Mr. Mirko Čubrilo

Fakultet organizacije i informatike
Varaždin

UDK:
Pregledni rad

PRINCIP REZOLUCIJE KAO TEORIJSKA OSNOVA JEZIKA UMJETNE INTELIGENCIJE *PROLOG*

Razvoj matematičke logike i teorije algoritama dao je tokom posljednjih desetljeća i niz rezultata primjenjivosti i ujedno teorijska ograničenja njihovih dometa. Kao jedno od glavnih dostignuća matematičke logike smatramo formulaciju računa predikata prvog reda. U okviru tog formalizma postala je moguća sintaktička i semantička analiza logičkog zaključivanja. Dokazani su strukturni metateoremi poput metateorema kompaktnosti i potpunosti itd. Radovi J. Herbranda pokazali su da je moguća mehanička procedura dokaza kontradiktornosti skupa izjava računa predikata prvog reda, ako je dani skup izjava uistinu kontradiktoran. Princip rezolucije poslužio je kao veoma efektivno pravilo izvoda praznog disjunkta. Razvoj teorije algoritama donio je niz međusobno ekvivalentnih formulacija intuitivnog pojma algoritma i dokaz algoritamske nerješivosti računa predikata, što je dalo teorijska ograničenja mogućnosti primjene Herbrandove procedure. Na izloženim teorijskim osnovama izrastao je programski jezik PROLOG. U ovom članku izloženi su svi osnovni teorijski rezultati o računu predikata prvog reda, na kojima se zasniva PROLOG. To su: algoritam prevođenja izjave u standardnu (Skolemovu) formu, Herbrandova procedura, algoritam unifikacije i princip rezolucije. Većina pojmova i rezultata ilustrirana je najprije na primjerima iz računa sudova, a zatim na primjerima iz računa predikata.

1. UVOD

Kao što i za mnoge druge znanstvene oblasti koje se danas nalaze u veoma brzom razvoju, gdje broj novih otkrića i primjena raste gotovo eksponencijalno , ne postoje stroge definicije koje bi tu oblast jednoznačno odredile, tako ne postoji ni jedinstvena i općenito prihvaćena definicija oblasti umjetne inteligencije. U ovom članku ograničavamo se na dio te oblasti pod nazivom " heurističko programiranje ". Radi se naime o razvijanju programa za elektronička računala kojima se rješavaju problemi, koje bismo, da ih rješava čovjek, smatrali prilično (pa čak i veoma) teškim intelektualnim problemima. Među takve spadaju programi koji daju relevantne odgovore na pitanja o semantičkoj povezanosti nekih podataka u širem kontekstu zadanog skupa podataka, programi koji dokazuju teoreme iz određene oblasti matematike, kao što je na primjer euklidska geometrija, programi koji igraju složene igre poput šaha, prevode s jednog jezika na drugi itd. U rješavanju takvih problema čovjek koristi prethodna znanja, intuiciju stvorenu na osnovi prethodnih iskustava i logiku. Navedeni i mnogi drugi problemi mogu se opisati i rješavati metodama matematičkog formalizma računa predikata prvog reda (odnosno teorija prvog reda). Na današnjem stupnju razvoja jezika programiranja one su implementirane u mnogobrojne verzije jezika PROLOG, koji ne bez razloga nosi epitet jezika umjetne inteligencije i predstavljaju njegove teorijske osnove. Sama sintaksa jezika PROLOG ovdje neće biti izlagana. Dobar uvod u sintaksu jezika PROLOG i programiranje na njemu postoji u knjizi /1/ u popisu literature. Ideje i metode koje ćemo ovdje izložiti imaju svoja ograničenja i nedostatke. Na kraju članka osvrnut ćemo se na neke od njih.

2. SINTAKSA I SEMANTIKA RAČUNA SUDOVA

Račun sudova (u daljnjem tekstu :RS) predstavlja fragment računa predikata prvog reda s jednostavnom sintaksom i semantikom i posebno jednostavnim dokazima metateorema adekvatnosti i potpunosti, koji opet sa svoje strane daju vezu između sintakse i semantike, a ta veza služi kao idejna osnova principa rezolucije.
Sudove kao osnovne objekte interpretirat ćemo kao tvrdnje koje su ili istinite ili lažne. Na primjer :

P: " Nebo je plavo ", Q : " Kiša pada " (atomarni sudovi ili atomi)
R: " Nebo je plavo ili kiša pada " (složeni sud ili samo sud).

U daljnjem izlaganju zanemarit ćemo stvarni sadržaj i smisao sudova i baviti se samo njihovim istinosnim vrijednostima "0" - laž i "1" - istina. Prelazimo sada na izlaganje nužnih definicija i rezultata o RS.

2.1. *Definicija*: Abeceda $\mathcal{A}$ jezika $\mathcal{L}$ (RS) je unija slijedećih skupova simbola :

$A = \{ P, Q, R, \dots \}$ - najviše prebrojiv skup (simbola) atomarnih sudova (atoma),

$V = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$ - skup logičkih veznika, redom " ne ", " i ", " ili ", " povlači " i " ekvivalentno " i

$Z = \{ (,) \}$ - lijeva i desna zagrada

2.2. *Definicija*:

a) Svaki atom je sud.
b) Ako je F sud, onda je i ($\neg$F) sud.
c) Ako su F i G sudovi, onda su to i $(F \land G)$, $(F \lor G)$, $(F \to G)$ i $(F \leftrightarrow G)$.
d) Riječ (konačan niz simbola) u abecedi jezika $\mathcal{L}$(RS) je sud ako i samo ako je dobivena primjenom nekih (možda i svih) od pravila a) - c) konačno mnogo puta.

Primjer 1:

$$((\neg(P \to Q) \leftrightarrow (R \land S)))) \to (R \lor (\neg P))$$

2.3. *Definicija* : Neka je F sud i P_1 , P_2 , ... , P_n skup svih njegovih atoma. Svaku funkciju ι:{ P_1 , P_2 , ... , P_n }$\to${0,1} zovemo interpretacijom suda F.

Primjer 2:

$F:(P \lor Q) \to R$, $\iota:\{P,Q,R\} \to \{0,1\}$, $\iota(P)=0$, $\iota(Q)=\iota(R)=1$ je primjer interpretacije suda F u kojoj je P lažan, a Q i R su istiniti sudovi.

Svaki sud sačinjen od n atoma ima 2^n interpretacija. Da li će sud F biti istinit u interpretaciji ι , ovisi kako o vrijednostima $\iota(P_j)$,$j \in \{1,2, \dots ,n\}$, tako i o njegovoj strukturi. Koristimo oznake $\iota(F)=1$ ako je F istinit u interpretaciji ι, a u suprotnom $\iota(F)=0$. $\iota(F)$ zovemo istinosnom vrijednošću suda F u interpretaciji ι.

2.4. *Definicija* :

a) Ako je F:P i P atom, onda je $\iota(F)=\iota(P)$
b) Ako je F: $\neg$G, onda je $\iota(F)=1$ ako i samo ako je $\iota(G)=0$
c) Ako je F: $G \lor H$, onda je $\iota(F)=1$ ako i samo ako je $\iota(G)=1$ ili $\iota(H)=1$ (" ili " je ovdje inkluzivno)

d) Ako je $F: G \wedge H$, onda je $i(F)=1$ ako i samo ako je $i(G)=1$ i $i(H)=1$.
e) Ako je $F: G \rightarrow H$, onda je $i(F)=0$ ako i samo ako je $i(G)=1$ i $i(H)=0$
f) Ako je $F: G \leftrightarrow H$, onda je $i(F)=1$ ako i samo ako je $i(G)=i(H)$

Primjer 3:

$F:((P \wedge (\neg Q)) \rightarrow (Q \rightarrow (\neg P))$, $i:\{P,Q\} \rightarrow \{0,1\}$, $i(P)=1$, $i(Q)=1$. Tada vrijedi: $i(\neg P)=0$ (prema a) i b) iz def. 2.4.), $i(Q \rightarrow (\neg P))=0$ (prema a), b), i d) iz def. 2.4.) i konačno $i(F)=1$ (prema e) iz def. 2.4.).

Sud F u kojem nastupaju (međusobno različiti) atomi $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ima 2^n interpretacija. Svaku od njih moguće je jednoznačno prikazati skupom $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, gdje je m_i ili P_i (ako je $i(P_i=1$) ili $\neg P_i$ (ako je $i(P_i)=0$)

Primjer 4:

Neka je $F:(P \vee Q) \rightarrow \neg R$, $i:\{P,Q,R\} \rightarrow \{0,1\}$ i $i(P)=1$, $i(Q)=i(R)=0$. Tada interpretaciju i prikazujemo skupom $\{P, \neg Q, \neg R\}$.

Među sudovima postoje takvi koji su istiniti u svakoj interpretaciji (zovemo ih identički istinitim sudovima ili tautologijama), oni koji su istiniti bar u jednoj interpretaciji (ispunjivi ili nekontradiktorni sudovi) i oni koji su lažni u svakoj interpretaciji (neispunjivi, kontradiktorni, ili identički lažni sudovi). Da je sud F identički istinit , ponekad ćemo označavati znakom T, a da je identički neistinit, znakom $\perp$.

