Dr Ivan Lončar
Fakultet organizacije i informatike
V a r a ž d i n

UDK: 519.5
Znanstveni rad

JEDNAKOST DIMENZIJA INVERZNOG LIMESA

Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ inverzni sistem topoloških prostora X_α, $\alpha\varepsilon A$, koji zadovoljavaju uvjet $\dim X_\alpha = \mathrm{Ind}\, X_\alpha$, $\alpha\varepsilon A$. Da li inverzni limes $X = \varprojlim \underline{X}$ zadovoljava uvjet $\dim X = \mathrm{Ind}\, X$? Analogni problem možemo postaviti za dimenzije ind i Ind te za sve tri dimenzije dim, Ind i ind.

U radu istražujemo neke dovoljne uvjete uz koje je odgovor na postavljeni problem afirmitivan.

1. JEDNAKOST Ind $(\varprojlim \underline{X})$ = Ind $(\varprojlim \underline{X})$ = dim $(\varprojlim \underline{X})$

Poznato je da jednakost ind X = Ind X = dim X vrijedi ako je X separabilan metrički prostor, a jednakost ind X = Ind X ako je X strogo parakompaktan strogo nasljedno normalan [8] (specijalno, savršeno normalan Lindelöfov prostor [1:411]).

1.1. TEOREM. Ako je X limes niza $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ separabilnih metričkih prostora X_n i surjektivnih veznih preslikavanja f_{nm}, tada je ind X = Ind X = dim $(\lim \underline{X})$.

D o k a z . Projekcije $f_n : X \to X_n$ su surjektivna preslikavanja pa je X separabilan metrički prostor. To znači da je ind X = Ind X = dim X.

Kažemo da je prostor X nasljedno Lindelöfov ako je Lindelöfov svaki njegov potprostor. Svaki regularan prostor prebrojive baze je nasljedno Lindelöfov [7:247]. Odatle slijedi da je svaki separabilan metrički prostor nasljedno Lindelöfov [7:320]. S druge strane, Lindelöfov prostor je nasljedno Lindelöfov ako (i samo ako) je savršeno normalan [7:249].

1.2. LEMA. [14] Ako je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ dobro uređeni inverzni sistem nasljedno Lindelöfovih prostora X_α sa svojstvom $cf(A) \neq \omega_1$, tada je lim $\underline{X}$ nasljedno Lindelöfov prostor.

1.3. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ dobro uređeni inverzni sistem nasljedno Lindelöfovih prostora X_α. Ako je $cf(A) \neq \omega_1$, tada je ind $(\lim \underline{X})$ = Ind $(\lim \underline{X})$ = dim $(\lim \underline{X})$.

1.4. NAPOMENA. Može se dokazati da je za takve inverzne sisteme dim $(\varprojlim \underline{X}) \leq n$ ako je dim $X_\alpha \leq n$, $\alpha \in A$. Dokaz slijedi iz činjenice da za svaki otvoreni $U \subseteq \varprojlim \underline{X}$ postoji indeks $\alpha \in A$ i otvoreni skup $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ sa svojstvom $U = f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ [14].

Za dobro uređene inverzne sisteme koji imaju savršena vezna preslikavanja (otvorena vezna preslikavanja ili su neprekidni inverzni sistemi) dokazao je Tkačenko [24] da iz $w(X_\alpha) < m$ slijedi $w(\varprojlim \underline{X}) < m$. Točnije, ako je $w(X_\alpha) < \omega_\tau$, $\alpha \in A$, $cf(A) \neq \omega_\tau$, tada je $w(\varprojlim \underline{X}) < \omega_\tau$.

1.5. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ dobro uređeni inverzni sistem separabilnih metričkih prostora kofinalnosti $cf(A) \neq \omega_1$. Ako su preslikavanaj $f_{\alpha\beta}$ savršena preslikavanja (otvorena preslikavanja ili je $\underline{X}$ neprekidni inverzni sistem), tada je za prostor $X = \lim \underline{X}$ ispunjena jednakost indX = IndX = dimX.

