Mr Predrag Lončar
Viša geotehnička škola
V a r a ž d i n

UDK: 517.9
Stručni rad

SINGULARNE PERTURBACIJE SVOJSTVENIH VRIJEDNOSTI*

U ovom radu promatra se problem singularnih perturbacija svojstvenih vrijednosti u Soboljevljevim prostorima (Dirichletov problem). Problem je singularne smetnje jer je red perturbiranog diferencijalnog operatora veći od reda neperturbiranog. Stummelova teorija osigurava nam konvergenciju svojstvenih vrijednosti pod izvjesnim pretpostavkama. Napravljena je i asimptotika uz pomoć tehnike kvadratne interpolacije i metodom Rayleighevog kvocijenta. Stummelova teorija primjenjuje se također i na problem singularne smetnje kada se perturbira domena. Izložena je metoda Brezisa za svojstvene singularno-perturbirane transmisijske probleme.

0. UVOD

Problem singularne perturbacije svojstvenih vrijednosti koji ovdje razmatramo sastoji se u slijedećem: neka je $\Omega \subset R^n$ omeđen otvoren skup s glatkom granicom Γ, a L_o i L_1 uniformno eliptički operatori reda $2m$ i $2m_1$, $m_1 > m$. Ispitati asimptotiku svojstvenih vrijednosti problema:

$$(L_o + \varepsilon L_1) u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon . u_\varepsilon \; ; \quad u_\varepsilon \in H^{2m_1}(\Omega)$$

$$U_\varepsilon\Big|_\Gamma = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = ... = \frac{\partial^{m_1-1} u_\varepsilon}{\partial \nu^{m_1-1}}\Big|_\Gamma = 0$$

kada je $\varepsilon \to 0$. Ovdje se radi o asimptotskoj teoriji perturbacije (vidi Kato [1]). U toj teoriji rezolventa ili svojstvene vrijednosti nisu analitičke funkcije parametra, već je uz određene uvjete moguć samo asimptotski razvoj tih veličina. Problem je singularne smetnje pošto je red operatora L_1 veći od reda operatora L_o i pošto $D(L_o)$ $D(L_1)$. Osim toga, ne možemo sačuvati sve rubne uvjete za $\varepsilon = 0$ jer bi takav rubni problem bio preodređen.

Mathematics subject classifications (198): Primary 34D15, Secondary 34E15
Key word ans phrases: Singular perturbation, eigenvalue
* *Izvod iz istoimenog magistarskog rada.*

U prvom poglavlju razrađujemo Stummelovu teoriju. Uvodi se pojam diskretne konvergencije i dobiva konvergencija svojstvenih vrijednosti pod izvjesnim pretpostavkama, kako za obične tako i za parcijalne diferencijalne jednadžbe. U potonjem slučaju napravljena je i asimptotika, i to uz pomoć tehnike kvadratne interpolacije i metodom Rayleighevog kvocijenta.

U drugom poglavlju promatraju se problemi singularne smetnje kada se perturbira domena i svojstveni problemi transmisije. Fundamentalna je tu Stummelova ideja o ulaganju Soboljevljevih prostora $H_o^m(G_e)$ u Kartezijev produkt prostora $L^2(R^n)$ tj. prostor $L^{m,2}$ za slučaj perturbacije domena i metod Brezisa za slučaj transmisionih problema.

1. STUMMELOVA TEORIJA I SINGULARNE PERTURBACIJE

1.1. Stummelova teorija

Uvodimo najprije važan pojam tzv. diskretne konvergencije (po Stummelu [2] do [7]). Neka je E realan ili kompleksan Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $(\, , \,)_E$ te E_1, $1=0,1,2,..$ niz potprostora od sa skalarnim produktom $(\, ,)_{E_1}$ takvih da odgovarajuće norme zadovoljavaju:

$\|u\|_E = \|u\|_{E_o}$, $u\varepsilon E_o$; $\|u\|_E \leq \mu \|u\|_{E_1}$, $u\varepsilon E_1$, $1\varepsilon N$ za neku konstantu μ, $\mu \geqq 0$.

Definicija 1.1.1. Kažemo da niz $u_1 \varepsilon E_1$ diskretno konvergira k u_o, $u_o \varepsilon E_o$ ako $u_1 \underset{E}{\rightharpoonup} u_o$ u E i ako $\|u_1\|_{E_1} \to \|u_o\|_E$. Diskretnu konvergenciju označavamo s $u_1 \to u_o$ ili s-lim $u_1 = u_o$.

