Dr. Milorad Tomić
RO "ČESMA" Bjelovar

UDK: 51:62
Stručni rad

PRIMJENA NOVIH METODA NUMERIČKE MATEMATIKE ZA POBOLJŠANJE FUNKCIONALNOSTI TEHNIČKIH APLIKACIJA

Rad predstavlja pokušaj racionalizacije računarskih resursa u tehničkim aplikacijama, napose onima koje se zasnivaju na korištenju transcedentnih funkcija.

U tu je svrhu definirana nova iterativna metoda, nazvana "Iteracija s posmičnim ulazom". Ta je metoda poslužila za uvođenje specifičnog sustava algoritama. Metoda je zasnovana na mogućnosti započinjanja iterativnog procesa tzv. posmičnim varijablama ulaza. Vrijednosti indeksa posmičnih varijabli proizlaze iz izrečenih i dokazanih teorema. Spomenuti sustav algoritama omogućuje znatno svrsishodniju, napose bržu realizaciju elementarnih transcedentnih funkcija i njihovih aplikacija u širem smislu.

Posebno je značajno istaći da je spomenuti sustav algoritama vrlo podesan za implementaciju pri izgradnji specijalnih mikroprogramiranih računarskih sustava(procesno vođenje u industriji, navigacija, zrakoplovstvo itd.).

Algoritam; argumenti funkcija; alarmna stanja; zadani argument; posmični ulaz

1. POTREBA POBOLJŠANJA FUNKCIONALNOSTI TEHNIČKIH APLIKACIJA

Implementirane realizacije elementarnih transcedentnih funkcija, kao i matematičkih funkcija u općem smislu, pomoću odgovarajućih algoritama, uz relativno spore ulazno/izlazne operacije, batch obrade i sl., svojevremeno nisu predstavljale "uska grla" obrade podataka i informacija. Tek u najnovije vrijeme, upotrebom mikroprogramiranih računala, pojavljuje se potreba brže realizacije pojedinih dijelova obrade.

U radu se ističe potreba uvođenja brzih algoritama za realizaciju funkcija u informacijskom podsistemu nadzora i vođenja procesa proizvodnje.

S proizvodne linije, posredstvom odgovarajućih sklopova, dolaze dvije grupe podataka:

- podaci označeni grupom "F" koji predstavljaju vrijednosti pojedinih funkcija u okviru sustava (potrošnja energije, napon ili jakost električne energije na trošilu i sl.) koji su dobiveni pomoću odgovarajućih mjernih instrumenata,

- podaci označeni s $U_1,\dots,U_n$, koji predstavljaju ostale ulazne veličine koje nisu funkcijske vrijednosti, a koje se također dobivaju pomoću mjernih instrumenata.

Korištenjem ove dvije grupe podataka programska podrška računala realizira treću grupu podataka (vrijednosti funkcije G),

$$G = g\ (F,\ U_1,\ U_2,\ldots,U_n),$$

koji su funkcije prvih dviju grupa. Tako realizirane vrijednosti omogućuju automatsku intervenciju u proizvodni proces i/ili neposrednu intervenciju u taj proces preko operatera sustava koji odlučuje o karakteru i potrebi intervencije.

Međutim, u proizvodnom procesu može se pojaviti slučaj kad mjerni instrumenti iz nekih razloga nisu u mogućnosti poslati vrijednosti pojedinih funkcija procesa, već samo pojedinačne veličine $x_1,\ldots,x_m$ (argumente funkcija), pomoću kojih se izračunava vrijednost funkcija F, $F = f(x_1,\ldots,x_m)$.

Pošto realizacija tih funkcija značajno oduzima raspoloživo procesorsko vrijeme, vrlo je bitna brza realizacija korespondentnih algoritama.

U praktičnoj primjeni uglavnom se upotrebljava povećavanje prioriteta dijela programske podrške za te realizacije, a u svrhu njihova bržeg izvršenja. Međutim, taj pristup ima jedan veliki nedostatak, a to je da ulazne veličine procesa, podržane podrškom manjeg prioriteta, često puta uopće ne dolaze u sustav. Kako je ulaz tih veličina u nekom vremenskom intervalu unaprijed nepredvidljiv, to je moguće da se izgubi čitav niz relevantnih pokazatelja, a samim tim i značajnije naruši vjerodostojnost i djelotvornost sustava.