D o k a z. Iz Tkačenkovog teorema [24] slijedi da je X separabilan metrički prostor. Iz napomene 1.4. još slijedi da je dim $X \leq n$ ako je dim $X \leq n$, $\alpha \in A$.

1.6. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ inverzni sistem metričkih kompakata i nuladimenzionalnih veznih preslikavanja. Za prostor $X = \lim \underline{X}$ vrijedi indX = IndX = dimX.

D o k a z . Iz poznatog teorema za dim inverznog sistema kompakata odmah slijedi da su projekcije $f_\alpha : X \to X$ nuladimenzionalne. K tome je dim $X \leq n$ ako je dim$X_\alpha \leq n$, $\alpha \in A$. X je, dakle, normalan prostor koji posjeduje nula-dimenzionalno preslikavanje na metrički kompakt pa je indX=IndX=dimX[1:392]. Dokaz je gotov.

1.7. LEMA. [8:199]. Ako je X strogo parakompaktan strogo nasljedno normalan prostor, tada je $\operatorname{ind}X = \operatorname{Ind}X$.

Iz leme 1.7. odmah slijedi ovaj teorem.

1.8. TEOREM. Neka je X limes inverznog sistema strogo parakompaktnih strogo nasljednih normalnih prostora i savršenih veznih preslikavanja. Ako je X strogo nasljedno normalan, tada je $\operatorname{ind}X = \operatorname{Ind}X$.

D o k a z . X je strogo parakompaktan jer su projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$, $\alpha \in A$, savršena preslikavanja [1:148].

Kažemo da je inverzni sistem $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ ind-*s p e c i j a l a n* (Ind-specijalan, (ind,Ind)-specijalan) ako zadovoljavaju uvjete:

X) Za svaki zatvoreni skup $F_\alpha \subset X_\alpha$ je $\operatorname{ind}F_\alpha \leq n$ ($\operatorname{Ind}F_\alpha \leq n$, $\operatorname{ind}F_\alpha = \operatorname{Ind}F_\alpha$),

F) Za svaki zatvoreni skup $F_\alpha \subset X_\alpha$ i svaki $\beta \geq \alpha$ je $\operatorname{ind}F_\alpha \geq \operatorname{ind} f_{\alpha\beta}^{-1}(F_\alpha)$ (odnosno $\operatorname{Ind} f_{\alpha\beta}^{-1}(F_\alpha) \leq \operatorname{Ind}F_\alpha$),

S) Za svaka dva zatvorena disjunktna skupa F_1, F_2 limesa X postoji indeks $\alpha \in A$ za koji je $\overline{f_\alpha(F_1)} \cap \overline{f_\alpha(F_2)} = \emptyset$.

1.9. TEOREM. Neka je X limes ind-specijalnog (Ind-specijalnog) inverznog sistema $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$. Ako je $\operatorname{ind}X_\alpha \leq n$ ($\operatorname{Ind}X_\alpha \leq n$) za sve $\alpha \in A$, tada je $\operatorname{ind}X \leq n$ ($\operatorname{Ind}X \leq n$).

D o k a z . Mi ćemo dati dokaz za dimenziju Ind jer je za ind dokaz sličan i jednostavniji jer tada uvjet S) nije potreban. Dokaz provodimo totalnom indukcijom po broju n.

A) Neka je n=0. Neka su nadalje F_1 i F_2 dva disjunktna zatvorena skupa limesa X. Zbog uvjeta S) postoji $\alpha\varepsilon A$ za koji je $\overline{f_\alpha(F_1)} \cap \overline{f_\alpha(F_2)} = \emptyset$. Zbog $IndX \leqq 0$ postoje disjunktni otvoreni skupovi $U_\alpha \supset \overline{f_\alpha(F_1)}$ i $V_\alpha \supset \overline{f_\alpha(F_2)}$ sa svojstvom $U_\alpha \cup V_\alpha = X_\alpha$. Skupovi $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ i $f_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ su disjunktni, sadrže F_1 i F_2 i pokrivaju X. To znači da je $IndX \leqq 0$.

B) Neka je Teorem 1.9. istinit za sve inverzne sisteme kod kojih $IndX_\alpha \leqq n-1$.