Diskretnu konvergenciju opisujemo preko familije restrikcijskih operatora. To su operatori $R_1 \varepsilon B(E,E_1)$ sa svojstvom:

$(u,v)_E = (u,R_1 v)_{E_1}$, $u\varepsilon E_1$, $v\varepsilon E$, $1 = 0,1,2,...$

Pretpostavljamo da vrijedi slijedeća pretpostavka:

$R_1 \underset{E}{\rightharpoonup} R_o$ koju označavamo sa (R). Lako se odatle vidi da $R_1 v \underset{E}{\rightharpoonup}$

$R_o v$ i da je zahtjev diskretne konvergencije $u_l \to u_o$ ekvivalentan sa $\|u_l - R_l u_o\|_{E_l} \to 0$ kada $l\to\infty$.

Definicija 1.1.2. Kažemo da niz $u_l \varepsilon E_l$ slabo diskretno konvergira k $u_o \varepsilon E_o$, tj. $u_l \rightharpoonup u_o$ ako $u_l \xrightarrow[E]{} u_o$ i ako je $\|u_l\|_{E_l}$ omeđen niz. Pišemo još i w-lim $u_l = u_o$.

U praksi je uvjet (P) teško provjerljiv. Zato ćemo se poslužiti slijedećim teoremom:

Teorem 1.1.3. Slijedeći uvjeti su nužni i dovoljni da bi bio ispunjen uvjet (R):

(R1) Postoji gust potprostor $D_o \subseteq E_o$ i za svaki $\Psi\varepsilon D_o$ postoji niz $\Psi_l \varepsilon E_l$ sa svojstvom $\Psi_l \to \Psi$(kada $l\to\infty$).

(R2) Za svaki slabo diskretno konvergentan podniz w_l, $w_l \rightharpoonup w$ (kada $l\to\infty$) takav da je $w_l \varepsilon E_l$ za sve $l\varepsilon N$ vrijedi $w\varepsilon E_o$.

(R3) $\overline{\lim_{l\to\infty}} \|R_l v\|_{E_l} \leq \|R_o v\|_E$ za svako $v\varepsilon E$.

Dokaz se može naći u F. Stummel [2], teorem 20.

Pojam jake i slabe diskretne konvergencije lako se prenosi na familiju funkcionala. Uzmimo da imamo niz omeđenih linearnih funkcionala $l_n \varepsilon E'_n$, n=0,1,2 ... i omeđeni linearni funkcional $l\varepsilon E'$. Po Rieszovu teoremu postoje jedinstveni elementi $v_l \varepsilon E_l$ i $v\varepsilon E$ takvi da $l_n(\phi) = (\phi, v_n)_{E_n}$, $\phi\varepsilon E_n$, n=0,1,2,...; $l(\phi)=(\phi,v)_E$, $\phi\varepsilon E$.

Definicija 1.1.3. Niz funkcionala $l_n \varepsilon E'_n$, $n\varepsilon N$ diskretno konvergira k funkcionalu $l_o \varepsilon E'_o$ ako $v_n \to v_o$ (kada $n\to\infty$).

Definicija 1.1.4. Niz funkcionala $l_n \varepsilon E'_n$, $n\varepsilon N$ slabo diskretno konvergira k funkcionalu $l_o \varepsilon E'_o$ ako $v_n \rightharpoonup v_o$ (kada $n\to\infty$).

Analogno se ovi pojmovi definiraju i za niz seskvilinearnih formi.

Definicija 1.1.5. Niz seskvilinearnih formi a_l na E_l, $l=0,1,2...$ zovemo stabilnim ako postoji konstanta $\alpha\geqq 0$ takva da je $|a_l(\phi,\psi)|\leqq\alpha\cdot\|\psi\|_{E_l}\cdot\|\psi\|_{E_l}$ čim su $\phi,\psi\varepsilon E_l$, $l\varepsilon N\cup\{0\}$.

Definicija 1.1.6. Niz seskvilinearnih formi a_l na E_l zove se inverzno stabilnim ako postoji konstanta $\alpha_o\geqq 0$ takva da je

$$\alpha_o\|\psi\|_{E_l}\leqq\sup_{0\neq\psi\varepsilon E_l}|a_l(\psi,\phi)|/\|\psi\|_{E_l},\quad \phi\varepsilon E_l,\ l=1,2,3,...$$

Važni su još pojmovi konzistentnosti i konvergencije.

Definicija 1.1.7. Niz neprekidnih seskvilinearnih formi a_l na E_l, $l=0,1,2,...$ zove se konzistentnim u točki $u_o\in E_o$ ako postoji niz $\overset{o}{u}_l\varepsilon E_l$ sa svojstvom s-lim $\overset{o}{u}_l=u_o$ i s-lim $a_l(.,\overset{o}{u}_l)=$ $=a_o(.,u_o)$.