Ovaj značajan problem prisutan je u svim informacijskim podsistemima procesorskog vođenja i njima srodnim podsistemima.

U smislu razrješenja ove problematike, mnogo je praktičnije ostvariti bržu realizaciju funkcija F, upotrebom adekvatnih "brzih" algoritama koji će se relativno lako implementirati u računarski sustav.

U spomenutom informacijskom podsistemu pojavljuje se potreba brze realizacije pojedinih transcedentnih funkcija i kod problema određivanja tzv. alarmnih stanja. Nakon ulaza pojedinih parametara, posredstvom mjernih uređaja, određuje se tzv. očekivana funkcija f. Prilikom promjene varijable x, mjerni instrumenti daju vrijednosti tzv. dobivene funkcije g (x).

Po definiciji, sustav u normalnom (neinterventnom) stanju kad je za neko mjerenje u točki x

$$|\ f(x)\ -\ g(x)\ | < \varepsilon,$$

za unaprijed određenu vrijednost ε.

Zbog mogućnosti "previda" alarmnih područaj (δ_1), nužno je razliku ovih funkcija izračunavati na što "gušćem" diskretnom skupu varijabli x.

Pošto se vrijednosti funkcije g dobivaju mjerenjem, a funkcije f izračunavanjem, nužna je brza realizacija ove funkcije, naravno, pomoću algoritama koji omogućuju takvu realizaciju. Na taj je način moguće znatno smanjiti broj neotkrivenih alarmnih stanja sustava, tj. stanja u kojima je došlo do netolerantnog odstupanja parametara sustava.

Pošto su danas uglavnom svi sustavi za procesno vođenje riješeni mikroprogramski, moguće je realizirati implementaciju sustava algoritama za brzu realizaciju transcedentnih funkcija, u smislu metode koja se uvodi u narednom izlaganju.

2. ITERATIVNA METODA "ZNAMENKA ZA ZNAMENKOM"

2.1. Uvođenje metode i realizacija trigonometrijskih funkcija

Iterativna metoda "znamenka za znamenkom" zasniva se na postupku transformacije pravokutnih koordinata vektora u polarne. Ova se transformacija može svrsishodno iskoristiti za iterativni proces.

U geometrijskom smislu metoda koristi "oscilacije" vrha radijus-vektora koje uvjetujemo rotacijama za poznate kutove i to od početnog položaja do konačnog položaja koji je determiniran vrijednošću argumenata.

Osnovna koncepcija ove iterativne metode obradit će se primjenom na konkretnom slučaju, na realizaciju trigonometrijskih funkcija. U tu svrhu, neka nam je potrebno izračunati vrijednosti para trigonometrijskih funkcija

$$(\sin\phi,\ \cos\phi)$$

za zadani argument ϕ.

Iterativni proces počinjemo od početnog radijus-vektora $R_o(1,0)$. Taj vektor potrebno je rotirati oko ishodišta koordinatnog sustava za kutove

$$\alpha_i,\quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

uz uvjet da njihova suma nakon beskonačno mnogo pribrajanja bude jednaka argumentu ϕ, tj.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \phi .$$

Očito da nakon tog postupka vrijedi

$$y = \sin\phi$$
$$x = \cos\phi .$$

Rotaciju spomenutog vektora realiziramo pomoću poznatih formula:

(1) $$y_{i+1} = \cos\alpha_i\,(y_i + x_i \operatorname{tg}\alpha_i),$$

(2) $$x_{i+1} = \cos\alpha_i\,(x_i - y_i \operatorname{tg}\alpha_i).$$

U ovim formulama postoje operacije zbrajanja, množenja, pa čak i iznalaženja vrijednosti funkcija $\operatorname{tg}\alpha_i$ i $\cos\alpha_i$. Da bismo prilagodili ovu, na prvi pogled složenu (u smislu upotrebe algebarskih operacija), strukturu formula, potrebno je odabrati takve kutove α_i da bi se:

- eliminirala operacija množenja i traženje vrijednosti spomenutih trigonometrijskih funkcija, te
- osigurala konvergencija metode.