Među navedenim pojmovima postoje očigledne veze poput ovih:

1. Sud F je identički istinit ako i samo ako je sud $\neg F$ identički lažan.

2. Ako je F identički istinit sud, onda je on nekontradiktoran, dok obratno ne mora biti.

3. Sud F nije identički istinit ako i samo ako postoji bar jedna interpretacija u kojoj je on lažan.

Ako je sud F istinit u interpretaciji $\imath$ kžemo da je $\imath$ model za F i pišemo $\imath \models F$. Jasno je na primjer što znači $\{P, \neg Q\} \models P \wedge \neg Q$.

2.5. *Definicija*: Kažemo da su sudovi F i G (semantički) ekvivalentni i pišemo $F \equiv G$ ako i samo ako je sud $F \leftrightarrow G$ identički istinit.

Primjer 5 :

Uz pomoć definicije 2.4. lako je provjeriti da su ekvivalentni slijedeći parovi sudova:

1) $F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$

2) $F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$

3)a) $F \vee G \equiv G \vee F$ b) $F \wedge G \equiv G \wedge F$

4)a) $(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$ b) $(F \wedge G) \wedge H \equiv (F \wedge G) \wedge H$

5)a) $(F \vee (G \wedge H)) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$ b) $(F \wedge (G \vee H)) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$

6)a) $F \vee \bot \equiv F$ b) $F \wedge T \equiv F$

7)a) $F \vee T \equiv T$ b) $F \wedge \bot \equiv \bot$

8)a) $F \vee \neg F \equiv T$ b) $F \wedge \neg F \equiv \bot$

9) $\neg(\neg F) \equiv F$

10)a) $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$ b) $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$

2.6. *Definicija*: Neka su $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sudovi i $F: F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$. Tada svaki F_i zovemo disjunktom u (iz) F, a sam sud F disjunkcijom sudova $F_1, \ldots, F_n$. Ako je $F: F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$, tada svaki F_i zovemo konjunktom u (iz) F, a sam F konjunkcijom sudova $F_1, \ldots, F_n$.

2.7. *Definicija* : Sud F je u konjunktivnoj normalnoj formi ako i samo ako je $F: F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$, a svaki F_i je disjunkcija nekih atoma ili negacija nekih atoma.

2.8. *Definicija* : Sud F je u disjunktivnoj normalnoj formi ako i samo ako je $F: F_1 \vee \ldots \vee F_n$, a svaki F_i je disjunkcija nekih atoma ili negacija nekih atoma

Koristeći tablicu iz primjera 4, svaki sud možemo prevesti u svaku normalnu formu.

Primjer 6:

1) Sud $F: (C \rightarrow A) \rightarrow (\neg(B \vee C) \rightarrow A)$ prevesti u disjunktivnu normalnu formu.

Rješenje :

$$(C \rightarrow A) \rightarrow ((\neg(B \vee C) \rightarrow A) \equiv \neg(C \rightarrow A) \vee (\neg(B \vee C) \rightarrow A) \equiv$$
$$\equiv \neg((\neg C) \vee A) \vee (\neg(\neg(B \vee C)) \vee A) \equiv \neg(\neg C \vee A) \vee (B \vee C \vee A) \equiv$$
$$\equiv (\neg(\neg C) \wedge \neg A) \vee (A \vee B \vee C) \equiv (\neg A \wedge C) \vee (A \vee B \vee C) \equiv$$
$$\equiv ((A \vee B \vee C) \wedge ((A \vee B \vee C) \vee C) \equiv T \wedge (A \vee B \vee C) \equiv A \vee B \vee C$$

2) Sud $F: ((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow \neg A)) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg C)$ prevesti u konjunktivnu normalnu formu.

Rješenje:

$$((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow \neg A)) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg C) \equiv \neg((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow \neg A)) \vee (\neg B \rightarrow \neg C) \equiv$$
$$\equiv \neg(\neg(A \rightarrow B) \vee (C \rightarrow \neg A)) \vee (\neg B \rightarrow \neg C) \equiv ((A \rightarrow B) \wedge \neg(C \rightarrow \neg A)) \vee (\neg B \rightarrow \neg C) \equiv$$
$$\equiv (\neg A \vee B) \wedge (C \wedge A)) \vee (B \vee \neg C) \equiv ((\neg A \vee B) \vee (B \vee \neg C) \wedge (C \wedge A) \vee (B \vee \neg C)) \equiv$$
$$\equiv (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge ((B \vee \neg C \vee C) \wedge (B \vee \neg C \vee A)) \equiv (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg C)$$

2.9. *Definicija* : Neka su $F_1, F_2, \ldots, F_n$ i G sudovi. Kažemo da je sud G logička posljedica sudova $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ako je $i \models G$ za svaku interpretaciju i za koju je $i \models F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$

Izložit ćemo sada dva metateorema koji predstavljaju karakterizaciju pojma logičke posljedice.

2.10. *Metateorem*: Neka su $F_1, F_2, \ldots, F_n$ i G sudovi. Sud G je logička posljedica sudova $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ako i samo ako je $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$ identički istinit sud.

Dokaz:

a) Neka je G logička posljedica sudova $F_1, \ldots, F_n$ i neka $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$ nije identički istinit sud. To znači da postoji interpretacija i_0, takva da nije $i_0 \models (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$. Tada je očito $i_0 \models \neg((F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G)$. Kako je $\neg((F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G) \equiv \neg(\neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \vee G) \equiv F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$, to je $i_0 \models F_1, \ldots, i_0 \models F_n$ i $i_0 \models \neg G$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je G logička posljedica sudova $F_1, \ldots, F_n$, pa je $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$ identički istinit sud.

b) Neka je $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$ identički istinit sud i G nije logička posljedica sudova $F_1, \ldots, F_n$. To znači da postoji interpretacija i_0, takva da je $i_0 \models F_1, \ldots, i_0 \models F_n$ i $i_0 \models \neg G$. Kako je $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \rightarrow G$ po pretpostavci identički istinit sud, ispunjeno je i $i_0 \models (F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$, tj. $i_0 \models \neg F_1 \vee \neg F_2 \vee \ldots \vee \neg F_n \vee G$, tj. $i_0 \models \neg F_1$ ili $i_0 \models \neg F_2$ ili ... ili $i_0 \models \neg F_n$ ili $i_0 \models \neg G$, pa je istovremeno ispunjeno ili $i_0 \models F_i$ i $i_0 \models \neg F_i$ za neki $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ ili $i_0 \models G$ i $i_0 \models \neg G$ što je kontradikcija u svakom slučaju.

2.11. *Metateorem*: Sud G je logička posljedica sudova $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ako i samo ako je sud $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G)$ kontradiktoran.

Dokaz:

Prema prethodnom metateoremu, sud G je logička posljedica sudova $F_1, \ldots, F_n$ ako i samo ako je $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$ identički istinit sud. Tada je $\neg((F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G)$ kontradiktoran sud. Jer je $\neg((F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G) \equiv \neg(\neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \vee G) \equiv \neg(\neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n)) \wedge \neg G \equiv$ $\equiv F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$, to je i taj sud kontradiktoran.

Metateoremima karakterizacije pojma logičke posljedice u okviru računa sudova završavamo ovaj odjeljak. Značajno je da isti metateoremi vrijede i u slučaju računa predikata (vidjeti /2/ u popisu literature).

3. SINTAKSA I SEMANTIKA RAČUNA PREDIKATA PRVOG REDA

Račun predikata prvog reda je formalni sistem dovoljno velikih izražajnih mogućnosti da se u njemu daju opisati problemi o kojima je bilo riječi u uvodu (i mnogi drugi). I ovdje će nas zanimati pretežno semantički aspekt.

3.1. *Definicija* : Abeceda $\mathcal{A}$ jezika $\mathcal{L}(RP)$ je unija slijedećih skupova simbola:

$A_1 = \{c_i : i \in I \subseteq N\}$ (najviše prebrojiv skup (simbola) konstanti)

$A_2 = \{x_j : j \in J \subseteq N\}$ (najviše prebrojiv skup simbola varijabli)

$A_3 = \{ f_k : k \in K \subseteq N \}$ (najviše prebrojiv skup simbola funkcija od konačno mnogo varijabli)

$A_4 = \{ P_m : m \in M \subseteq N \}$ (najviše prebrojiv skup simbola konačne kratnosti (arnosti))

$A_5 = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$ (skup logičkih veznika)

$A_6 = \{ \forall, \exists \}$ (skup kvantifikatora " za svaki " i " postoji ")

$A_7 = \{ (,) \}$ (lijeva i desna zagrada)

U daljnjem tekstu ćemo simbole konstanti slobodno označavati i slovima a,b,c, ... sa ili bez indeksa, isto tako simbole varijabli slovima x,y,z,u,v,w, ..., simbole funkcija slovima f,g,h,... i simbole predikata sa P,Q,R,...Umjesto riječi " simbol konstante " reći ćemo samo " konstanta " i slično za elemente skupova A_2 - A_4. Riječ u abecedi $\mathcal{A}$ je svaki konačni niz slova u toj abecedi.

3.2. *Definicija* :

a) Svaka varijabla je term i svaka konstanta je term.

b) Ako su $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termi i f funkcija od n varijabli, onda je $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ term.

c) Riječ u abecedi jezika $\mathcal{L}$(RP) je term ako i samo ako je dobivena primjenom nekih (možda i svih) od pravila a) odnosno b) konačno mnogo puta.

