Primjena nejednakosti sredina na rješavanje jednadžbi i sustava jednadžbi

Ilija Ilišević*

Sažetak. *Razmatraju se primjene nejednakosti sredina na rješavanje jednadžbi i nejednadžbi, koje su ilustrirane na nizu zanimljivih zadataka prilagođenih učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *nejednakosti sredina, jednadžbe, sustavi jednadžbi*

Application of means inequalities on solving equations and system of equations

Abstract. *Applications of means inequalities on solving equations and system of equations are considered. These applications are illustrated on a number of interesting tasks adapted for high school students.*

Key words: *means inequalities, equations, system of equations*

Neka je $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dana n-torka pozitivnih brojeva. Tada su harmonijska, geometrijska, aritmetička i kvadratna sredina n-torke a definirane redom sa

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}},$$

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n},$$

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Vrijedi

$$H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a).$$

Pri tome jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Nejednakosti $G_n(a) \geq H_n(a)$, $A_n(a) \geq H_n(a)$, $A_n(a) \geq G_n(a)$, $K_n(a) \geq A_n(a)$ nazivamo redom: geometrijsko-harmonijska, aritmetičko-harmonijska, aritmetičko-geometrijska, kvadratno-aritmetička; kraće: GH-nejednakost, AH-nejednakost, AG-nejednakost, KA-nejednakost. Dokaz navedenih nejednakosti može se vidjeti u [7].

Riješimo sada nekoliko jednadžbi i sustava jednadžbi rabeći nejednakosti sredina.

Zadatak 1. *Riješite jednadžbu* $2^{x^5} + 4^{x^4} + 256^4 = 3 \cdot 16^{x^3}$.
Rješenje. Očito $x = 0$ nije rješenje dane jednadžbe. Ako je $x < 0$, desna strana jednadžbe je manja od 3, a lijeva je veća od 256^4, pa za $x < 0$ nema rješenja.

Neka je $x > 0$. Rabeći AG-nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned} & 2^{x^5} + 4^{x^4} + 256^4 = 2^{x^5} + 2^{2x^4} + 2^{32} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2^{x^5} \cdot 2^{2x^4} \cdot 2^{32}} \\ = \;& 3 \cdot 2^{\frac{x^5+2x^4+32}{3}} \geq 3 \cdot 2^{\sqrt[3]{x^5 \cdot 2x^4 \cdot 32}} = 3 \cdot 2^{4x^3} = 3 \cdot 16^{x^3}. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x^5 = 2x^4 = 32$, tj. ako i samo ako je $x = 2$.

Zadatak 2. *Riješite jednadžbu* $2\sin^2 \frac{x-4y}{2} = 5^x + 5^{-x}$.
Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$5^x + 5^{-x} \geq 2\sqrt{5^x \cdot 5^{-x}} = 2.$$

Za lijevu stranu jednadžbe vrijedi

$$0 \leq 2\sin^2 \frac{x-4y}{2} \leq 2.$$

Kako jednakost vrijedi ako i samo ako je $5^x = 5^{-x}$ i $\sin^2 \frac{x-4y}{2} = 1$, to je $x = 0$ i $\sin^2(-2y) = 1$, tj. $x = 0$ i $\sin 2y = \pm 1$. Iz $\sin 2y = \pm 1$ slijedi $2y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, pa je $y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle, $(x, y) \in \{(0, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Zadatak 3. *Riješite jednadžbu*

$$\log_2 \left(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \right) = \frac{2}{y^2 - 4y + 6}.$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \geq 2,$$

pa je

$$\log_2 \left(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \right) \geq 1.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\cos^2(xy) = \frac{1}{\cos^2(xy)}$, tj. ako i samo ako je $\cos(xy) = \pm 1$. Kako je