Kutove α_i najpodesnije je odabrati tako da $\operatorname{tg}\alpha_i$ bude jednak vrijednosti potencije s cjelobrojnim eksponentom, čija je baza ujedno i osnovni broj brojevnog sustava (za binarni 2, za dekadski 10,....), u kojem se vrši realizacija algoritma.

Može se dokazati da u binarnom brojevnom sustavu konvergenciju metode osigurava izbor kutova u obliku

(3) $$\alpha_i = \operatorname{arc\,tg} 2^{-i}.$$

Pošto za ovako odabrane kutove vrijedi:

(4) $$\operatorname{tg} \alpha_i = 2^{-i},$$

operaciju množenja u jednadžbama (1) i (2) možemo zamijeniti množenjem brojem 2^{-i}, što u binarnom sustavu ustvari predsatvlja operaciju posmika brojevnog zareza za i mjesta ulijevo. No, treba zadovoljiti još i bitan uvjet da je algebarska suma tako odabranih kutova početno zadanom kutu ϕ, koji predstavlja argument para trigonometrijskih funkcija.

Da bismo zadovoljili taj uvjet, ptorebno je pri svakom koraku iteracije pitati da li je zbroj kutova α_i veći ili pak manji od kuta ϕ. dakle, treba odrediti predznak kutova α_i, u svrhu osiguranja konvergencije metode.

Neka je

$$\xi_i = \pm 1, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

broj koji će karakterizirati predznak kuta α_i.

Ima smisla uvesti jednadžbu

(5) $$\operatorname{sign} \xi_i = \operatorname{sign} (\phi - \sum_{j=0}^{i=1} \xi_j \alpha_j).$$

Pošto je vrijednost kutova odabrana s (3), osigrana je mogućnost odabiranja po apsolutnoj vrijednosti sve manjih kutova α_i, tako da njihova suma može dostići kut ϕ.

Naime, jednadžba (5) daje način određivanja predznaka kutova α_i na taj način da je kut α_i u i-toj iteraciji pozitivan ako je

$$\sum_{j=0}^{i=1} \xi_j \alpha_j, \quad i = 1,2,\ldots$$

manja od kuta ϕ, a negativan ako je ta suma već premašila kut ϕ. Treba istaći da je izbor kutova ϕ_i prema (3) moguć za

$$|\phi| < \frac{\pi}{2}.$$

Na taj način radijus-vektor rotiramo iz početnog položaja (leži na apscisi) za kutove

$$\pm \operatorname{arc\,tg} 2^{0}, \ \pm \operatorname{arc\,tg} 2^{-1}, \ \pm \operatorname{arc\,tg} 2^{-2}, \ \ldots$$

Teoretski gledano, ovaj bi iterativni proces trajao beskonačno dugo. Međutim, praktično gledano, ako se argument ϕ u binarnom sustavu zadaje na n mjesta iza brojevnog zareza, dovoljno je uzeti konačan broj kutova α_i,

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1},$$

jer u tom slučaju vrijedi da su svi

$$\operatorname{arc\,tg} 2^{-n}, \ \operatorname{arc\,tg} 2^{-n-1}, \ldots$$

jednaki "strojnoj" nuli.

Nakon eliminacije množenja faktorom tg $_i$, u formulama (1) i (2) preostaje još jedan faktor koji komplicira te izraze (u numeričkom smislu). To je $\cos \alpha_i$.

Da bismo eliminirali operaciju množenja tim faktorom, potrebno je razriješiti značenje te vrijednosti. Izostavimo li $\cos \alpha_i$ u formulama (1) i (2), rotirani će se vektor uvećati iz koraka u korak iteracije i to za

$$\frac{1}{\cos\alpha_i}$$

puta. Nakon n koraka iteracije, modul vektora uvećat će se

(6) $$c_T = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\cos\alpha_i} \quad \text{puta.}$$

U relaciji (6) uvedena je oznaka c_T, koju ćemo nazivati koeficijentom deformacije trigonometrijskog vektora. Da bismo kompenzirali ovo uvećanje radijus-vektora, odaberimo apscisu početnog položaja

$$x_0 = \frac{1}{c_T}.$$

Uzimajući u obzir sve do sada prezentirane činjenice, može se konstruirati iterativni proces za realizaciju para trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus.

