delta_n(\varepsilon)\phi_n(x,\varepsilon)$; $0\leq x\leq 1$, a $\phi_n = 0(1)$, $\phi_n \neq 0(1)$ za svaki x, $0\leq x\leq 1$. Pri tom je $\delta_n(\varepsilon)$ asimptotski niz. Za Φ_{as}^{m} kažemo da je asimtotski razvoj do m+1 članova od Φ na $[0,1]$ ako je $\Phi = \Phi_{as}^{(n)} + 0(\delta_m)$ za svaki x, $0\leq x\leq 1$.

Definicija 1.9. Kažemo da je funkcija Φ_{as} formalno aproksimativno rješenje diferencijalne jednadžbe $L_\varepsilon \Phi = F$, $0\leq x\leq 1$ ako vrijedi $L_\varepsilon \Phi_{as} = F + \rho$, pri čemu je $\rho = 0(1)$ za svako x, $0\leq x\leq 1$.

2. KONSTRUKCIJA ASIMPTOTSKOG RAZVOJA

Cilj ovog paragrafa je konstruirati asimptotski razvoj diferencijalne jednadžbe $L_\varepsilon \Phi = F$, $0\leq x\leq 1$, i to za slučaj tzv. regularne degeneracije. Pokazuje se da u nutrinu intervala $[0,1]$, tj. u intervalu $\langle \delta, 1-\delta \rangle$ asimptotskim razvojem može u biti poslužiti asimptotski razvoj degenerirane zadaće. No, u okolici rubnih točaka x=0 i x=1 treba taj razvoj popravljati funkcijama rubnog sloja.

Definicija 2.1. Neka je $v_\varepsilon(x)$ funkcija definirana na podskupu D skupa R i k tome p puta neprekidno diferencijabilna. Kažemo da je $v_\varepsilon(x)$ funkcija rubnog sloja k-tog reda ($k<p$), ako:

1) funkcija $v_\varepsilon(x)$ i sve njene derivacije do p-tog reda ($p>k$) uniformno konvergiraju k nuli kada $\varepsilon\to 0$ na svakom zatvorenom podskupu od D, a koji ne sadržava točke ruba od D (pišemo ∂D)

2) k-te derivacije funkcije $v_\varepsilon(x)$ ograničene su u D kada $\varepsilon\to 0$, j-te derivacije od $v_\varepsilon(x)$ ($j<k$) konvergiraju kada $\varepsilon\to 0$ k nuli na $\bar{D}$ a između k+1-vih derivacija od $v_\varepsilon(x)$ nalaze se funkcije koje teže k ∞ i to u supremum normi.

Npr. na skupu $D = \langle 0,\infty\rangle$ tipičnim primjerima funkcija rubnog sloja (a blizu točke x=0) i to k-tog reda jesu funkcije

$$\varepsilon^k e^{-\lambda\frac{x}{\varepsilon}} \quad \text{ili} \quad \varepsilon^k P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{-\lambda\frac{x}{\varepsilon}} \quad ; \quad k\in N$$

pri čemu je $\lambda>0$, a $P(\frac{x}{\varepsilon})$ je polinom u $\frac{x}{\varepsilon}$.

Neka je sada $u_0(x)$ rješenje degenerirane zadaće. U okolici ruba x=0 uvedemo transformaciju $\sigma = \frac{x}{\varepsilon}$ i nađemo u prvom koraku takvo rješenje jednadžbe

$$R_0^0(v) = 0 \tag{2.1}$$

koje zadovoljava

$$\left.\frac{d^i v}{dx^i}\right|_{x=0} = \begin{cases} 0 & i=0,1,\dots,s-p-1 \quad (2.2) \\ -\left(\frac{d^i u_0}{dx^i}\right)_{x=0} & i=s-p,\dots,s-1 \quad (2.3) \end{cases}$$

ili što je isto

$$\left.\frac{d^i v}{d\sigma^i}\right|_{\sigma=0} = \begin{cases} 0 & i=0,1,\dots,s-p-1 \quad (2.2^*) \\ -\varepsilon^i u_0^{(i)}(0) & i=s-p,\dots,s-1 \quad (2.3^*) \end{cases}$$

a da pri $\varepsilon\to 0+$ ostaje ograničenim.