C) Dokažimo da je Teorem istinit za prirodan broj n. Za dva disjunktna zatvorena skupa F_1 i F_2 limesa X odredimo neki $\alpha\varepsilon A$ u skladu s uvjetom S). Zbog $IndX \leqq n$ postoji pregrada L_α između $\overline{f_\alpha(F_1)}$ i $\overline{f_\alpha(F_2)}$ koja je dimenzije $IndL_\alpha \leqq n-1$. Neka je $L_\beta = f_{\alpha\beta}^{-1}(L_\alpha)$, $\beta \geqq \alpha$. Iz uvjeta X) i F) slijedi da je $IndL_\beta \leqq n-1$. Inverzni sistem $\underline{L} = \{L_\beta, f_{\beta\gamma}/L_\gamma, \alpha \geqq \beta \geqq \gamma\}$ zadovoljava hipotezu indukcije B. Dakle je $Ind(\lim \underline{L}) \leqq n-1$. Kako je $\lim \underline{L} = f_\alpha^{-1}(L_\alpha)$, to je $IndX \leqq n$. Dokaz je gotov.

1.10. Problem. Neka je X limes (ind, Ind)-specijalnog inverznog limesa $\underline{X}$. Da li je IndX = indX?

Ščepin [26:200] uveo je $\varkappa$-metričke prostore. Svaki metrički prostor je $\varkappa$-metrički prostor. Produkt $\varkappa$-metričkih prostora je $\varkappa$-metrički prostor. Ako je X $\varkappa$-metrički kompakt a $f:X \to Y$ otvorena neprekidna surjekcija, tada je Y $\varkappa$-metrički kompakt.

1.11. Lema. Ščepin [25]. Ako je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ neprekidni inverzni sistem $\varkappa$-metričkih kmpakata i otvorenih veznih preslikavanja, tada je $X = \varprojlim \underline{X}$ $\varkappa$-metrički kompakt.

Fedorčuk [10]dokazuje da za svaki $\aleph$-metrički kompakt X ispunjava jednakost indX = IndX. Iz prethodne leme sada slijedi ovaj teorem.

1.12. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ neprekidni inverzni sistem $\aleph$-metričkih kompakata X_α i otvorenih veznih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$. Tada je $\mathrm{ind}(\varprojlim \underline{X}) = \mathrm{Ind}(\varprojlim \underline{X})$.

1.13. NAPOMENA: Usporedi ovaj teorem s teoremom 1.5.

2. JEDNAKOST Ind(lim $\underline{X}$) = dim(lim $\underline{X}$)

Poznato je [8:254] da je jednakost IndX = dimX ispunjena za metričke prostore. Prema tome vrijedi ovaj

2.1. TEOREM. Ako je $\underline{X} = [X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A]$ takav inverzni sistem kojemu je limes X metrički prostor, tada je IndX = dimX. Specijalno, ako je $\underline{X}$ inverzni niz s limesom X, tada je IndX = dimX.

Ako normalan prostor X posjeduje zatvoreno dim-nuladimenzionalno preslikavanje f:X → Y na metrički prostor Y, tada je IndX = = dimX [1:392]. Odatle slijedi

2.2. TEOREM. Neka je X limes inverznog sistema $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ metričkih prostora X_α. Ako su preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ savršena i dim-nuladimenzionalna, tada je IndX = dimX.

D o k a z . Projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ su savršena preslikavanja [1:148] pa je X parakompaktan prostor. Nadalje su f_α dim-nuladimenzionalna preslikavanja. Prema navedenom teoremu Pasynkova je dimX = IndX.

Pasynkov [cit.1:394] dokazao je da je IndX = dimX ako je X normalan prostor i postoji Ω-diskretno preslikavanje $f:X\to Y$ na metrički prostor.

Preslikavanje $f:X\to Y$ je Ω-diskretno ako je ω-diskretno za svaki konačan pokrivač $\omega\in\Omega$. Preslikavanje $f:X\to Y$ je ω-diskretno ako svaka točka y iz skupa f(X) posjeduje okolinu V čiji se original $f^{-1}(V)$ raspada na diskretnu u X familiju otvorenih skupova koja je upisana u pokrivač ω.