Vrijede formule:

(7) $A(\sin\phi,\ \cos\phi)\ldots$

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \xi_i\, x_i \cdot 2^{-i} \\
x_{i+1} &= x_i - \xi_i\, y_i \cdot 2^{-i} \\
\phi_{i+1} &= \phi_i - \xi_i \operatorname{arc\,tg} 2^{-i} \\
\operatorname{sign} \xi_i &= \operatorname{sign} \phi_i .
\end{aligned}$$

Iteracijske jednadžbe iz (7) primjenjuju se n puta, uz početne uvjete:

(8) $$x_0 = \frac{1}{c_T} = \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=0}^{n-1} (1+2^{-2i})}},$$

$$y_0 = 0, \quad \phi_0 = \phi .$$

Nakon n ciklusa iteracije, dobiva se da je

$$\begin{aligned}
x_n &= \cos\phi \\
y_n &= \sin\phi ,
\end{aligned}$$

s točnošću do 2^{-n+1} u binarnom brojevnom sustavu.

Napomenimo da će oznaka $A(f_1(x), f_2(x))$ nadalje predstavljati algoritam para funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$, tj. skup iterativnih jednadžbi kojim je realiziran.

Analognim postupcima mogu se dobiti algoritmi za realizaciju ostalih transcedentnih funkcija.

U idućoj točki uvedena je modificirana iterativna metoda koja omogućuje skraćivanje broja koraka iterativnog postupka u algoritmima koji se na njoj zasnivaju.

2.2. **Iteracija s posmičnim ulazom**

Definicija 1. Iteracijom s posmičnim ulazom nazivat ćemo iterativni postupak koji se temelji na transformaciji pravokutnih koordinata u polarne koji, ovisno o veličini argumenta, započinje odgovarajućim korakom iteracije. Pošto će ova iteracija poslužiti kao podloga novom sustavu algoritama, uvodi se naredna definicija.

Definicija 2. Algoritam za realizaciju para elementarnih transcedentnih funkcija $(f_1(x), f_2(x))$, temeljen na iteraciji s posmičnim ulazom, označavat će se sa

$$A_p(f_1(x), f_2(x)), \quad p = 0, 1, \ldots, n-1,$$

gdje je p indeks posmičnog ulaza.

Dokažimo mogućnost konstrukcije algoritma A_p $(\sin\phi, \cos\phi)$. Pri realizaciji algoritma para trigonometrijskih funkcija $(\sin\phi, \cos\phi)$, konstatiraju se slijedeće činjenice:

- ovisno o veličini argumenta ϕ, potrebno je upotrijebiti određeni broj istih koraka iteracije (u smislu upotrebe kutova ϕ_i u istom redoslijedu s istim predznacima) i to tim veći broj koraka, što je argument manji, da bi razlika

$$\phi_i = \phi - \sum_{i=0}^{i-1} \xi_j \alpha_j, \qquad \text{težila nuli.}$$

- zbog ovisnosti veličina x_i i y_i o veličini ϕ_i, očito je da će za manje argumente relativno velik broj tih veličina od početka do izvjesnog indeksa u iterativnom postupku biti jednak.

U tu svrhu autor je iskazao i dokazao slijedeće teoreme:

Teorem 1. Neka je algoritam za realizaciju para trigonometrijskih funkcija $(\sin\phi, \cos\phi)$ definiran sa

$$A\ (\sin\phi, \cos\phi)\ldots$$
$$y_{i+1} = y_i + \xi_i\, x_i \cdot 2^{-i}$$
$$x_{i+1} = x_i - \xi_i\, y_i \cdot 2^{-1}$$
$$\phi_{i+1} = \phi_i - \xi_i \ \text{arc tg}\ 2^{-i}$$
$$\text{sign}\ \xi_i = \text{sign}\ \phi_i,$$

uz početne uvjete dane sa (8) i neka su brojevi α i β dani u obliku

(9) $$\alpha = m_\alpha\, 2^{-p}, \qquad \beta = m_\beta\, 2^{-p},$$

gdje je

(10) $$1 \le m_\alpha,\ m_\beta < 2,\ p = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Tada se prvih p iterativnih varijabli tih brojeva podudaraju, tj. vrijedi:

(11) $$x_j(\alpha) = x_j\ (\beta)$$
$$y_j(\alpha) = y_j\ (\beta), \qquad \text{za svako } j,\ j \le p.$$