Diferencijalna jednadžba (2.1) ima red m_1 a njegova karakteristična jednadžba oblik $\lambda^{k_1}.Q_0(\lambda)=0$. Funkcije σ^j, $j=0,1,\dots,k_1-1$ i $e^{\lambda_j\sigma}$, $j=1,\dots,m_1-k_1$ čine fundamentalni sistem rješenja diferencijalne jednadžbe (2.1). No m_1-k_1-p rješenja oblika $e^{\lambda_j\sigma}$, $j>p$ odbacujemo jer zbog Re $\lambda_j>0$ $e^{\lambda_j x/\varepsilon}$ divergira za te j kada $\varepsilon\to 0+$. Iz preostalih k_1+p partikularnih rješenja sastavimo takvu linearnu kombinaciju koja zadovoljava uvjetima (2.2*, 2.3*). Najprije odredimo konstante $\tilde{c}_j(\varepsilon)$, j=1,2, ...,p i to tako da vrijedi:

$$\left(\frac{d^i}{d\sigma^i}\sum_{j=1}^{p}\tilde{c}_j(\varepsilon)\,e^{\lambda_j\sigma}\right)_{\sigma=0} = -\varepsilon^i u_0^{(i)}(0), \quad i=s,p,\dots,s-1 \tag{2.4}$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo u daljnjem da su svi korijeni jednadžbe $Q_0(\lambda) = 0$ s negativnim realnim dijelom i svi korijeni jednadžbe $Q_1(\mu) = 0$ s pozitivnim realnim dijelom međusobno različiti. Prema tome je determinanta na lijevoj strani jednakosti (2.4) Vandermondova determinanta pa, prema tome, različita od nule. Nije se teško uvjeriti da su $\tilde{c}_j(\varepsilon)$ jedinstveno određeni i da vrijedi:

$$\tilde{c}_j(\varepsilon) = \varepsilon^{s-p} \cdot c_j^o(\varepsilon) \qquad , \ j=1,2,\dots,p$$

pri čemu su $c_j^o(\varepsilon)$ polinomi u ε. Prema tome, funkcija

$$v_o^o = \varepsilon^{s-p} \sum_{j=1}^{p} c_j^o e^{\lambda_j \sigma} \tag{2.5}$$

je rješenje jednadžbe (2.1), a koje zadovoljava rubne uvjete (2.3*). Rubne uvjete (2.2*) možemo isto zadovoljiti ako od v_o^o oduzmemo Macluarinov red sve do stupnja s-p-1. Ta partikularna suma glasi:

$$\varepsilon^{s-p} \sum_{j=1}^{p} c_j^o(\varepsilon) \sum_{k==}^{s-p-1} \lambda_j^k \frac{\sigma^k}{k!} = \varepsilon\alpha_o^o \tag{2.6}$$

s time da je α_o^o polinom u x i ε.

Prema tome, funkcija $u_o + v_o^o + \varepsilon\alpha_o^o$ zadovoljava svih s rubnih uvjeta (2.2*) i (2.3*), pa bolje aproksimira rješenje polaznog problema nego u_o i to na svim zatvorenim podintervalima iz $0 \le x \le 1$.

Slična konstrukcija može se provesti i u desnoj graničnoj točki x=1. To vodi na $u_o + v_o^1 + \varepsilon\alpha_o^1$ koja se uzima kao prva aproksimacija polaznog problema. Ovdje je $v_o^1 = \varepsilon^{t-q} \sum_{j=1}^{q} c_j^1(\varepsilon)\, e^{\mu_j(x-1)/\varepsilon}$, a α_o^1 polinom s obzirom na x i ε. Da dobijemo aproksimaciju valjanu na $[0,1]$ uvodimo beskonačnodiferencijalnu funkciju $\psi(x)$ i to tako da vrijedi