2.3. LEMA. Neka je X limes sistema $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ sa Ω-diskretnim veznim preslikavanjima $f_{\alpha\beta}$. Ako za svaki konačan otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X postoji $\alpha\in A$ i konačan otvoreni $\mathcal{U}_\beta$ prostora X_β sa svojstvom da je $f_\beta^{-1}(\mathcal{U}_\beta)$ upisan u pokrivač $\mathcal{U}$, tada su projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ Ω-diskretna preslikavanja.

D o k a z . Jednostavna provjera.

Uvjet ove leme je zadovoljen, prije svega, za kompaktne prostore X_α. Imamo, dakle, ovaj teorem.

2.4. TEOREM. Ako je $\underline{X}$ inverzni sistem kompaktnih metričkih prostora i Ω-diskretnih veznih preslikavanja, tada je ispunjena jednakost $\mathrm{Ind}(\varprojlim \underline{X}) = \dim(\varprojlim \underline{X})$.

2.5. LEMA. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ σ-usmjereni inverzni sistem. Ako je $X = \lim \underline{X}$ Lindelöfov prostor a projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ surjekcije, tada za X vrijedi lema 2.3.

D o k a z . Neka je $\mathcal{U} = \{U_1,\dots,U_k\}$ konačan otvoreni pokrivač prostora X. Za svaki $\alpha\in A$ neka je U_i^α otvoren skup prostora X_α koji je maksimalan u odnosu na svojstvo $f_\alpha^{-1}(U_i^\alpha)\subseteq U_i$, $i=1,\dots,k$. Neka je $Y_\alpha = X_\alpha \setminus \cup\{U_i^\alpha : i=1,\dots,k\}$. Kad bi svi skupovi Y_α bili neprazni, imali bi u prostoru X σ-centriranu familiju $\{f_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha\varepsilon A\}$. Kako je X Lindelöfov, postoji $y\varepsilon \bigcap \{f_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha\varepsilon A\}$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $X = \bigcup \{U_i^\alpha : \alpha\varepsilon A, i=1,\ldots,k\}$. Dokaz je gotov.

2.6. TEOREM. Neka je $\underline{X}$ σ-usmjereni inverzni sistem separabilnih metričkih prostora i savršenih Ω-diskretnih veznih preslikavanja. Za prostor $X = \varprojlim \underline{X}$ je IndX = dimX.

D o k a z . Prostor X je Lindelöfov jer su takvi svi prostori $X_\alpha \varepsilon \underline{X}$ [7:320] a projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ su savršena preslikavanja [1:148]. Iz lema 2.3. i 2.5. slijedi da su projekcije Ω-diskretna preslikavanja. Konačno, iz teorema koji smo naveli prije definicije Ω-diskretnih preslikavanja slijedi da je IndX = dimX.

Prostor X je σ-metrički prostor ako je $X = \bigcup \{X_i i\varepsilon N\}$, gdje su X_i zatvoreni metrički potprostori. Prostor je μ-prostor ako je potprostor produkta prebrojivo mnogo parakompaktnih σ-metričkih prostora [15]. Produkt prebrojivo mnogo μ-prostora je μ-prostor. Za μ-prostor X je dimX = IndX [15: Theorem 1.]. Prostor je μ-prostor dimenzije dimX$\leq$n onda i samo onda kada je homeomorfan limesu inverznog niza parakompaktnih σ-metričkih prostora X_k dimenzije dim $X_k \leq n$. [15: Theorem 2.].

Na temelju svega navedenog slijedi ovaj teorem.

2.7. TEOREM. Ako je X limes niza $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ σ-prostora X_n, tada je IndX = dimX.

D o k a z . X je dio produkta $\{X_n : n\varepsilon N\}$ koji je produkt prebrojivo mnogo parakompaktnih σ-metričkih prostora. Dakle je X μ-prostor pa je IndX = dimX.