Primjer 1: a,b,x,y,f(z,b),g(x,y,f(a,b)),...

3.3. *Definicija* :Atomarna formula u abecedi $\mathcal{A}$ jezika $\mathcal{L}$(RP) je svaka riječ oblika P(t_1, t_2, ... ,t_n), gdje je P n-arni predikat, dok su t_1, t_2, ... , t_n termi.

Primjer 2 : P(f(x,y),a,g(b,z)); Q(c); R(h(z));...

3.4. *Definicija* :

a) Svaka atomarna formula jezika $\mathcal{L}$(RP) je formula tog jezika.
b) Ako je F formula jezika $\mathcal{L}$(RP), onda je to i $\neg$F.
c) Ako su F_1 i F_2 formule jezika $\mathcal{L}$(RP), onda su to i ($F_1 \wedge F_2$), ($F_1 \vee F_2$), ($F_1 \rightarrow F_2$) i ($F_1 \leftrightarrow F_2$).
d) Ako je F formula jezika $\mathcal{L}$(RP) i x varijabla, onda su riječi ($\forall$xF) i ($\exists$xF) formule.
e) Riječ u abecedi $\mathcal{A}$ jezika $\mathcal{L}$(RP) je formula toga jezika ako i samo ako to slijedi iz pravila a) - d) na način iz definicije terma.

Da izbjegnemo nepotrebno gomilanje zagrada , pridružit ćemo kvantifikatorima i logičkim veznicima opadajući rang ovako: $\leftrightarrow$, $\rightarrow$,$\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$,$\forall$ i smatrati da veznik s većim rangom ima veću oblast djelovanja.

Primjer 3:

a) $\exists$x P(x)$\rightarrow$ Q(y,a)$\wedge$R(b) znači (($\exists$xP(x))$\rightarrow$ (Q(y,a)$\wedge$R(b)))
b) $\neg\forall$xP(f(x))$\vee$R(z)$\wedge\exists$uQ(u,f(u)) znači ($\neg$($\forall$xP(f(x)))$\vee$ R(z))$\wedge$ ($\exists$ uQ(u,f(u))

3.5. *Definicija* : Neka je x varijabla. Pod x-kvantifikatorima podrazumijevamo riječi $\forall$x i $\exists$x.Pod dosegom x-kvantifikatora $\forall$x u formuli $\forall$xF podrazumijevamo formulu F (slično za $\exists$xF).

3.6. *Definicija* : Za dani nastup varijable x u formuli F kažemo da je vezan ako x nastupa bar u jednoj podformuli formule F u dosegu nekog od x-kvantifikatora. U protivnom kažemo da je taj nastup varijable x slobodan.

Jasno je iz prethodne definicije da u jednoj te istoj formuli svaka varijabla može istovremeno nastupati i kao vezana i kao slobodna.

Primjer 4:

a) $\forall x P(x) \vee Q(x,y)$; nastup x u P(x) je vezan, dok je u Q(x,y) slobodan.

b) $\exists x \exists y (P(y) \rightarrow Q(x,y)) \vee R(f(x),g(y))$; nastup x u Q(x,y) je vezan, nastupi y u P(y) i Q(x,y) su vezani, nastup x u R(f(x),g(y)) je slobodan i nastup y u R(f(x),g(y)) je slobodan.

3.7. *Definicija* :

a) Otvorena formula je svaka formula u kojoj ne postoji ni jedan nastup bilo kojeg kvantifikatora.

b) Zatvorenjem formule $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (ovaj zapis označava da su $x_1, x_2, \dots, x_n$ sve slobodne varijable u F) zovemo formulu $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Primjer 5:

a) Formula $P(x,y,f(z,a)) \wedge Q(b,c)$ je otvorena.

b) Formula $\exists y(P(y,z)) \rightarrow (R(g(x)) \rightarrow \forall x R(h(x),z))$ nije ni otvorena ni zatvorena.

c) Formula $\forall z((\exists yP(y,z)) \rightarrow (R(g(x)) \rightarrow \forall x R(h(x),z))$ je zatvorenje formule pod b).

3.8. *Definicija* : Interpretacija formule F jezika $\mathcal{L}$(RP) je uređeni par (D,ι), gdje je D neprazan skup a ι preslikavanje definirano ovako:

a) $\iota(c_i)=d_i \in D$ za svaku konstantu c_i koja nastupa u F.

b) Svakoj n-arnoj funkciji f koja nastupa u F pridružena je funkcija $\iota(f)$: $D^n \rightarrow D$.

c) Svakom n-arnom predikatu R koji nastupa u formuli F pridruženo je preslikavanje $\iota(P)$:$D^n \rightarrow \{0,1\}$.

d) Na domeni D kvantifikatore $\forall x$ ($\exists x$) interpretiramo kao " za svaki x iz skupa D " (" postoji x iz skupa D ")

3.9. *Definicija* : Formula F jezika $\mathcal{L}$(RP) je zatvorena ako u F nema slobodnih varijabli.

Svakoj zatvorenoj formuli (izjavi) jezika $\mathcal{L}$(RP) možemo u danoj interpretaciji pridružiti istinosnu vrijednost " istina " i " laž". Zadržavamo istu oznaku kao u slučaju računa sudova.

3.10. *Definicija*:

a) Za atomarne formule definiramo istinosnu vrijednost kao u slučaju računa sudova.

b) Ako je F:$\forall x$G, onda je ι(F)=1 ako i samo ako je ι(G)=1 za svaki $x \in D$.

c) Ako je F: $\exists x$G, onda je ι(F)=1 ako i samo ako postoji bar jedan element $x \in D$, takav da je ι(G)= 1.

Primjer 6:

a) A= {a,b,f,P}, f je unarna funkcija, P je binarni predikat, D={1,2} i ι interpretacija definirana ovako:

$\iota(a)$	$\iota(b)$
1	2

$\iota(f)(1)$	$\iota(f)(2)$
2	1

$(\iota(P))(1,1)$	$(\iota(P))(1,2)$	$(\iota(P))(2,1)$	$(\iota(P))(2,2)$
1	1	0	0

F: $P(a,f(a)) \wedge P(b,f(b))$

Sada je $(\iota(P))(\iota(a),(\iota(f))(\iota(a)))=(\iota(P))(1,2)=1$ i

$(\iota(P))(\iota(b),(\iota(f))(\iota(b)))=\iota(P)(2,1)=0$ pa je prema d) iz def. 2.4. $\iota(F)=0$, tj. F nije istinita formula u ovoj interpretaciji.

b) F: $\forall x \exists y P(x,y)$; ostalo isto.

Sada je $\iota(F)=1$ ako i samo ako za svaki $x \in D$ postoji $y \in D$, takav da je $(i(P))(x,y)=1$. Ako je $x=1$, onda može biti $y=1$, jer je $(\iota(P))(1,1)=1$. Ako je $x=2$, onda ne postoji takav $y \in D$ da bude $(\iota(P))(2,y)=1$, pa F nije istinita u ovoj interpretaciji.

c) F: $\exists x \exists y (P(x,y) \wedge \neg P(f(x),f(y)))$

Sada je $\iota(F)=1$ ako i samo ako postoje elementi $x \in D$ i $y \in D$, takvi da je $\iota(P(x,y) \wedge \neg P(f(x),f(y)))=1$. Dovoljno je uzeti $x=1$ i $y=1$. Vrijedi naime da je $(\iota(P))(1,1)=1$, $\iota(P))((\iota(f)(1), \iota(f)(1))=0$ pa primjenjujući b) i d) iz def. 2.4. zaključujemo da je $\iota(F)=1$. (ovdje smo oznake x i y koristili i kao simbole varijabli u jeziku i kao varijable nad domenom D)

Definicije identički istinite formule, kontradiktorne formule, ispunjive formule kao i definiciju logičke posljedice preuzimamo iz prethodnog odjeljka i još jednom napominjemo da i u slučaju računa predikata vrijede analogni metateoremi karakterizacije pojma logičke posljedice.

Prelazimo sada na izlaganje normalnih i standardnih (skolemovskih) formi formula jezika $\mathcal{L}(RP)$.

3.11. *Definicija* :Kažemo da je formula F jezika $\mathcal{L}$(RP) u primitivnoj normalnoj formi ako je F: $K_1 x_1 \dots K_n x_n M$, gdje je M otvorena formula, dok je K_i ili $\forall$ ili $\exists$. Pritom $K_1 x_1 \dots K_n x_n$ zovemo prefiksom a M matricom formule F.

Dajemo sada listu parova ekvivalentnih formula jezika $\mathcal{L}$(RP) pomoću kojih možemo svaku formulu prevesti u ekvivalentnu formulu u primitivnoj normalnoj formi

1) Svi parovi iz primjera 5 prethodnog odjeljka.

2)a) $KxF(x) \vee G \equiv Kx(F(x) \vee G)$ b) $KxF(x) \wedge G \equiv Kx(F(x) \wedge G)$ pod uvjetom da varijabla x ne nastupa u formuli G.