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 \le x \le \delta \\ 0 & ; \ 2\delta \le x \le 1 \end{cases}$$

pri čemu je δ mali pozitivan broj. Potom se definiraju funkcije ovako:

$$\alpha_o = \psi(x)\,\alpha_o^o + \psi(1-x)\,\alpha_o^1$$

$$v_o = \psi(x)\,v_o^o + \psi(1-x)\,v_o^1$$

time smo dobili prvi član asimptotike: $u_o + v_o + \varepsilon\alpha_o$

Pokažimo kako se postupak može produžiti, tj. dobiti asimptotika višeg reda, tj. formula oblika

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r \cdot \varepsilon^r + \sum_{r=0}^{\infty} v_r \cdot \varepsilon^r + \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \cdot \varepsilon^r$$

Imamo:

$$L_\varepsilon\Big[\sum_{r=0}^{\infty} u_r \cdot \varepsilon^r + \varepsilon \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \cdot \varepsilon^r\Big] + L_\varepsilon\Big[\sum_{r=0}^{\infty} v_r \cdot \varepsilon^r\Big] = f$$

$$L_\varepsilon\Big[\sum_{r=0}^{\infty} u_r \cdot \varepsilon^r + \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \cdot \varepsilon^r\Big] - f = \Big[-M + \sum_{\nu=1}^{m_1-k_1} \varepsilon^\nu a_\nu(x) \frac{d^{k_1+\nu}}{dx^{k_1+\nu}}\Big]\Big[u_o + \sum_{r=1}^{\infty} (u_r + \alpha_{r-1}) \cdot \varepsilon^r\Big] -$$

$$L_\varepsilon\Big[\sum_{r=0}^{\infty} v_r^i \cdot \varepsilon^r\Big] = \varepsilon^{-k_1} \cdot \Big[\sum_{r=0}^{\infty} R_r^i \cdot \varepsilon^r\Big] \cdot \Big[\sum_{r=0}^{\infty} v_r^i \cdot \varepsilon^r\Big] \qquad i = 0,1 \tag{*}$$

Ako sada razložimo gornje formule u red potencija po ε (s time da u (*) uzimamo $\sigma = x/\varepsilon$ odnosno $\tau=(x-1)/\varepsilon$) i izjednačimo sve koeficijente s nulom, onda dobijemo:

$$\begin{aligned} M(u_r) &= F_r \,. \quad r = 0,1,2,\dots \\ F_o &= -f \\ R_o^i\, v_r &= G_r^i\,, \quad r \geq 0,\ i = 0,1\ ;\quad G_o^i \equiv 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nije teško vidjeti da $u_j\ (x,\varepsilon)$ možemo definirati induktivno. Znači, ako su $u_j(x,\varepsilon)$ i $\alpha_j\ (x,\varepsilon)$ $j<r$ već određene kao beskonačnodiferencijabilne funkcije u intervalu $0 \leq x \leq 1$ i ujedno kao polinomi u ε, onda je u_r uz k_1 rubnih uvjeta (1.9) i (1.10) jedinstveno određeno i polinom je u ε. Po indukciji se to protegne i za v_j^o, $j<r$ i pokaže egzistencija funkcije v_r^o takve da:

$$v_r^o = \varepsilon^{s-p} \,.\, \sum_{i=1}^{p} C_{ir}^o\ (\sigma,\varepsilon)\,.\, e^{\lambda_i \cdot \delta} \qquad r = 0,1,2,\dots$$

Isto se može napraviti za drugi rub $x = 1$ i pokazati egzistencija funkcije v_r^1 takve da

$$v_r^1 = \varepsilon^{t-q} \,.\, \sum_{i=1}^{p} C_{ir}^o\ (\sigma,\varepsilon)\,.\, e^{\mu_i \cdot \tau} \qquad r = 0,1,2,\dots$$

s time da v_r^o i V_r^1 zadovoljavaju uvjetima (2.3*) i to u točkama $x = 0$ i $x = 1$. Da bismo zadovoljili uvjete (2.2*), odsijecamo od v_r^o i v_r^1 Maclaurinov razvoj do reda s-p odnosno t-q, i njih oduzimamo od v_r^o i v_r^1. Te razvoje u daljnjem označavamo s $-\varepsilon\alpha_r^o$ i $-\varepsilon\alpha_r^1$.