Teorem 2. Neka je algoritam za realizaciju para trigonometrijskih funkcija $(\sin\phi, \cos\phi)$ dan kao u Teoremu 1. i neka je

$$n' = n - p,$$

gdje je p = 0, 1, ..., n-1 indeks posmičnog ulaza određen iz

$$\phi = m\ 2^{-p}, \quad 1 \le m < 2.$$

tada postoje jednoznačno određene početne vrijednosti iterativnih varijabli posmičnog ulaza x_p, y_p, ϕ_p, tako da nakon samo n' koraka iteracije vrijedi:

$$\begin{aligned} y_{n'+p} &= \sin \phi, \\ x_{n'+o} &= \cos \phi, \qquad \text{s točnošću do } 2^{-n+1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Analognim teorijskim postavkama dolazi se do ostalih algoritama za realizaciju gotovo elementarnih transcedentnih funkcija.

Algoritmi $A_p(f_1(x),\ f_2(x))$, temeljeni na iteraciji s posmičnim ulazom, znatno su svrsishodniji (napose brži) u odnosu na implementirane algoritme postojećih računarskih sustava.

Pošto se algoritmi $A_p(f_1(x),\ f_2(x))$ temelje na brzim operacijama zbrajanja i posmika, njihova je realizacija brža i u uvjetima programiranja u strojnim jezicima, a naročito su podesni za korisnički orijentirane mikroprogramirane računarske sustave.

Značajno je istaći da je ovakav sustav algoritama, s obzirom na način određivanja varijabli iteracije, vrlo podesan pri izgradnji specijaliziranih mikroprogramiranih računarskih sustava (procesno vođenje u industriji, navigacija, zrakoplovstvo itd.), u kojima se traži vrlo brza realizacija pojedinih matematičkih funkcija, izračunavanje polarnih koordinata i sl. Takav bi se sustav algoritama mogao implementirati u upravljačku memoriju (ROM) mikroprocesorskog sustava.

LITERATURA

1. Bajkov V.D., Smolov,V.B., APPARATURNAJA REALIZACIJA ELEMENTARNYH FUNKCIJ V CVM, Izd-vo, Leningrad, 1975.
2. Baker G.A., ESSENTIALS OF PADE APPROXIMATIONS, Academic Press, New York, 1975.
3. Demidovich B.P., Maron I.A., COMPUTATIONAL MATHEMATICS, Mir Publishers, Moskva, 1981.
4. Luke Y.L., MATHEMATICAL FUNCIONS AND THEIR APPROXIMATIONS, Academic Press Inc., New York 1975.
5. Rabinovič Z.L., Ramanauskas V.A., TIPOVYE OPERACII V VYČISLITELJNYH MAŠINAH, Tehnika, Kiev 1980.
6. Tomić M., ITERATIVNA METODA "CIFRA ZA CIFROM", Sistemi Delta br.5, Ljubljana, 1984.
7. Tomić M., ITERATIVNA METODA ZA BRZU REALIZACIJU MATEMATIČKIH FUNKCIJA NA ELEKTRONIČKOM RAČUNALU, Zbornik radova "Informatica '85", N.Gorica, 1985.
8. Tomić M., ALGORITMI ZA OPTIMIRANJE REALIZACIJE TRANSCEDENTNIH FUNKCIJA, doktorska disertacija, ETF Zagreb, 1986.

9. Tomić M., BRZA REALIZACIJA TRANSCEDENTNIH FUNKCIJA NA ELEKTRONIČKOM RAČUNALU, Zbornik radova "Jahorina '87", Sarajevo, 1987.

Primljeno: 1988-06-22

Tomić M. The Use of New Methods of Numerical Mathematics for the Improvement of the Functionality of Engineering Applications

S U M M A R Y

In this paper the author has defined a new iterative method called "Iteration with shift input". This method served for the introduction of the algorithm system A_p $(f_1(x), f_2(x))$. The method itself is based on the possibility of commencing the iterative process with so-called "shift input variables". The values of shift variables indexes result from stated and proved theorems. The abovementioned algorithm system encures a considerably more appropriate and particulary quicker realization of elementary transcendental functions and their applications in a wider sense.

It should be particulary noted that the above algorithm system is very suitable for implementation by the construction of special microprogrammable computer systems.