$$y^2 - 4y + 6 = (y-2)^2 + 2 \geq 2,$$

to je
$$\frac{2}{y^2-4y+6} \leq 1.$$
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $y=2$. Tada je $\cos(2x)=\cos(xy)=\pm 1$, pa je $2x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, tj. $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Dakle, $(x,y)\in\{(\frac{k\pi}{2},2)\,:\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Zadatak 4. *Riješite jednadžbu*
$$-x^2+6x-7=\left|\operatorname{tg}\frac{xy}{6}\right|+\left|\operatorname{ctg}\frac{xy}{6}\right|.$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je
$$\left|\operatorname{tg}\frac{xy}{6}\right|+\left|\operatorname{ctg}\frac{xy}{6}\right|\geq 2\sqrt{\left|\operatorname{tg}\frac{xy}{6}\right|\cdot\left|\operatorname{ctg}\frac{xy}{6}\right|}=2.$$
S druge strane je
$$-x^2+6x-7=-(x^2-6x+7)=-\big((x-3)^2-2\big)=-(x-3)^2+2\leq 2.$$
Jednakost vrijedi ako i samo ako je
$$\left|\operatorname{tg}\frac{xy}{6}\right|=\left|\operatorname{ctg}\frac{xy}{6}\right| \quad \text{i} \quad -(x-3)^2+2=2.$$
Iz $-(x-3)^2+2=2$ slijedi $x=3$. Tada $|\operatorname{tg}\frac{xy}{6}|=|\operatorname{ctg}\frac{xy}{6}|$ postaje $|\operatorname{tg}\frac{y}{2}|=|\operatorname{ctg}\frac{y}{2}|$, pa je $\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}=1$ odnosno $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\pm 1$. Odatle slijedi $y=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Dakle, $(x,y)\in\{(3,\frac{\pi}{2}+k\pi)\,:\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Zadatak 5. *Odredite realne brojeve x,y,z takve da vrijedi*
$$\log_x xy^2+\log_y yx^2=2(4\cos^2 z-1).$$

Rješenje. Jasno je da mora biti $x,y>0$ i $x,y\neq 1$. Transformirajmo lijevu stranu jednadžbe:
$$\begin{aligned}
&\log_x xy^2+\log_y yx^2=1+2\log_x y+1+2\log_y x\\
=\;&2+2(\log_x y+\log_y x)=2+2\left(\log_x y+\frac{1}{\log_x y}\right)\\
=\;&2+2\cdot\frac{{\log_x}^2 y+1}{\log_x y}.
\end{aligned}$$
Prema AG-nejednakosti je
$${\log_x}^2 y+1\geq 2|\log_x y|.$$

Ako je $\log_x y>0$, tada je
$$\log_x xy^2+\log_y yx^2\geq 2+2\cdot 2=6,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $\log_x y = 1$ odnosno $x = y$. S druge strane je $\cos^2 z \leq 1$, pa je $2(4\cos^2 z - 1) \leq 6$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\cos^2 z = 1$ odnosno $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ako je $\log_x y < 0$, tada je

$$\log_x xy^2 + \log_y yx^2 \leq 2 + 2 \cdot (-2) = -2,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $\log_x y = -1$ odnosno $y = \frac{1}{x}$. S druge strane je $\cos^2 z \geq 0$, pa je $2(4\cos^2 z - 1) \geq -2$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\cos z = 0$ odnosno $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dakle, $(x, y, z) \in \{(t, t, k\pi), (t, \frac{1}{t}, \frac{\pi}{2} + k\pi) \,:\, t \in \mathbb{R}, t > 0, t \neq 1, k \in \mathbb{Z}\}$.

Zadatak 6. *Odredite pozitivne realne brojeve x, y tako da vrijedi*

$$\log(1 + x^4) - 2(\log x + \log y) = 2 + 2\log 2 - \log(10000 + y^4).$$

Rješenje. Najprije uočimo da mora biti $x > 0$ i $y > 0$. Dana jednadžba ekvivalentna je redom sa

$$\log(1 + x^4) + \log(10000 + y^4) = \log x^2 + \log y^2 + \log 10^2 + \log 2^2,$$
$$\log\big((1 + x^4)(10000 + y^4)\big) = \log(400x^2y^2),$$
$$(1 + x^4)(10000 + y^4) = 400x^2y^2.$$

Kako je, prema AG-nejednakosti,

$$1 + x^4 \geq 2x^2, \quad 10000 + y^4 \geq 200y^2,$$

to je

$$(1 + x^4)(10000 + y^4) \geq 400x^2y^2.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x^4 = 1$ i $y^4 = 10000$, tj. $x = 1$ i $y = 100$.