Označimo li $v_r = \psi(x)\ v_r^o + \psi(1-x)\ v_r^1$ i

$$\alpha_r = \psi(x)\,.\,\alpha_r^o + \psi(1-x)\,.\,\alpha_r^1$$

to se pokazuje da je suma

$$U_N = \sum_{r=0}^{N} u_r \,.\, \varepsilon^r + \sum_{r=0}^{N} v_r \,.\, \varepsilon^r + \sum_{r=0}^{N} \alpha_r \,.\, \varepsilon^r$$

formalna aproksimacija u smislu definicije 1.9. Vishik i Lyusternik su u svom radu [1] ocijenili grešku $u_\varepsilon - U_N$ u normi prostora L_2 ([0,1]) (teormi 6 i 7, str. 60), no nisu dali ocjenu u maksimum normi (ili što je isto u Čebiševljevoj normi). Značajan korak u tom smjeru učinio je J.G.Besjes u radu [3]. Tu se metod Vishika i Lyusternika koristi za rješavanje singularno perturbacijskog Dirichletova problema:

$$\varepsilon L_1 u + L_o u = f \qquad u \subseteq \Omega \quad R^n \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^s u}{\partial n^s} = 0, \qquad s = 0,1,\dots,m-1 \text{ na } \mu\Omega \tag{2.8*}$$

Uvedimo neke definicije.

Definicija 2.2. Kažemo da je funkcija f klase $C^{l+\alpha}(\Omega)$ $f \in N$, $0 < \alpha < 1$ ako f posjeduje neprekidne parcijalne derivacije do reda l na Ω i ako Df posjeduje konačnu

Hölderovu normu reda α. Pri tom Hölderovu normu definiramo:

$$[f]_{l+\alpha} = \sup_{\substack{P,Q\in\Omega \\ P\neq Q}} \frac{|D^l f(P) - D^l f(Q)|}{|P-Q|^\alpha}$$

$|\ \ |$ nam pri tom označavaju Euklidsku normu u R^n.

Za funkciju f klase $C^{l+\alpha}(\Omega)$ uvodimo ove oznake:

$$[f]_j = \sup_{x\in\Omega} |D^j f(x)| \ ; \ |f|_l = \sum_{j=0}^{l} [f]_j \ ; \ f_{l+\alpha} = |f|_l + [f]_{l+\alpha}$$

Definicija 2.3. Za linearne diferencijalne operatore

$$L_1 = \sum_{|\beta|\leq 2m} a_\beta(x)\, D^\beta \quad ; \quad L_o = \sum_{|\alpha|\leq 2k} b_\alpha(x) D^\alpha \ ; \ m > k$$

kažemo da su uniformno jako eliptički u Ω ako postoji konstanta c_o nezavisna od x takva da za svako $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ vrijedi:

$$(-1)^m \sum_{|\beta|=2m} a_\beta(x)\, \xi^\beta \geq c_o\, (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^m \quad i \quad (-1)^k \sum_{|\alpha|\leq 2k} b_\alpha(x) D^\alpha \geq c_o (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^k$$

Definicija 2.4. Za linearni diferencijalni operator L_o kažemo da je pozitivan ako vrijedi:

$$\int_\Omega u \cdot L_o u dx \geq C \int_\Omega |u|^2\, dx$$

za neko $C > 0$.

Na zadaću (2.8) i (2.8*) stavljamo ovakve uvjete:

(P1) $\Omega \subseteq R^n$ je jedna omeđena domena. Nadalje, postoji pozitivan broj $d > 0$ takav da svaka točka $P\in\Omega$ za koju je $\mathrm{dist}(P,\partial\Omega) < d$ posjeduje okolinu U_p (dimenzije n-1) za koju vrijedi:

a) U_p sadrži sferu oko P radijusa $\frac{1}{2}$ d

b) skup $\bar{U}_p \cap \bar{\Omega}$ možemo injektivno preslikati na zatvarač polusfere $\Sigma_{R(P)}$; $R(P) \leq 1$ u R^n pri čemu se $\bar{U}_p \cap \partial\Omega$ preslikava na ravni dio polusfere preslikavanjem T_p koje je klase $C^{l+\alpha}$ za neko $l \in N$, $l \geq 2m$ i svako α, $0 < \alpha < 1$. Osim toga i inverz od T_p pri istu glatkoću kao T_p. Pri tom se misli da svaka komponenta preslikavanja T_p (kao i njegovog inverza) ima konačnu $|\ \ |_{l+\alpha}$ normu omeđenu konstantom $\mathcal{K}$ nezavisnom od točke P.