3)a) $\neg(\forall xF(x)) \equiv \exists x(\neg F(x))$ b) $\neg(\exists xF(x)) \equiv \forall x(\neg F(x))$

4)a) $K_1xF(x) \vee K_2xF(x) \equiv K_1xK_2z(F(x) \vee H(z))$

b) $K_3xF(x) \wedge K_4xH(x) \equiv K_3x\, K_4z\, (F(x) \wedge H(z))$

Za $i \in \{1,\dots,4\}$ je K ili $\forall$ ili $\exists$ i z ne nastupa u F(x). Osim toga, u slučaju da je K_1 i K_2 kvantifikator $\exists$ i K_3 i K_4 kvantifikator $\forall$, nije potrebna zamjena varijable x u formulama $K_2xH(x)$ i $K_4xH(x)$ varijablom z.

Primjer 7: Pretvoriti u primitivnu normalnu formu formulu:

a) F: $\forall x(P(x) \rightarrow \exists yQ(x,y))$

Vrijedi: $\forall x(P(x) \rightarrow \exists yQ(x,y)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee \exists yQ(x,y)) \equiv$

$\equiv \forall x \exists y(\neg P(x) \vee Q(x,y))$

b) F: $\exists x(\neg(\exists yP(x,y)) \rightarrow (\exists zQ(z) \rightarrow R(x)))$

Vrijedi: $\exists x(\neg(\exists yP(x,y)) \rightarrow (\exists zQ(z) \rightarrow R(x))) \equiv$

$\equiv \exists x(\neg(\neg(\exists yP(x,y)) \vee (\exists zQ(z) \rightarrow R(x))) \equiv$

$\equiv \exists x(\exists yP(x,y) \vee (\exists zQ(z) \rightarrow R(x))) \equiv$

$\equiv \exists x \exists y(P(x,y) \vee (\neg(\exists zQ(z)) \vee R(x))) \equiv$

$\equiv \exists x \exists y(P(x,y) \vee (\forall z(\neg Q(z)) \vee R(x))) \equiv$

$$\equiv \exists x \exists y (P(x,y) \vee \forall z (\neg Q(z) \vee R(x))) \equiv$$
$$\equiv \exists x \exists y \forall z (P(x,y) \vee (\neg Q(z) \vee R(x)))$$

Postoji algoritam kojim se iz primitivne normalne forme formule može dobiti formula čiji prefiks ne sadrži ni jedan egzistencijalni kvantifikator tako da kontradiktornost polazne formule ostane sačuvana. Taj algoritam zovemo skolemizacijom (prema T Skolemu), dok rezultirajuću formulu zovemo skolemovskom standardnom formom ili samo standardnom formom formule.

3.12. *Definicija* : Neka je F: $K_1 x_1 \dots K_n x_n M$ primitivna normalna forma formule F i K_r za neki $1 \le r \le n$ kvantifikator $\exists$.

a) K_r je krajnje lijevi kvantifikator $\exists$. Tada uvodimo novu konstantu c koja ne nastupa u F (tj. u M), zamjenjujemo svaki nastup varijable x u M sa c i brišemo K_r iz prefiks

b) Ako je $K_{s_1}, \dots, K_{s_m}$ popis svih kvantifikatora $\forall$ koji nastupaju lijevo od K_r, uvodimo novu funkciju od m varijabli (recimo f), zamjenjujemo svaki nastup x_r u M sa $f(x_{s_1}, \dots, x_{s_m})$ i brišemo K_r iz prefiksa.

c) Proces ponavljamo sve dok u prefiksu ima kvantifikatora

Primjer 8 : Pretvoriti u standardnu formu formulu

F: $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists y \forall z Q(y,z))$

a) Pretvaramo F u primitivnu normalnu formu.

$$\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists y \forall z Q(y,z)) \equiv \neg(\neg(\forall x P(x)) \vee (\exists y \forall z Q(x,z))) \equiv$$
$$\equiv \forall x P(x) \wedge \neg(\exists y \forall z Q(y,z)) \equiv \forall x P(X) \wedge \forall y \exists z \neg Q(y,z)) \equiv$$
$$\equiv \forall x \forall y \exists z (P(x) \wedge Q(y,z))$$

b) Pretvaramo normalnu formu u standardnu.
Kako se lijevo od z-kvantifikatora $\exists z$ nalaze x-kvantifikator $\forall x$ i y-kvantifikator $\forall y$, uvodimo binarnu funkciju f koja očito ne nastupa u F, pravimo zamjenu $f(x,y)/z$ i brišemo $\forall z$, pa konačno dobivamo formulu $\forall x \forall y (P(x,y) \wedge \neg Q(y,f(x,y)))$, što je standardna forma formule F.

Matrica formule u primitivnoj normalnoj formi, odnosno u standardnoj formi, može biti svedena na ekvivalentnu konjunktivnu normalnu formu u smislu definicije 2.7. Tada standardnu formu formule možemo prikazati kao skup disjunkta njene matrice uz dogovor da sve varijable koje nastupaju u tom skupu smatramo vezanima kvantifikatorom $\forall$. Bez dokaza navodimo slijedeći metateorem (vidi /2/, teorem 4.1.)

3.13. *Metateorem*: Neka je $\mathcal{S}$ skup disjunkta koji predstavlja standardnu formu formule F. Tada je F kontradiktorna formula ako i samo ako je $\mathcal{S}$ kontradiktoran skup disjunkta.

Obrat ovog metateorema općenito ne vrijedi, tj. ako je formula F nekontradiktorna, skup disjunkta $\mathcal{S}$ može biti neekvivalentan formuli F, što pokazuje slijedeći primjer.

Primjer 9: Neka je F: $\exists x P(x)$ i $\mathcal{S}=\{P(a)\}$. $\mathcal{S}$ je očito skup disjunkta koji predstavlja standardnu formu formule F. F je nekontradiktorna formula jer je istinita na primjer u interpretaciji ι na domeni $D = \{ 1, 2 \}$, takvoj da je $(\iota(P))(1)=0$, $(\iota(P))(2)=1$ i $\iota(a)=1$, dok je $(\iota(P))(\iota(a))=(\iota(P))(1)=0$, pa F i $\mathcal{S}$ nisu ekvivalentni.

Rezimirajmo dosadašnje izlaganje.
Da dokažemo da je G logička posljedica formula $F_1 , \dots , F_n$

dovoljno je prema metateoremu 2.11. dokazati da je $F:F_1 \wedge .. \wedge F_n \wedge \neg G$ kontradiktorna formula. Prema metateoremu 3.13. dovoljno je dokazati kontradiktornost skupa disjunkta $\mathcal{S}$ koji predstavlja standardnu formu formule F. Međutim, još uvijek bi trebalo provjeriti bar prebrojivo mnogo interpretacija, što je praktički nemoguće. Postavlja se pitanje postojanja i strukture " kanonske " domene za dani skup $\mathcal{S}$, u smislu da je $\mathcal{S}$ kontradiktoran skup disjunkta ako i samo ako je $\mathcal{S}$ neispunjiv na toj domeni. Takva domena postoji i zove se *herbrandovski univerzum* skupa disjunkta $\mathcal{S}$ (po J. Herbrandu). Rezultati o herbrandovskom univerzumu i H-interpretacijama tema su slijedećeg odjeljka.

4. H-UNIVERZUM, H-INTERPRETACIJE I HERBRANDOV METATEOREM

4.1. *Definicija* : Neka je $\mathcal{S}$ skup disjunkta i H_0 skup konstanti koje nastupaju u $\mathcal{S}$ (ako u $\mathcal{S}$ ne nastupa ni jedna konstanta, uvodimo novu konstantu, na primjer a, pa je $H_0=\{a\}$). Indukcijom po $n \in N$ definiramo:

$H_{n+1}= H_n \cup \{ f^k(t_1, t_2, \ldots, t_k) \}$, gdje f^k prolazi skupom svih k-arnih funkcija koje nastupaju u $\mathcal{S}$, a $(t_1, \ldots, t_k)$ skupom svih k-orki terma iz kartezijeve potencije H_n^k. Skup H_i zovemo skupom konstanti i-tog nivoa skupa disjunkta $\mathcal{S}$, a skup $H=\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ H-univerzumom skupa $\mathcal{S}$.

Primjer 1: Neka je $\mathcal{S}=\{ P(f(x)),a,g(f(x),b)) \}$. Kako su a i b jedine konstante koje nastupaju u $\mathcal{S}$, to je $H_0 = \{ a , b \}$. Sada je

$$H_1 = H_0 \cup \{ f(a),f(b),g(a,a),g(a,b),g(b,a),g(b,b)\},$$
$$H_2 = H_1 \cup \{ f(f(a)),f(f(b)),f(g(a,a)),\ldots,g(f(a),f(a)),\ldots\}$$

4.2. *Definicija* : Pod izrazom podrazumijevamo slijedeće : term, skup terma, atom, negacija atoma, skup atoma, disjunkt, skup disjunkta. Ako izraz ne asadrži varijable, zovemo ga osnovnim izrazom.

4.3. *Definicija* : Neka je $\mathcal{S}$ skup disjunkta. Tada skup osnovnih atoma oblika $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ za sve n-arne predikata P^n koji nastupaju u $\mathcal{S}$, za sve n-orke terma iz H-univerzuma skupa $\mathcal{S}$, zovemo H-bazom za $\mathcal{S}$.

4.4. *Definicija* : Osnovni primjer disjunkta C iz skupa disjunkta $\mathcal{S}$ je disjunkt dobiven iz C zamjenom varijabli koje nastupaju u C članovima H-univerzuma skupa $\mathcal{S}$.