Zadatak 7. *Riješite jednadžbu*

$$\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2.$$

Rješenje. Mora biti $x^2 + x - 1 \geq 0$ i $x - x^2 + 1 \geq 0$. Uočimo da je i $x^2 - x + 2 \geq 0$. Prema AG-nejednakosti je

$$\sqrt{x^2 + x - 1} \leq \frac{(x^2 + x - 1) + 1}{2} = \frac{x^2 + x}{2},$$
$$\sqrt{x - x^2 + 1} \leq \frac{(x - x^2 + 1) + 1}{2} = \frac{x - x^2 + 2}{2}.$$

Stoga je

$$x^2 - x + 2 = \sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} \leq \frac{x^2 + x}{2} + \frac{x - x^2 + 2}{2} = x + 1.$$

Iz $x^2 - x + 2 \leq x + 1$ dobivamo $(x-1)^2 \leq 0$, pa je $x = 1$. Uvrštavanje u zadanu jednadžbu pokazuje da je $x = 1$ zaista rješenje te jednadžbe.

Zadatak 8. *Odredite duljine stranica a, b, c trokuta ako vrijedi*

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Rješenje. Neka je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluopseg trokuta i

$$x = s-a, \quad y = s-b, \quad z = s-c,$$

tj.

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \quad y = \frac{a+c-b}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2}.$$

Tada je $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$, pa dana jednadžba prelazi u ekvivalentnu

$$\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} = \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z} + \sqrt{x+y}.$$

Prema KA-nejednakosti je

$$\begin{aligned} \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} &= \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{2} + \frac{\sqrt{2y}+\sqrt{2z}}{2} + \frac{\sqrt{2z}+\sqrt{2x}}{2} \\ \leq \quad \sqrt{\frac{2x+2y}{2}} + \sqrt{\frac{2y+2z}{2}} + \sqrt{\frac{2z+2x}{2}} &= \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z}. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$, odnosno ako i samo ako je $a = b = c$, tj. za jednakostranični trokut.

Zadatak 9. *Odredite pozitivne realne brojeve x, y, z tako da vrijedi*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1, \\ (1+x)(1+y)(1+z) &= 8(1-x)(1-y)(1-z). \end{aligned}$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$1+x = (x+y+z)+x = (x+y)+(x+z) \geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)} = 2\sqrt{(1-z)(1-y)}.$$

Analogno,

$$1+y \geq 2\sqrt{(1-x)(1-z)}, \quad 1+z \geq 2\sqrt{(1-y)(1-x)}.$$

Množenjem dobivamo

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq 8(1-x)(1-y)(1-z).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x+y = x+z = y+z$, tj. $x = y = z$. Tada iz $x+y+z = 1$ slijedi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Zadatak 10. *U skupu pozitivnih realnih brojeva riješite sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} &= 3. \end{aligned}$$

Rješenje. Zbrajanjem danih jednadžbi dobivamo

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \cdots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = 6.$$

Prema AG-nejednakosti je $x_i + \frac{1}{x_i} \geq 2$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$. Slijedi

$$6 = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \cdots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geq \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n} = n \cdot 2,$$

pa je $n \in \{1, 2, 3\}$.

Ako je $n = 3$, tada za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$ vrijedi $x_i + \frac{1}{x_i} = 2$, a to je ako i samo ako je $x_i = \frac{1}{x_i} = 1$. Dakle, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Za $n = 2$ imamo sustav

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= 3, \end{aligned}$$

odnosno sustav

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3, \\ x_1 \cdot x_2 &= 1, \end{aligned}$$

čija su rješenja $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Za $n = 1$ je $x_1 = 3$ i $\frac{1}{x_1} = 3$, pa sustav nema rješenja.