2.8. PROBLEM. Neka je $\underline{X}$ inverzni sistem koji zadovoljava uvjete X), F) i X). Ako je $\dim X_\alpha = \mathrm{Ind} X_\alpha$, da li je $\dim(\varprojlim \underline{X}) = \mathrm{Ind}(\varprojlim \underline{X})$?

LITERATURA

[1] Aleksandrov P.S., Pasinkov B.A., Vvedenije v teoriju razmernosti, Nauka, Moskva, 1973.

[2] Baladze V.H., O funkcijah razmernostnogo tipa, Trudy Tbilis. mat.inst. 68 (1982), 5-41.

[3] Charalambous M.G., Inductive dimension and inverse sequences of compact spaces, Proc.Amer. Math.Soc.81 (1981), 482-484.

[4] ......, An example concerning inverse limit sequence of normal spaces, Proc.Amer.Math.Soc.78/1980), 600-607.

[5] ......, The dimension of inverse limits, Proc.Amer.Math. Soc. 58 (1976), 289-295.

[6] Cook H. and Fitzpatrick P.Jr., Inverse limits of perfectly normal spaces, Proc.Amer.Math.Soc. 19 (1968), 189-192.

[7] Engelking R., General Topology, PWN, Warszawa, 1977.

[8] ...., Dimension Theory, PWN, Warszawa, 1978.

[9] Fedorčuk V.V., Metod razvertyvaemyh spektrov i vpolne zamknuty otobraženij v obščej topologii, UMN 35 (1980), 112-121.

[10] ......, O razmernosti $\varkappa$-metrizuemyh bikompaktov, v častnosti prostranstv Dugundži, DAN SSSR 234(1977), 30-33.

[11] Katuta Y., On the covering dimension of inverse limits, Proc.Amer.Math.Soc.84 (1982), 588-592.

[12] Keesling J.E., Open and closed mappings and compactification, Fund.Math. 65 (1969), 73-81.

[13] Lejbo I.M., O razmernosti nekotoryh prostranstv, DAN SSSR 235 (1982), 26-29

[14] Lončar I., Inverse limits for spaces which generalize compact spaces, Glasnik matematički 17(37) (1982), 155-173.

[15] ......, Lindelöfov broj i inverzni sistemi, Zbornik radova Fakulteta organizacije i informatike varaždin, 7 (1983), 245-252.

[16] Mardešić S., Šostak A., O soveršennyh proobrazah kruževyh prostranstv, UMN 35 (1980), 84-93.

[17] Mizomaki T., On the dimension of μ-spaces, Proc.Amer.Math. Soc. 83 (1981), 195-200.

[18] Nagami K., A note on the normality of inverse limits and products, Proc. of the international Symposium on Topology and its applications Herceg-Novi 1968, Beograd 1969,261-264.

[19] Nagata J., Modern dimension theory, Amsterdam, 1965.

[20] Pasynkov B.A., Častičnye topologičeskije proizvedenija, Trudy Mosk. mat. obsčestva 13 (1965), 136-245.

[21] ......, Faktorizacionnye teoremy v teorii razmernosti, UMN 36 (1981), 147-175.

[22] O razmernosti proizvedenij normal'nyh prostranstv,DAN

[23] ......, O razmernosti prostranstv s bikompaktnoj gruppoj preobrazovanij, UMN 31 (1976), 112-120.

[24] Ponomarev V.I., Parakompakty, ih projekcionnije spektri i neprerivnye otobraženija, Mat.Sb.60 (1963), 89-119.

[25] Ščepin E.V., Topologija predel'nyh prostranstv nesčetnyh obratnyh spektrov, UMN 36 (1976), 191-226.

[26] ......, Funktory i nesčetnye stepeni kompaktov, UMN 36 (1981), 3-62.

[27] Tkačenko M.G., Cepy i kardinaly, DAN SSSR 239 (1978), 546-549.

Lončar I. Jednakost dimenzija inverznog limesa

Zbornik radova (1985/86),9-10

Lončar I. Equality of the dimensions of inverse limit

SUMMARY

Some sufficient conditions for the equality of the dimensions dim, ind and Ind are studied. We introduce the notions of ind-, Ind- and (ind,Ind)-special inverse systems.