Primjer 2: Neka je $\mathcal{S}= \{ P(f(x,y)), Q(y) \vee R(g(y)) \}$. Tada je $H=\{ a, f(a,a), g(a), f(f(a,a), f(a,a)), f(g(a), g(a)), g(f(a,a)), \ldots \}$, dok su disjunkti $Q(g(a)) \vee R(g(g(a)))$ i $Q(a) \vee R(g(a))$ osnovni primjeri (naravno ne svi) disjunkta $Q(y) \vee R(g(y))$.

4.5. *Definicija* : Među svim interpretacijama skupa disjunkta $\mathcal{S}$ na njegovom H-univerzumu kao domeni interpretacije, izdvajamo njegove H-interpretacije uvjetom da svaka od njih svaku konstantu koja nastupa u $\mathcal{S}$ preslikava u nju samu.

Svaku H-interpretaciju skupa disjunkta $\mathcal{S}$ možemo prikazati na način iz primjedbe uz primjer 3. odjeljka 2., gdje su m_i elementi ili negacije elemenata H-baze skupa $\mathcal{S}$.

Slijedeći cilj je da se za dani $\mathcal{S}$ i za svaku interpretaciju ι skupa $\mathcal{S}$ na svakoj domeni D definira (jedna ili više) H-interpretacija ι_H, tako da ako je $\mathcal{S}$ (tj. svaki disjunkt iz $\mathcal{S}$) istinit u ι, onda je $\mathcal{S}$ istinit i u svakoj od pridruženih H-interpretacija ι_H.

4.6. *Definicija* : Neka je i interpretacija skupa disjunkta $\mathcal{S}$ na domeni D. Kažemo da je H-interpretacija i_H skupa $\mathcal{S}$ pridružena interpretaciji i ako vrijedi slijedeće: ako je $(i(P))(d_1,\dots,d_n)=1$, onda je i $((i_H)(P))(h_1,\dots,h_n)=1$ za one elemente $h_i, i\in\{1,..,n\}$ H-univerzuma skupa $\mathcal{S}$ za koje je $i(h_i)=d_i$.

Interpretacija i može imati više pridruženih H-interpretacija, a najviše onoliko koliko ima interpretacija inicijalne konstante a H-univerzuma skupa $\mathcal{S}$ u slučaju da u $\mathcal{S}$ ne nastupa nijedna konstanta.

Primjer 3: (primjer 4.8. iz /2/)

Neka je $\mathcal{S}$={ P(x),Q(y,f(y,z)) } i neka je interpretacija i definirana ovako:D={1,2}, i(a)=1 (iako konstanta a ne nastupa u $\mathcal{S}$, moramo zadati i(a) zbog definicije H-interpretacije pridružene interpretaciji i)

$(i(f))(1,1)$	$((i(f))(1,2)$	$((i(f))(2,1)$	$(i(f))(2,2)$
1	2	2	1

te

$((i(P))(1)$	$((i(P))(2)$	$((i(Q))(1,1)$	$((i(Q))(1,2)$	$((i(Q))(2,1)$	$((i(Q))(2,2)$
1	0	0	1	0	1

Sada je H={a,f(a,a),f(a,f(a,a)),f(f(a,a),f(a)), f(f(a,a),f(a,a)),...} H-univerzum skupa $\mathcal{S}$, dok je B={P(a),Q(a,a),P(f(a,a)),Q(a,f(a,a)), Q(f(a,a),a),Q(f(a,a),f(a,a)), P(f(a,f(a,a)),Q(a,f(a,f(a,a)),...} H-baza skupa $\mathcal{S}$. Da dobijemo interpretaciju i_H pridruženu i, dovoljno je pridružiti istinosne vrijednosti elementima skupa B. To (na par primjera) radimo ovako:

$$(i_H(P))(i_H(a))=(i_H(P))(a)=(i(P))(i(a))=(i(P))(1)=1,$$

$$(i_H(Q))(i_H(a),i_H(a))=(i_H(Q))(a,a)=(i(Q))(a,a)=(i(Q))(1,1)=0,\dots$$

pa dobivamo slijedeću i_H interpretaciju pridruženu i :

i ={ P(a), ¬Q(a,a),P(f(a,a)), ¬Q(a,f(a,a)),..}

4.7 . *Metateorem* : Ako je skup disjunkta $\mathcal{S}$ istinit u interpretaciji i na domeni D, onda je on istinit u svakoj H-interpretaciji skupa $\mathcal{S}$ pridruženoj i.

Dokaz: Pretpostavimo da je skup disjunkta $\mathcal{S}$ istinit u interpretaciji i i da nije istinit u nekoj od H-interpretacija pridruženih i (recimo da je to i_H). Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da disjunkt C iz $\mathcal{S}$ koji nije istinit u interpretaciji i_H ima oblik: $(i_H(P))(h_1, \ldots, h_n)$, tj. da je $(i_H(P))(h_1,\ldots,h_n)=0$ za svaku n-orku $h_1, \ldots, h_n$ iz H-univerzuma skupa $\mathcal{S}$. Kako je $i(P)$ istinito na D, postoje $d_1^0, \ldots, d_n^0 \in D$, takvi da je $(i(P))(d_1^0, \ldots, d_n^0)=1$. Jer je i_H pridružena i, postoje elementi $h_1^0, \ldots, h_n^0$ iz H-univezuma skupa $\mathcal{S}$, takvi da je $i(h_i^0)=d_i$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zbog toga je $0 = (i_H(P))(h_1^0, \ldots, h_n^0) = (i(P))(d_1^0, \ldots, d_n^0) = 1$, što je kontradikcija.

4.8. *Metateorem* : Skup disjunkta $\mathcal{S}$ je kontradiktoran ako i samo ako je lažan u svakoj H-interpretaciji.

Dokaz:

a) Ako je $\mathcal{S}$ kontradiktoran skup disjunkta, onda je on lažan u svakoj interpretaciji, pa tako i u svakoj H-interpretaciji.

b) Neka je $\mathcal{S}$ istinit u nekoj interpretaciji na domeni D i istovremeno lažan u svakoj H-interpretaciji. Tada, prema prema prethodnom metateoremu, postoji H-interpretacija i_H pridružena i, što je kontradikcija.

Dajemo sada nekoliko metateorema tehničkog karaktera i odjeljak završavamo izrekom Herbrandova metateorema. Za dokaze vidjeti /2/.

4.9. *Metateorem* : Disjunkt C je istinit u interpretaciji i na domeni D ako i samo ako je u i istinit svaki osnovni primjer C' toga disjunkta.

4.10. *Metateorem* : Disjunkt C je lažan u interpretaciji *i* na domeni D ako i samo ako postoji bar jedan osnovni primjer C' za C, takav da je C' lažan u *i*.

4.11. *Metateorem* : Skup disjunkta $\mathcal{S}$ je kontradiktoran ako i samo ako za svaku interpretaciju *i* postoji bar jedan osnovni primjer bar jednog disjunkta iz $\mathcal{S}$ koji je lažan u *i*.

4.12. *Metateorem* : (J. Herbrand) Skup disjunkta $\mathcal{S}$ je kontradiktoran ako i samo ako postoji konačan kontradiktoran skup $\mathcal{S}'$ osnovnih primjera disjunkta iz $\mathcal{S}$.

Pod uvjetom da imamo proceduru generiranja svih konačnih podskupova osnovnih primjera disjunkta skupa $\mathcal{S}$, Herbrandov metateorem daje proceduru za provjeru kontradiktornosti skupa $\mathcal{S}$. Ta procedura je veoma neefektivna, jer u većini slučajeva broj osnovnih primjera disjunkta iz $\mathcal{S}$ raste eksponencijalno s rastom indeksa i početnih komada H_i H-univerzuma skupa $\mathcal{S}$. Zbog toga je uveden princip rezolucije (J. A. Robinson 1965. g.) kao pravilo izvoda novih disjunkta iz skupa disjunkta $\mathcal{S}$ (ne nužno osnovnih). Osnovna ideja je da se na takav način generira disjunkt $\perp$,tj. identički lažan disjunkt, što opet garantira kontradiktornost skupa $\mathcal{S}$, naravano uz uvjet da je svaki disjunkt generiran pravilom rezolucije logička posljedica skupa disjunkta $\mathcal{S}$.

5. PRINCIP REZOLUCIJE ZA RAČUN SUDOVA

5.1. *Definicija* : Neka su C_1 i C_2 disjunkti, takvi da je $C_1 : A \vee C_1'$ i $C_2 : \neg A \vee C_2'$ za neki atom A. Tada disjunkt $C_3 : C_1' \vee C_2'$ zovemo rezolventom C_1 i C_2 i kažemo da je C_3 dobiven primjenom pravila rezolucije na C_1 i C_2.

Primjer 1:

$C_1 : P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S$, $C_2 : Q \vee \neg R$ i $C_3 : P \vee \neg R \vee S$

5.2. *Metateorem* : Neka su C_1 i C_2 disjunkti i C njihova rezolventa. Tada je C logička posljedica C_1 i C_2.

Dokaz: Neka su C_1 i C_2 istiniti u interpretaciji i, $C_1 : A \vee C_1'$ i $C_2 : \neg A \vee C_2'$. Očito je ili A ili $\neg A$ istinito u i. Recimo da je to A. Tada C_2 nije jedinični disjunkt jer bi u protivnom C_2 bio lažan u i. Osim toga, mora biti C' istinito u i, što je dovoljno da rezolventa C: C' $\vee$C' bude istinita u i. Druga mogućnost (da je $\neg A$ lažan) je potpuno simetrična.