(P2) f je funkcija od x, ali ne i od ε, i ima istu glatkoću kao i T_p. Za svako α, $0 < \alpha < 1$ vrijedi $[f]_{i+\alpha} < \infty$

(P3) L_1 i L_o su uniformno jako eliptički operatori u Ω reda $m_1 = 2m$ i $k_1 = 2k$, $m > k$, a L_o je pozitivan u Ω.

Prije nego što izložimo metodu rubnog sloja i ocijenimo grešku u Hölderovoj normi, navodimo ključnu ocjenu dokaza koja se bazira na Gardingovoj nejednakosti ([4], p.78), Ehrlingovoj nejednakosti ([3],p.28 teorem 5) i radovima Agmon-Douglis-Nirenberga ([6], chapter 2.)

Teorem 2.1. Uz gornje pretpostavke za rješenje problema (2.8) i (2.8*) vrijedi ova ocjena:

$$[u]_j \leq C\varepsilon^{(l-j-2m+2k+1)/(2m-2k-1)} \cdot |f|_{l-2m+\alpha} + C\,\varepsilon^{-(j+\frac{n}{2})/(2m-2k-1)} \cdot \left(\int_\Omega |f|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

za $j = 0,1,2,\ldots,l$ i ε dovoljno maleno.

3. METODA RUBNOG SLOJA

Gledamo problem (2.8) i (2.8*)i želimo dobiti asimptotski razvoj valjan u Hölderovoj normi. Ideja se bazira na metodi Vishik-Lyusternika kako je izložena u paragrafu 1. Prvo se u okolici ruba domene uvedu lokalne koordinate $(\rho,\phi) = (\rho, \phi_1, \phi_2,\ldots,\phi_{n-1})$, i to tako da $\rho = 0$ predstavlja $\partial\Omega$, a $0<\rho<\rho_o$ predstavlja sve točke u pruzi duž $\partial\Omega$. Lokalne koordinate imaju tako izabrane, izražene u $x_1, j_2,\ldots,j_n$ isti stupanj glatkoće kao i $\partial\Omega$. Pokazuje se da je varijablu ρ, a koja mjeri udaljenost duž normale na $\partial\Omega$, potrebno još i rastegnuti: neka je $t = \rho/\mu$, pri čemu je $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{2m+2k}}$
U novim varijablama imamo:

$$\varepsilon L_1+L_o=\mu^{2m-2k}L_1+L_o=\{\mu^{-2m}a_1(\mu t,\phi)\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}+\ldots\}+\{\mu^{-2k}a_o(\mu t,\phi)\frac{\partial^{2k}}{\partial t^{2k}}+\cdots\} \tag{3.1}$$

Razvijemo li sad koeficijente a_ν u (3.1) u red potencija po μ, to dobijemo:

$$\mu^{2m-2k}L_1u+L_ou=\mu^{-2k}\{a_1(0,\phi)\frac{\partial^{2m}u}{\partial t^{2m}} + a_o(0,\phi)\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\} +\{\mu^{-2k}\sum_{r=1}^{N+1}\mu^r M_r u \tag{3.2}$$

$$\mu^{2m-2k}L_1u + L_ou = \mu^{-2k}\sum_{r=0}^{N+1}\mu^r M_r u \tag{3.3}$$

L_1 i L_o ostaju nakon transformacije uniformno jako eliptički i osim toga vrijedi:

$$(-1)^m a_1(0,\phi) > 0 \quad \text{i} \quad (-1)^k a_o(0,\phi) > 0 \tag{3.4}$$

$u(x,\mu)$ tražimo sada u obliku asimptotskog reda:

$$u(x,\mu) = \sum_{j=0}^{M}\mu^j w_j(x) + \mu^k\sum_{j=0}^{N}\mu^j v_j(t,\phi) + R_{M,n} \tag{3.5}$$

pri čemu iz čisto tehničkih razloga uzimamo:

$$M > 2\,.\,(m-k)$$

$$N = \max\,(M+k,\ M+m-k-1)$$

Supstituiramo li sada (3.5) u jednadžbu (3.3) i zahtijevamo:

$$\begin{aligned}
&L_ow_o=f, \quad L_ow_i=0 \qquad 1\leq i\leq 2m-2k-1\\
&L_ow_{2m-2k+j} + L_1w_j=0 \qquad j=0,1,\ldots,M-(2m-2k)\\
&M_ov_o = 0; \quad M_ov_j + \sum_{i=1}^{j} M_iv_{j-i} = 0 \qquad j = 1,\ldots,N
\end{aligned} \tag{3.6}$$

to problem (2.8) sada poprima oblik:

$$\mu^{2m-2k} L_1 R_{M,N} + L_o R_{M,N} = - \sum_{j=M-(2m-2k)+1}^{M} \mu^{2m-2k+j} L_1 w_j - \mu^{-k} \sum_{\substack{i+j > N \\ 0 < j < N}}^{2N+1} \mu^{i+j} M_i v_j \quad (3.7)$$

Desna strana jednakosti (3.7) je $0(\mu^{M+1}) + 0(\mu^{N+1-k})$, tj. zbog pretpostavke na N desna strana je $0(\mu^{M+1})$.

Istražimo još i rubne uvjete (2.8*). Ako u (2.8*) supstituiramo (3.5), dobijemo:

$$\sum_{j=0}^{M} \mu^j \frac{\partial^s w_j}{\partial n^s} + \sum_{j=0}^{N} \mu^{k-s+j} \left.\frac{\partial^s v_j}{\partial t^s}\right|_{t=0} + \frac{\partial^s R_{M,N}}{\partial n^s} = 0; \; s=0,1,\dots,m-1 \quad (3.8)$$

Te se jednadžbe razbiju u dva bloka:

$$\frac{\partial^s w_o}{\partial n^s} = 0$$

$$\frac{\partial^s w_j}{\partial n^w} = \begin{cases} -\dfrac{\partial^s v_{j+s-k}}{\partial t^s} & j+s-k \geq 0 \\ 0 & j+s-k < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

za s = 0, 1,...k-1 i j = 1,2,...,M

i

$$\frac{\partial^s v_j}{\partial t^s} = \begin{cases} 0 & \text{za } k-s+j < 0 \\ -\dfrac{\partial^s w_{k-s+j}}{\partial n^s} & \text{za } 0 < k-s+j \leq M \\ 0 & \text{za } k-s+j > M \end{cases} \quad (3.10)$$

za s = k, k+1,...,m-1 i j = 0,1,...,N

Preostaje nam

$$\frac{\partial^s R_{M,N}}{\partial n^s} = - \sum_{j=M+s-k+1}^{N} \mu^{k-s+j} \left.\frac{\partial^s v_j}{\partial t^s}\right|_{t=0} \quad (3.11.a)$$

za s = 0,1,...k-1

$$\frac{\partial^s R_{M,N}}{\partial n^s} = 0 \qquad s = k,k+1,\dots,m-1 \quad (3.11)$$

Jednadžbe (3.8), (3.10), (3.11) vrijede u točkama ruba domene Ω. Jednadžbe (3.6), (3.9), (3.10) određuju niz problema za w_o, v_o, w_1, v_1,... Egzistencija funkcija w_i dobro je poznata iz eliptičke teorije ([4], §5. i §8.). Egzsitencija funkcija v_i verificira se ovako: jednadžba

$$a_1(0,\phi) \cdot \lambda^{2m} + a_o(0,\phi) \cdot \lambda^{2k} = 0$$

ima m-k različitih korijena s negativnim realnim dijelom koliko imamo i rubnih uvjeta. Time je degeneracija regularna pa prolazi metoda Vishika i Lyusternika. Funkcije v_i su funkcije rubnog sloja oblika:

$$\sum_{i=1}^{m-k} C_i d_i\,(\phi)\,.\,e^{-\rho/\mu} = \sum_{i=1}^{m-k} C_i d_i\,(\phi)\,.\,e^{-t} \tag{3.12}$$