Zadatak 11. *Odredite pozitivna rješenja sustava jednadžbi*

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = 4, \quad x_2 + \frac{1}{x_3} = 1, \quad x_3 + \frac{1}{x_4} = 4, \quad \cdots, \quad x_{98} + \frac{1}{x_{99}} = 1,$$
$$x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 4, \quad x_{100} + \frac{1}{x_1} = 1.$$

Rješenje. Množenjem jednadžbi ovog sustava dobivamo

$$\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\left(x_3+\frac{1}{x_4}\right)\cdots\left(x_{98}+\frac{1}{x_{99}}\right)\left(x_{99}+\frac{1}{x_{100}}\right)\left(x_{100}+\frac{1}{x_1}\right) = 4^{50} = 2^{100}.$$

Prema AG-nejednakosti je

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \geq 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}, \quad x_2 + \frac{1}{x_3} \geq 2\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}, \quad x_3 + \frac{1}{x_4} \geq 2\sqrt{\frac{x_3}{x_4}}, \quad \cdots, \quad x_{98} + \frac{1}{x_{99}} \geq 2\sqrt{\frac{x_{98}}{x_{99}}},$$
$$x_{99} + \frac{1}{x_{100}} \geq 2\sqrt{\frac{x_{99}}{x_{100}}}, \quad x_{100} + \frac{1}{x_1} \geq 2\sqrt{\frac{x_{100}}{x_1}}.$$

Množenjem ovih nejednakosti dobivamo

$$\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\left(x_3+\frac{1}{x_4}\right)\cdots\left(x_{98}+\frac{1}{x_{99}}\right)\left(x_{99}+\frac{1}{x_{100}}\right)\left(x_{100}+\frac{1}{x_1}\right)\geq 2^{100}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$x_1=\frac{1}{x_2},\quad x_2=\frac{1}{x_3},\quad x_3=\frac{1}{x_4},\quad \ldots,\quad x_{98}=\frac{1}{x_{99}},\quad x_{99}=\frac{1}{x_{100}},\quad x_{100}=\frac{1}{x_1}.$$

Iz ovih jednakosti i danog sustava dobivamo

$$x_1=2,\quad x_2=\frac{1}{2},\quad x_3=2,\quad x_4=\frac{1}{2},\quad \ldots,\quad x_{99}=2,\quad x_{100}=\frac{1}{2}.$$

Zadatak 12. *Neka je a pozitivan realan broj. Odredite realne brojeve koji zadovoljavaju sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right),\\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right),\\
&\vdots\\
x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right).
\end{aligned}$$

Rješenje. Ako je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rješenje zadanog sustava, onda je i $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ rješenje tog sustava. Stoga pretpostavimo $x_1 > 0$. Tada je $x_i > 0$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$. Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)\geq\sqrt{x_1\cdot\frac{a}{x_1}}=\sqrt{a},\\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)\geq\sqrt{x_2\cdot\frac{a}{x_2}}=\sqrt{a},\\
&\vdots\\
x_n &= \frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)\geq\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{a}{x_{n-1}}}=\sqrt{a},\\
x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geq\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}.
\end{aligned}$$

Kako je $x_1 \geq \sqrt{a}$, imamo

$$x_2-x_1=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)-x_1=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_1}-x_1\right)=\frac{1}{2x_1}(a-{x_1}^2)\leq 0,$$

odakle slijedi $x_2 \leq x_1$; pritom jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = \sqrt{a}$. Analogno, $x_3 \leq x_2, \ldots, x_n \leq x_{n-1}, x_1 \leq x_n$. Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Dakle, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt{a}$, pa je

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{(\sqrt{a}, \sqrt{a}, \ldots, \sqrt{a}), (-\sqrt{a}, -\sqrt{a}, \ldots, -\sqrt{a})\}.$$

Zadatak 13. *Odredite realne brojeve x, y, z za koje vrijedi*

$$x + \frac{1}{x} = \frac{2}{y^2}, \qquad y + \frac{1}{y} = \frac{2}{z^2}, \qquad z + \frac{1}{z} = \frac{2}{x^2}.$$

Rješenje. Iz danog sustava zaključujemo da je $x, y, z > 0$. Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{2}{x^2} = z + \frac{1}{z} \geq 2,$$

odakle slijedi $x^2 \leq 1$ tj. $x \in \langle 0, 1]$. Analogno dobivamo da je $y \in \langle 0, 1]$ i $z \in \langle 0, 1]$. Stoga iz prve jednadžbe sustava slijedi

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq x + \frac{1}{x} = \frac{2}{y^2},$$

tj. $y^2 \geq x$. Analogno, $z^2 \geq y$ i $x^2 \geq z$. Stoga vrijedi

$$x^8 = (x^2)^4 \geq z^4 = (z^2)^2 \geq y^2 \geq x.$$

Nejednadžba $x^8 \geq x$ na intervalu $\langle 0, 1]$ ima točno jedno rješenje $x = 1$, pa je onda i $y = z = 1$. Dakle, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ je jedina trojka realnih brojeva koja je rješenje zadanog sustava jednadžbi.