5.3. *Definicija*: Neka je $\mathcal{S}$ skup disjunkta . Za niz disjunkta C_1,.. ...,C_n kažemo da predstavlja rezolutivni izvod disjunkta C ako je ispunjeno slijedeće:

a) Za svaki $i \in \{1,\dots,n\}$ je $C_i \in \mathcal{S}$ ili je C_i rezolventa nekih članova niza s manjim indeksima.

b) $C : C_n$

Izvod disjunkta $\perp$ iz skupa disjunkta $\mathcal{S}$ predstavlja dokaz njegove kontradiktornosti.

Primjer 2 : Neka je $\mathcal{S}=\{P, Q \vee \neg P, R \vee \neg P, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$. Primjenjujući pravilo rezolucije dobivamo slijedeći izvod za $\perp$.

$C_1 : P$	(element iz $\mathcal{S}$)
$C_2 : Q \vee \neg P$	(element iz $\mathcal{S}$)
$C_3 : Q$	(rezolventa C_1 i C_2)
$C_4 : \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	(element iz $\mathcal{S}$)
$C_5 : \neg P \vee \neg R$	(rezolventa C_3 i C_4)
$C_6 : R \vee \neg P$	(element iz $\mathcal{S}$)
$C_7 : \neg P$	(rezolventa C_5 i C_6)
$C_8 : \perp$	(rezolventa C_1 i C_7)

Zaključujemo da je $\mathcal{S}$ kontradiktoran skup disjunkta.

Primjer 3: (problem br 84. iz knjige /7/)

Branimir, Duško, Goran i Tomica igrali su nogomet na ulici. Odjednom je jedna nespretno šutnuta lopta udarila u prozor. Od jakog udarca stakla su se razletjela u komadiće. Naravno, igra je istog časa prekinuta, a dječaci su se razbježali unaokolo.

Opreznim propitkivanjem doznali smo slijedeće (navodimo iskaze sudionika događaja)

Branimir:

B_1 : " Prozor nisam razbio ja ! "

B_2: " Tomica je predložio da igramo nogomet na ulici ! "

B_3 : " Goran nije razbio staklo ! "

Duško:

D_1 : " Prozor nisam pogodio ja !"

D_2: " To je učinio Goran !"

D_3: " Ja igram nogomet bolje od Tomice !"

Goran:

G_1: " Ja nisam udario loptu !"

G_2: " Da sam znao kako će se to završiti, ne bih igrao nogomet na ulici ! "

G_3: " Branimir nije razbio staklo !"

Tomica :

T_1: "Prozor nisam razbio ja !"

T_2: " To je učinio Goran!"

T_3:" Kada sam ja došao, ostali dječaci su već bili započeli igru!"

Stavimo nadalje:

N :" Jedan od dječaka je razbio staklo ! " (uvjet zadatka)

Lako je uočiti da dječaci nisu govorili samo istinu. Naknadnim propitkivanjem među nekolicinom dječaka koji su gledali utakmicu od početka ispostavilo se da je svaki od četvorice sudionika dao po dvije istinite izjave i jednu lažnu.Problem je da se odredi tko je razbio staklo.

Prema uvjetu problema slijedi da je sud

$$F_B : (\neg B_1 \wedge B_2 \wedge B_3) \vee (B_1 \wedge \neg B_2 \wedge B_3) \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge \neg B_3)$$

identički istinit.Pretvorimo F_B u konjunktivnu normalnu formu uz pomoć semantičkih ekvivalentnosti $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$, $F \vee \neg F \equiv T$, $F \wedge T \equiv F$ i $F \vee G \equiv G \vee F$. Dajemo samo krajnji rezultat, kojega je lako provjeriti.

$$F_B \equiv (B_1 \vee B_2) \wedge (B_1 \vee B_3) \wedge (B_1 \vee \neg B_2 \vee B_3) \wedge (B_1 \vee B_2 \vee B_3) \wedge$$
$$\wedge (\neg B_1 \vee B_2 \vee B_3) \wedge (B_2 \vee B_3) \wedge (B_1 \vee B_2 \vee \neg B_3) \wedge (\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \neg B_3)$$

Odavde zaključujemo da je skup

$$\mathcal{F}_B = \{ B_1 \vee B_2, B_1 \vee B_3, B_2 \vee B_3, B_1 \vee B_2 \vee B_3, B_1 \vee B_2 \vee \neg B_3,$$
$$B_1 \vee \neg B_2 \vee B_3, \neg B_1 \vee B_2 \vee B_3, \neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \neg B_3 \}$$

skup reprezentanata suda F_B.

Uvjeti zadatka također daju nekoliko semantičkih ekvivalentnosti među izjavama koje su dječaci dali i to:

$$D_2 \equiv \neg B_3, \; G_1 \equiv B_3, \; G_3 \equiv B_1, \; T_2 \equiv \neg B_3 \text{ i } T_3 \equiv \neg B_2 \quad (*)$$

Uzimajući u obzir ove ekvivalentnosti, skupovi $\mathcal{F}_D$, $\mathcal{F}_G$ i $\mathcal{F}_T$ kao skupovi reprezentanata sudova F_D, F_G i F_T, čija je struktura potpuno analogna strukturi suda F_B, izgledaju ovako:

$$\mathcal{F}_D = \{ D_1 \vee \neg B_3, D_1 \vee D_3, \neg B_3 \vee D_3, D_1 \vee \neg B_3 \vee D_3, D_1 \vee \neg B_3 \vee \neg D_3,$$
$$D_1 \vee B_3 \vee D_3, \neg D_1 \vee \neg B_3 \vee D_3, \neg D_1 \vee B_3 \vee \neg D_3 \}$$

$$\mathcal{F}_G = \{ B_3 \vee G_3, B_3 \vee B_1, G_2 \vee B_1, B_3 \vee G_2 \vee B_1, B_3 \vee G_2 \vee \neg B_1,$$
$$B_3 \vee \neg G_2 \vee B_1, \neg B_3 \vee G_2 \vee B_1, \neg B_3 \vee \neg G_2 \vee \neg B_1 \} \text{ i}$$

$$\mathcal{F}_T = \{ T_1 \vee \neg B_3, T_1 \vee \neg B_2, \neg B_2 \vee \neg B_3, T_1 \vee \neg B_3 \vee \neg B_2,$$

$, T_1 \vee \neg B_3 \vee B_2, T_1 \vee B_3 \vee \neg B_2, \neg T_1 \vee \neg B_3 \vee \neg B_2, \neg T_1 \vee B_3 \vee B_2 \}$

$\mathcal{F}_N = \{ \neg B_1 \vee \neg D_1 \vee \neg B_3 \vee \neg T_1 \}$

Konačno, skup $\mathcal{F} = \mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_D \cup \mathcal{F}_G \cup \mathcal{F}_T \cup \mathcal{F}_N$ predstavlja skup reprezentanata suda $F : F_B \wedge F_D \wedge F_G \wedge F_T \wedge F_N$, kojim je naš problem opisan. Skup $\mathcal{F}$ broji ukupno trideset disjunkta (zbog $B_1 \vee B_3 \in \mathcal{F}_B \cap \mathcal{F}_G$) i to je bazični skup disjunkta od kojega uz pomoć pravila rezolucije kao pravila izvoda krećemo u potragu za istinom. Pozabavimo se najprije Branimirovim i Tomičinim izjavama, jer je očito da su one dobrim dijelom kontradiktorne.

1)	$B_1 \vee B_2 \vee B_3$	(pretpostavka iz $\mathcal{F}_B$)
2)	$T_1 \vee \neg B_3$	(pretpostavka iz $\mathcal{F}_T$)
3)	$T_1 \vee B_1 \vee B_2$	(rezolventa 1) i 2))
4)	$T_1 \vee \neg B_2$	(pretpostavka iz $\mathcal{F}_T$)
5)	$T_1 \vee B_1$	(rezolventa 3) i 4))
6)	$\neg T_1 \vee \neg B_3 \vee \neg B_2$	(pretpostavka iz $\mathcal{F}_T$)
7)	$B_1 \vee \neg B_3 \vee \neg B_2$	(rezolventa 5) i 6))
8)	$B_1 \vee B_2$	(pretpostavka iz $\mathcal{F}_B$)
9)	$B_1 \vee \neg B_3$	(rezolventa 7) i 8))
10)	$B_1 \vee B_3$	(pretpostavka iz $\mathcal{F}_B$)
11)	B_1	(rezolventa 9) i 10))

Kako je rezolventa dvaju disjunkta njihova logička posljedica (metateorem 5.2.), iz posljednjeg koraka gornjeg rezolutivnog izvoda zaključujemo da je prva Branimirova izjava istinita, tj. da nije on razbio staklo. Pokušajmo zaključiti da li je to učinio Tomica?!

12)	$\neg B_1 \vee B_2 \vee B_3$	(pretpostavka iz $\mathcal{F}_B$)
13)	$T_1 \vee \neg B_1 \vee B_3$	(rezolventa 4) i 12))
14)	$T_1 \vee B_3$	(rezolventa 11) i 13))
15)	T_1	(rezolventa 2) i 14))

Dakle, ni Tomica nije razbio staklo!
Branimir i Goran brane jedan drugoga. Međutim, već smo ustanovili da Branimir nije razbio staklo. To nas upućuje da posumnjamo na Gorana.