Znači možemo pisati:

$$u(x,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{M} \mu^j w_j(x) + \psi(x)\,.\,\mu^k\,.\,\sum_{j=0}^{N} \mu^j v_j(t,\phi) + R_M \tag{3.12}$$

pri čemu je ψ beskonačnodiferencijabilna funkcija takva da je :

$$0 \le \psi \le 1$$

$$\psi \equiv 1 \qquad \text{za } 0 \le \rho \le \tfrac{1}{3}\rho_o$$

$$0 \qquad \text{inače}$$

Uvrstimo li (3.12) u (2.8) i (2.8*), dobijemo:

$$\mu^{2m-2k} L_1 R_M + L_o R_M = F_M \quad u \ \Omega$$

$$\frac{\partial^s R_M}{\partial n^s} = G_{s,M} \qquad s = 0,1,\ldots, m-1 \text{ na } \partial\Omega$$

gdje vrijede slijedeće ocjene (zbog strukture od v_i).

$$|F_M|_l \le C\,.\,\mu^{M+1-l} \qquad l = 0,1,\ldots,M \tag{3.13}$$

$$[G_{s,M}]_o \le C_\mu^{M+1} \qquad s = 0,1,\ldots,m-1$$

U daljnjem možemo se bez smanjenja općenitosti ograničiti homogenim rubnim uvjetima, tj. stavljamo $G_{s,M} = 0$. Onda po teoremu 2.1. imamo za fiksne l,M i K proizvoljni:

$$[R_{M+K}]_j \le C\mu^{[(l-j-2m+2k+1)/(2m-2k-1)].(2m-2k)} + \mu^{M+K+1-(l-2m+1)} + C\mu^{-[(jr\frac{n}{2})/(2m-2k-1)].\ (2m-2k)}\,.\,\mu^{M+k+1} \tag{3.14}$$

za $0 \le j \le l$, $l \ge 2m$, μ dovoljno maleno.

Za $l = M + m$, $0 \le j \le M$ i K dovoljno veliko dobivamo:

$$[R_{M+K}]_j \le C\,.\mu^{M+1} \tag{3.15}$$

Po jednakosti trokuta imamo:

$$[R_M]_j \le [R_M - R_{M+K}]_j + [R_{M+K}]_j \le C\mu^{m+1-j} + C\mu^{M+1} \tag{3.16}$$

gdje smo prvi član desne strane ocijenili uz pomoć (3.5) napisanom za M i M+k oduzetim. Time smo ustvari pokazali:

$[u - \sum_{i=0}^{M} \mu^i w_i - \mu^k \sum_{k=0}^{N} \mu^i v_i]_j \le C\,.\mu^{M+1-j}$ za $0 \le j \le M$, s time da se za $M-k < 0$ uzima $\sum_{i=0}^{M-k} = 0$. Time je napravljena ocjena u Hölderovoj normi.

LITERATURA:

1. Vishik M.I., Lyusternik L.A., Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter, Uspehi Mat. Nauk. SSSR 12 (1957), p.3-122.

2. Wiktor Eckhaus: Asymptotic analysis of singular perturbations, Studies in mathematics and its applications, volume 9, Nort-Holland 1979.

3. Besjes J.G., Singular Perturbation Problems for Linear Eliptic Differential Operators of Arbitrary Order I. Degeneration to Elliptic Operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications 49, p.24-46 (1975)

4. Shmuel Agmon: Lectures on elliptic boundary value problems, Van nostrand math. studies 1965.

5. Avner Friedman: Partial Differential Equations, Nortwestern University, 1969.

6. S.Agmon, A.Douglis, L.Nirenberg: Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions I, Communications on pure and pplied math., vol. 12, p.623-727 (1959).

Primljeno: 1988-09-05

Lončar P. Singular Perturbation Problems for Linear Eliptic Differential Operators

S U M M A R Y

In this paper we study Dirichlet problem of singular perturbation type for linear elliptic differential operators of arbitrary order. We use boundary layer method which was suggested by Vishik and Lyusternik. The asymptotic validity of approximation is demonstrated in the maximum norm by means of a priori estimates of Agmon - Douglis - Nirenberg.