Zadatak 14. *Odredite realne brojeve x, y, z za koje vrijedi*

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} &= 1, \\ x + y + z &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Rješenje. Očito mora biti $x, y, z \geq 0$. Rabeći KA-nejednakost imamo redom

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{3} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2}{3}},$$

$$\frac{1}{3} \leq \sqrt{\frac{x + y + z}{3}},$$

$$x + y + z \geq \frac{1}{3}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z = \frac{1}{9}$.

Zadatak 15. *U skupu pozitivnih realnih brojeva riješite sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 9, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje. Prema AH-nejednakosti je

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

odnosno

$$\frac{n}{1} \leq \frac{9}{n},$$

odakle slijedi $n^2 \leq 9$, tj. $n \in \{1, 2, 3\}$.

Za $n = 3$ je $x_1 = x_2 = x_3$, a kako je $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, to je $x_1 = x_2 = x_3 = 3$.

Za $n = 2$ iz $x_1 + x_2 = 9$ i $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$ dobivamo $x_{1,2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

Za $n = 1$ je $x_1 = 9$ i $\frac{1}{x_1} = 1$, pa sustav nema rješenja.

Zadatak 16. *Odredite pozitivne realne brojeve x, y, z takve da vrijedi*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1, \\ (x-1)(y-1)(z-1) &= 8. \end{aligned}$$

Rješenje. Iz prve jednadžbe sustava slijedi $xy + yz + zx = xyz$, a iz druge jednadžbe imamo

$$xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 = 8,$$

odnosno

$$xyz - xyz + x + y + z = 9,$$

pa je

$$x + y + z = 9.$$

Prema AH-nejednakosti je

$$x + y + z = (x + y + z) \cdot 1 = (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z = 3$. Dakle, jedino rješenje zadanog sustava je $x = y = z = 3$.

Zadatak 17. *Odredite pozitivne realne brojeve x, y, z takve da vrijedi*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 2 - \frac{4}{xyz}. \end{aligned}$$

Rješenje. Množenjem jednadžbi sustava i primjenom AH-nejednakosti dobivamo

$$6\left(2-\frac{4}{xyz}\right)=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9.$$

S druge strane, AG-nejednakost povlači

$$xyz\leq\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\left(\frac{6}{3}\right)^3=8,$$

odakle slijedi

$$6\left(2-\frac{4}{xyz}\right)\leq 6\cdot\left(2-\frac{4}{8}\right)=9.$$

Ove nejednakosti postaju jednakosti ako i samo ako je $x=y=z=2$. Prema tome, jedino rješenje zadanog sustava je $x=y=z=2$.

Literatura

[1] M. Bombardelli, Ž. Hanjš, *Matematička natjecanja 2000/2001*, Element, HMD, Zagreb, 2002.

[2] V. Burjan, P. Bero, P. Černek, *Matematický koktail*, Slovenske pedagogické nakladatelstvo, Bratislava, 1991.

[3] R. Đurković, *Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990.*, Materijali za mlade matematičare, sveska 28, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 1991.

[4] L. Fröhlich, J. Ruff, J. Tóth, *15 próbaérettségi matematikából*, Maxim Kiadó, Szeged, 2006.

[5] L. Gerősc, *Matematika Irany az egyetem*, 1993.

[6] Z. Kadelburg, D. Đukić, M. Lukić, I. Matić, *Nejednakosti*, Materijali za mlade matematičare sv. 42, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2003.

[7] J. Pečarić, *Nejednakosti*, HMD i Element, Zagreb, 1996.

[8] S. Roka, *2000 feladat az elemi matematika kőréből*, Typotex Kiadó, Budapest, 2003.

[9] J. Ruff, J. Schultz, *Erettsegi feladatgyűjtemény matematikából, 11-12 évfolyam*, Maxim Kiadó, Szeged, 2009.

[10] J. Švrček, P. Calábek, *Sbirka netradičnich matematických uloh*, Prometheus, Sprl, s. r. o., Praha, 2007.