16)	$\neg B_1 \vee \neg D_1 \vee \neg B_3 \vee \neg T_1$	(pretpostavka iz $\mathcal{F}_N$)
17)	$\neg D_1 \vee \neg B_3 \vee \neg T_1$	(rezolventa 11) i 16))
18)	$\neg D_1 \vee \neg B_3$	(rezolventa 15) i 17))
19)	$D_1 \vee \neg B_3$	(pretpostavka iz $\mathcal{F}_D$)
20)	$\neg B_3$	(rezolventa 18) i 19))

Naša sumnja se obistinila. Staklo je ipak razbio Goran!
Pogledajmo ima li za njega nekih olakšavajućih okolnosti.

21)	$B_3 \vee G_2 \vee \neg B_1$	(pretpostavka iz $\mathcal{F}_G$)
22)	$G_2 \vee \neg B_1$	(rezolventa 20) i 21))
23)	G_2	(rezolventa 11) i 22))

Kao što se vidi, Goran nije imao nikakvih zlih namjera i ta okolnost ga donekle opravdava.

24)	$B_2 \vee B_3$	(pretpostavka iz $\mathcal{F}_B$)
25)	B_2	(rezolventa 20) i 23))

I Tomica snosi dio krivice, jer je on predložio dečkima da igraju nogomet na ulici.
Kako je staklo razb io samo jedan od četvorice dječaka, zaključujemo da je prva Duškova izjava istinita, druga također, a treća je lažna. Ostale činjenice možemo lako rekonstruirati iz niza (*).

Za poželjeti je analog pravila rezolucije za račun predikata. Međutim, u slučaju računa predikata situacija je znatno složenija.

Naime, disjunkti iz skupa $\mathcal{S}$ koji predstavlja standardnu formu formule mogu sadržavati različite terme (konstante, varijable,.), što oduzima mogućnost primjene rezolutivnog izvoda disjunkta s definicijom rezolvente kao u definiciji 5.1. U proširenju definicije rezolvente dvaju disjunkta za slučaj računa predikata važnu ulogu ima pojam unifikatora i algoritam unifikacije, što je tema slijedećeg odjeljka.

6. ALGORITAM UNIFIKACIJE

6.1. *Definicija* : Valuacija je svaki konačni skup $\{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$ gdje su v_i varijable i $v_i \neq v_j$ za $i \neq j$, t termi i $t_i \neq v_i$ za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$. Ako su $t_1, \dots, t_n$ osnovni termi, onda pripadnu valuaciju zovemo osnovnom valuacijom.

Primjer 1 : $\{ g(y,a)/x,\ z/y,\ f(y, b,c)/z \}$

6.2. *Definicija* : Neka je ϑ valucija i E izraz (term , skup terma, atom, skup atoma, disjunkt ili skup disjunkta). Tada je $E\vartheta$ izraz dobiven iz E istovremenom zamjenom svih nastupa varijable v_i u E sa t_i , za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ ($\vartheta=\{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$). Izraz $E\vartheta$ zovemo primjerom izraza E.

Primjer 2: Neka je $\vartheta=\{y/x, g(z)/y, b/z\}$ i $E=\{P(y,f(a,y),z), Q(x,z)\}$. Tada je $E\vartheta=\{P(g(z),f(a,g(z)),b), Q(y,b)\}$.

6.3. *Definicija* : Neka su $\vartheta=\{t_1/x_1,\dots,t_n/x_n\}$ i $\lambda=\{u_1/y_1, \dots, u_m/y_m\}$ valuacije. Pod kompozicijom $\vartheta\circ\lambda$ podrazumijevamo valuaciju koja se iz skupa $\{t_1\lambda/x_1, \dots, t_n\lambda/x_n, u_1/y_1, \dots, u_m/y_m\}$ dobiva izbacivanjem svih elemenata $t_j\lambda/x_j$ za koje je $t_j\lambda=x_j$ i svih elemenata u_i/y_i za koje je $y_i \in \{x\ , \dots, x\ \}$.

Primjer 3: Neka je $\vartheta = \{ a/x, f(z)/y, y/z \}$ i $\lambda = \{ b/x, z/y, g(x)/z\}$.

Sada je $t_1\,\lambda/x = a\lambda/x = a/x$, $t_2\,\lambda/y = f(z)\lambda/y = f(g(y))/y$ i $t\ \lambda/z = y\lambda/z = z/z$. Prema tome je $\vartheta\circ\lambda = \{\ a/x,\ f(g(y))/y\ \}$.

6.4. *Definicija* : Valuaciju ϑ zovmo unifikatorom skupa izraza $\{E_1, \ldots, E_n\}$ ako i samo ako je $E_1\vartheta = \ldots = E_n\vartheta$. Unifikator σ toga skupa zovemo univerzalnim unifikatorom ako za svaki drugi unifikator ϑ postoji valuacija λ, takva da je $\vartheta = \sigma\circ\lambda$.

Prelazimo sada na izlaganje algoritma unifikacije, tj. algoritma koji daje univerzalni unifikator za skup izraza W za koji postoji bar jedan unifikator. Ako ne postoji ni jedan unifikator za W, algoritam to registrira.

6.5. *Definicija* : Neka je W skup izraza. Skup D razlika skupa W definiramo kao skup svih onih podizraza iz W koji (gledano grafički, računajući s lijeva na desno) počinju prvim simbolom koji čini različitima bar dva izraza iz W, shvaćena kao riječi abecede jezika $\mathcal{L}$(RP).

Primjer 4: Neka je W={ Q(a,x,f(x)), Q(a,y,y) }. Tada je D={ x,y }.

Ideja algoritma unifikacije je u tome da se za dani skup izraza W odredi najprije skup razlika D, da se zatim unificiraju izrazi iz D (što bi moralo biti bar malo jednostavnije od unificiranja samog skupa W) te da se taj postupak ponavlja dok ima razlika u uzastopno generiranim skupovima izraza počevši od W.

6.6. *Definicija* : (algoritma unifikacije)

Neka je W skup izraza. Algoritam unifikacije za W sastoji se od slijedećih koraka:

1) $k=0$, $W_k = W$ i $\vartheta_k = \Phi$ (Φ je prazna valuacija)
2) Ako je W_k jedinični disjunkt, postupak je završen i ϑ_k je univerzalni unifikator za W. U protivnom određujemo

skup razlika D_k za W_k.

3) Ako u skupu D_k postoji varijabla v_k i term t_k, takvi da v_k ne nastupa u t_k, prelazimo na 4. korak. U protivnom procedura se prekida s negativnim rezultatom (ne postoji unifikator za W)

4) Neka je $\vartheta_{k+1} = \vartheta_k\{t_k/v_k\}$ i $W_{k+1} = W_k\{t_k/v_k\}$

5) Povećavamo k za 1 i prelazimo na drugi korak.

Primjer 5: Neka je W = { Q(x,y,z), Q(u,h(v,v),u) }

1. $W_0 = W$ i $\vartheta_0 = \Phi$ (1.korak)
2. W_0 nije jedinični disjunkt, pa određujemo skup razlika D_0 za W_0. Očito je D = {x,u} (2. korak)
3. Kako je x term iz D i u varijabla koja ne nastupa u x, prelazimo na 4. korak (3. korak)
4. Stavljamo $\vartheta_1 = \vartheta_0\{x/u\} = \{x/u\}$ i $W_1 = W\{x/u\} = \{Q(x,y,z), Q(x,h(v,v),x)\}$ (4. korak)
5. Sada je k = 1 i W_1 nije jedinični disjunkt pa određujemo skup razlika D_1 za W_1. Očito je D_1 = { y, h(v,v) } (5. i 2. korak)
6. Kako je h(v,v) term iz D_1 i y varijabla koja ne nastuoa u njemu, stavljamo $\vartheta_2 = \vartheta_1\{h(v,v)/y\}$ i $W_2 = W_1\{h(v,v)/y\}$ = = {Q(x,h(v,v),z), Q(x,h(v,v),x)} (3. i 4. korak)
7. k = 2 i W_2 nije jedinični disjunkt. Skup razlika D_2 za W_2 je {z,x}. Kako je x term iz D_2 i z varijabla koja ne nastupa u njemu, stavljamo $\vartheta_3 = \vartheta_2\{x/z\}$ i $W_3 = W_2\{x/z\}$ = {Q(x,h(v,v),x)} (5., 2., 3. i 4. korak)
8. W je jedinični disjunkt i $\vartheta_3 = (\vartheta_1 \circ \{h(v,v)/y\}) \circ \{x/z\} = \{x/u\} \circ \{h(v,v)/y\} \circ \{x/z\} = \{x/u, h(v,v)/y\} \circ \{x/z\} = \{x/u, h(v,v)/y, x/z\}$ je univerzalni unifikator za W.

Bez dokaza dajemo metateorem koji karakterizira algoritam unifikacije (za dokaz vidjeti teorem 5.2. u /2/).

6.7. *Metateorem* : (metateorem unifikacije) Ako je W konačan neprazan skup izraza za koje postoji bar jedan unifikator, onda algoritam unifikacije uvijek završava njegovim drugim korakom i posljednji dobiveni unifikator je univerzalni unifikator za W.