Definicija 1.1.8. Niz neprekidnih seskvilinearnih formi a_l na E_l, $l=0,1,2...$ zovemo konzistentnim ako postoji gust podskup $D_a\subset E_o$ i za svaki $\phi\varepsilon D_a$ niz $\phi_l\varepsilon E_l$ sa svojstvom $\phi_l\to\phi$ i s-lim $a_l(.,\phi_l)=a_o(.,\phi)$.

Definicija 1.1.9. Niz omeđenih seskvilinearnih formi a_l na E_l zove se konvergentnim u točki $u_o\varepsilon E_o$ ako postoji barem jedan niz $\overset{o}{u}_l\varepsilon E_l$ takav da je s-lim $\overset{o}{u}_l=u_o$ i ako za svaki niz $u_l\varepsilon E_l$ takav da $u_l\to u_o$ vrijedi s-lim $a_l(.,u_l)=a_o(.,u_o)$.

Definicija 1.1.10. Niz omeđenih seskvilinearnih formi a_l na E_l zovemo konvergentnim ako je on konvergentan u svakoj točki $u_o\varepsilon E_o$.

Teorem 1.1.11. Stabilnost i konzistentnost niza a_l seskvilinearnih formi na E_l nužni su i dovoljni za konvergenciju $a_l\to a_o$. (Dokaz F.Stummel [3] 1.2.(6)).

Uvodimo još neke pojmove koji poopćuju pojam kompaktnosti. Njih ćemo definirati za operatore.

Definicija 1.1.12. Niz operatora $K_l \varepsilon B(E_l)$ zovemo diskretno kompaktnim ako za svaki niz u_l, $u_l \varepsilon E_l$, $\|u_l\|_{E_l} \leq C$ postoji podniz $l_1 \varepsilon N$ i element $w \varepsilon E_o$ sa svojstvom $K_{l_1} u_{l_1} \to w$.

Definicija 1.1.13. Niz operatora $K_l \varepsilon B(E_l)$ $l \varepsilon N$ zovemo slabo diskretno kompaktnim ako za svaki slabo diskretno konvergentan nulniz $u_l \varepsilon E_l$, $u_l \rightharpoonup 0$ vrijedi $K_l u_l \to 0$.

Definicija 1.1.14. Niz omeđenih seskvilinearnih formi k_l na E_l zovemo slabo kolektivno kompaktnim ako je k_l kompaktna za svako l, l=0,1,2,... i ako za svaki niz $v_l \varepsilon E_l$, $l \varepsilon N$ takav da je w-lim $v_l = 0$ vrijedi $\lim_{l\to\infty} k_l(v_l,.)E_l' = 0$.

Definicija 1.1.15. Niz omeđenih seskvilinearnih formi b_l^* adjungiranih formama b_l, tj. niz pridruženih operatora B_l^*, l=0,1,2,... zove se slabo diskretno kompaktnim ako za svaki slabo diskretno konvergentni nulniz $w_l \varepsilon E_l$, $w_l \rightharpoonup 0 (l\to\infty)$ vrijedi $B_l^* w_l \to 0$.

Definicija 1.1.16. Omeđena seskvilinearna forma a_l na E_l, $l \varepsilon N$ zove se jako eliptičkom ako postoji pozitivna konstanta γ_l i kompaktna striktno pozitivna seskvilinearna forma k_l na E_l sa svojstvom:

$$\gamma_l \|\phi\|_{E_l}^2 \leq R_e\, a_l(\phi,\phi) + k_l(\phi,\phi), \quad \phi \varepsilon E_l$$

Definicija 1.1.17. Niz omeđenih seskvilinearnih formi a_l na E_l, l=0,1,2,... zove se uniformno jako koercitivnim ako postoji pozitivna konstanta γ i slabo kolektivno kompaktan niz seskvilinearnih formi k_l na E_l takvih da vrijedi:

$$\gamma \|\phi\|_{E_l}^2 \leq R_e\, a_l(\phi,\phi) + R_l\, k_l(\phi,\phi); \quad \phi \varepsilon E_l, \; l = 0,1,2,...$$

Teorem 1.1.18. Svaki diskretno kompaktan niz operatora $K_l \varepsilon B(E_l)$ i svaki slabo diskretno kompaktan niz operatora $K_l^* \varepsilon B(E_l)$ je stabilan. (Stummel [3] 3.1 (2)).

Promotrimo još jedan poseban slučaj, tj. $E_l \subset E$ za $l=0,1,2,...$ pri čemu su E_l i E Hilbertovi i $(\, , \,)_{E_l} = (\, , \,)_E$ za $l=0,1,2...$ Restrikcijski operatori R_l su onda ortogonalne projekcije u E na E_l, a bilježit ćemo ih sa P_l.