Prelazimo sada na izlaganje principa rezolucije za račun predikata.

7. PRINCIP REZOLUCIJE ZA RAČUN PREDIKATA

7.1. *Definicija* : Ako za dvije ili više atomarnih podformula disjunkta C postoji univerzalni kvantifikator ϑ,ond $C\vartheta$ zovemo reduktom toga disjunkta. Ako je C jedinični disjunkt, kažemo da se radi o jediničnom reduktu.

Primjer 1 : Neka je C: $Q(f(x),y) \vee Q(z,g(b,c)) \vee \neg R(h(x,y,z))$. Tada je $\vartheta = \{ f(x)/z,\ g(b,c)/y \}$ univerzalni kvantifikator za $Q(f(x),y)$ i $Q(z,g(b,c))$ pa je $C\vartheta = Q(f(x),g(b,c)) \vee \neg R(x,g(b,c),f(x))$ redukt za C.

7.2. *Definicija* : Neka su C_1 i C_2 dva disjunkta bez zajedničkih varijabli, L_1 simbol predikata ili negacije predikata koji nastupa u C_1 i L_2 takav simbol koji nastupa u C_2. Ako za L_1 i $\neg L_2$ postoji univerzalni unifikator ϑ, onda disjunkt $(C_1\vartheta - L_1\vartheta) \cup (C_2\vartheta - L_2\vartheta)$ zovemo (binarnom) rezolventom C_1 i C_2.

Primjer 2 : Neka je $C_1=\{\neg P(v,z,v),\ P(w,z,w)\}$ i $C_2=\{ P(w,h(x,x),w)\}$. Kako w nastupa u C_1 i u C_2, pravimo u C_2 zamjenu u/w i nakon toga C_1 i C_2 nemaju zajedničkih varijabli. Neka je sada $L_1: \neg P(v,z,v)$ $\neg L_2 : \neg P(u,h(x,x),u)$. Algoritam unifikacije daje $\vartheta = \{v/u, h(x,x)/z\}$ kao univerzalni unifikator za L_1 i $\neg L_2$ pa je binarna rezolventa za C_1 i C_2 jednaka $(C_1\vartheta - L_1\vartheta) \cup (C_2\vartheta - L_2\vartheta) : P(w, h(x,x),w)$.

7.3. *Definicija* : Pod rezolventom disjunkta C_1 i C_2 podrazumijevamo slijedeće:

1) binarnu rezolventu C_1 i C_2 ili
2) binarnu rezolventu C_1 i (nekog) redukta C_2 ili
3) binarnu rezolventu C_2 i redukta C_1 ili
4) binarnu rezolventu nekog redukta C_1 i nekog redukta C_2.

Pravilo rezolucije kao pravilo izvoda je potpuno u smislu slijedećeg metateorema:

7.4. *Metateorem* : Skup disjunkta $\mathcal{S}$ je kontradiktoran ako i samo ako postoji rezolutivni izvod disjunkta $\perp$ iz $\mathcal{S}$.

Dokaz (vidjeti dokaz teorema 5.3. u /2/).

Primjer 3 : (/3/, zadatak 5.9) Lista je jedan od osnovnih tipova organizacije podataka. Pojam liste možemo aksiomatizirati ovako:

1) $\forall u ZADNJI(PO\text{-}KOM(u,PRAZNO),u)$
2) $\forall x \forall y \forall z (ZADNJI(y,z) \rightarrow ZADNJI(PO\text{-}KOM(x,y),z))$

Ovdje je : PRAZNO – prazna lista, ZADNJI(x,y) – binarni predikat sa značenjem " y je posljednji element liste x " i PO–KOM(x,y) – binarni predikat sa značenjem " x je početni komad liste y ". Primjera radi, listu (1,2,2,1) možemo prikazati kao:

PO-KOM(1,PO-KOM(2,PO-KOM(1,PRAZNO))).

Aksiom 1) znači da je u zadnji element liste koju čini on sam, dok aksiom 2) znači da ako je z zadnji element liste y, onda dodatna činjenica da je x početni komad od y na to ne utječe. Zadatak se sastoji u tome da, koristeći pravilo rezolucije , iz 1) i 2) izvedemo

3) $\exists v ZADNJI(PO\text{-}KOM(2,PO\text{-}KOM(1,PRAZNO)),v)$,

što drugim riječima znači da dokažemo da lista (2,1) ima zadnji element. Prema metateoremu karakterizacije logičke posljedice dovoljno je dokazati da 1) , 2) i negacija 3) čine kontradiktoran skup formula. Uvedimo dodatni unarni predikat ODGOVOR(v) sa značenjem " v je rješenje zadatka " i formulu:

4) ∀v(ZADNJI(P O–KOM(2,PO–KOM(1,PRAZNO)),v)→ ODGOVOR(v))

Jasno je da ako 1),2) i 4) čine kontradiktoran skup formula, onda to vrijedi i za 1), 2) i negaciju 3). Odredimo skup disjunkta koji predstavljaju standardnu formu konjunkcije formula 1), 2) i 4). Njegovi elementi su :

1) ZADNJI (PO–KOM(u,PRAZNO),u),
2) ˥ZADNJI(y,z) ∨ ZADNJI(PO–KOM(x,y),z) i
3) ˥ZADNJI(PO–KOM(2,PO–KOM(1,PRAZNO)),v)) ∨ ODGOVOR(v)

Negacija disjunkta 1) i prvi faktor disjunkta 2) imaju univerzalni unifikator ϑ_1 = { PO–KOM(u,PRAZNO)/y, u/z } pa kao njihovu rezolventu dobivamo :

4) ZADNJI(PO–KOM(x,PO–KOM(u,PRAZNO,u)).

Negacija od 4) i prvi faktor u 3) imaju univerzalni unifikator ϑ_2 = { 2/x, 1/u, 1/v } pa je njihova rezolventa:
5) ODGOVOR(1), što je očito rješenje zadatka.

8. ZAKLJUČAK

" Ručna" primjena pravila rezolucije u njegovom osnovnom obliku koji je dan definicijom 7.2., pokazala je na mnogim primjerima da ono u procesu izvođenja disjunkta ⊥ kao krajnjeg cilja, generira često velik broj disjunkta koji u tom izvodu nisu ni potrebni. U cilju povećanja efektivnosti uvedene su razne modifikacije osnovnog pravila izvoda i strategije generiranja novih disjunkta, kao na primjer semantička rezolucija, lock rezolucija, LUSH rezolucija, SLDNF rezolucija itd. Osnovni problem je u pomirenju dvaju proturječnih uvjeta : efektivnosti i potpunosti pravila rezolucije.

PROLOG kao programski jezik nema jedinstvenu ni sintaksu ni semantiku, tako da danas postoji bar desetak verzija jezika, uključujući i MICRO PROLOG za personalna računala. Za sve verzije je zajednička veoma slaba podrška numeričkim proračunima. Rješenja se nalaze ili na nivou operativnog sistema računala koji omogućuje povezivanje programa u PROLOG-u i nekom od proceduralnih jezika s dobrim numeričkim mogućnostima ili stvaranjem hibridnih jezika. Posebno važnu ulogu PROLOG-a vidimo u kontroli paralelnog procesiranja informacija u višeprocesorskim sistemima. Napomenimo na kraju da je princip rezolucije kao pravilo izvoda proširen i na neke sisteme modalne logike (vidjeti /6/) pa se mogu očekivati i takve verzije PROLOG-a.

LITERATURA :

/1/ W.F. Clocsin, C.S. Mellish : Programming in PROLOG, Springer –Verlag, 1984.

/2/ C. Chang, R.C. Lee : Symbolic logic and mechanical theorem proving, Academic Press, 1973.

/3/ N.J.Nilsson: Principles of artificial intelligence, Tioga Publishing Co., 1980.

/4/ J.W. Lloyd: Foundations of logic programming, Springer–Verlag , 1984.

/5/ J.R.Slagle: Artificial intelligence: the heuristic programming approach, Mc Graw-Hill, 1971.

/6/ L. Fariñas –del–Cerro: Resolution modal logics, str. 27 - 55 u zborniku: K.R.Apt (ed.): Logics and models of concurent systems. NATO ASI series, vol. F13, Springer-Verlag, 1985.

/7/ G.Bizam,J.Herczeg: JATEK ĖS LOGIKA, 85 FELADATBAN, MUSZAKI KONYVKIADO, Budapest, 1972.; ruski prijevod: А.Бизам, Я. Герцег: Игра и логика, 85 логических задач, МИР, Moskva, 1975.

Čubrilo M. Teorijske osnove
PROLOG-a Zbornik radova (1987), 11

SUMMARRY

This paper is primarily concerned with the so-called resolution principle, a kind of the logical inference rule that appears in automated theorem proving. Regardless of its simplicity, it is very powerfull tool in the process of deriving an identically false (empty) disjunct from the set of disjuncts which are representing the standard (Skolem' s) form of the given clause. Because of that, it is possible to implement the resolution principle (including the unification algorithm and the algorithm for translating a given clause into the standard form) into the computer, as a system for mechanical theorem proving. Every such implementation gives us a version of PROLOG, an artificial intelligence language. Its syntax is a syntax of the first order predicate calculus. Among the fields of applicability of PROLOG are question-answering systems, the planning of robotic actions, expert systems and so on.