Definicija 1.1.19. Kažemo da niz $E_l \subset E$ konvergira ka $E_o \subset E$ i pišemo $\lim E_l = E_o$ vrijedi $s\text{-}\lim\inf E_l = s\text{-}\lim\sup E_l = E_o$ i $w\text{-}\lim\inf E_l = w\text{-}\lim\sup E_l = E_o$ (konvergencije su u E).

Slijedeće tvrdnje su očite:

1) $P_l \to P_o$ ako i samo ako $\lim E_l = E_o$
2) $\lim E_l = E_o$ ako i samo ako $E_o \subset s\text{-}\lim\inf E_l$ i $w\text{-}\lim\sup E_l \subset E_o$.

Definicija 1.1.20. Par omeđenih seskvilinearnih formi a_l i b_l na E_l zove se jako definitnim ako vrijedi $|\mathrm{Re}\, a_l(\phi,\phi)| + |\mathrm{Re}\, b_l(\phi,\phi)| \geq 0$ čim je $\phi \varepsilon E_l$, $\phi \neq 0$.

1.2. Svojstveni problem

Sada nas zanima što možemo reći o ponašanju svojstvenih vrijednosti λ_l svojstvenog problema:

$$a_l(\phi,w_l) = \lambda_l \cdot b_l(\phi,w_l), \quad \phi \varepsilon E_l, \quad l = 0,1,2,...$$

Pri tome su a_l i b_l omeđene hermitske seskviilnearne forme na E_l, a E_l, $l=0,1,2,...$ kompleksni Hilbertovi prostori takvi da vrijede slijedeće pretpostavke:

(A) Prostor E_o je separabilan, a prostori E, E_l, $l=0,1,2,\ldots$ su kompleksni Hilbertovi takvi da vrijedi pretpostavka (R): $R_l \xrightarrow[E]{} R_o$ (kada $l\to\infty$)

(B) Nizovi omeđenih seskvilinearnih formi a_l i b_l na E_l, $l=0,1,2,\ldots$ su konzistentni (definicija 1.1.8).

(C) Seskvilinearna forma b_l je kompaktna za svako l, $l=0,1,2,\ldots$ a niz b_l^*, $l=1,2,3,\ldots$ je slabo diskretno kompaktan (definicija 1.1.13).

(D) Par a_l, b_l je jako definititivan na E_l za svako l, $l=0,1,2\ldots$.

(E) Niz a_l na E_l, $l=0,1,2,\ldots$ je uniformno jako koercitivan (u skladu s definicijom 1.1.17).

Ako su A_l i B_l operatori asocirani uz seskvilinearne forme a_l i b_l, tada definiramo rezolventni skup od A_l i spektar od A_l s obzirom na B_l:

$$P(a_l,b_l) = P(A_l,B_l) = \{z\varepsilon C: (A_l - zB_l)^{-1}\varepsilon B(E_l)\}$$

$$\Sigma(a_l,\ b_l) = \Sigma(A_l,\ B_l) = C\backslash P(A_l,\ B_l)$$

Glavni rezultat dan je slijedećim teoremom (Stummel [2],3, (14))

Teorem 1.2.1. Neka su ispunjene pretpostavke (A) do (E). Neka je λ_o svojstvena vrijednost od a_o s obzirom na b_o s algebarskom kratnošću m i neka je $w_o^{(1)}, w_o^{(2)},\ldots,w_o^{(m)}$ baza odgovarajućeg svojstvenog potprostora. Neka je U proizvoljna kompaktna okolina od λ_o u C i $\Sigma(a_o,\ b_o)\cap U = \{\lambda_o\}$. Tada za skoro sve l, $l=1,2,\ldots$ postoji točno m svojstvenih vrijednosti $\lambda_l^{(1)},\ldots,\lambda_l^{(m)}$ brojenih do na njihove algebarske kratnosti i linearno nezavisni vektori $w_l^{(1)}, w_l^{(2)},\ldots,w_l^{(m)}$ u sumi algebarskih potprostora od $\lambda_l^{(1)},\ldots,\lambda_l^{(m)}$ sa svojstvom $\Sigma(a_l,b_l)\cap U = \{\lambda_l^{(1)},\ldots,\lambda_l^{(m)}\}$s time da $\lambda_l^{(k)}\to\lambda_o$ i $w_l^{(k)}\to w_o^{(k)}$ (kada $l\to\infty$) za $k = 1,2,\ldots m$.

U praksi je teško provjeriti uvjet (C). Evo jednog dovoljnog uvjeta:

Propozicija 1.2.2. Neka je b_l na E_l, $l=0,1,2,\dots$ konzistentan niz omeđenih seskvilinearnih formi i neka je k na E kompaktna striktno pozitivna seskvilinearna forma. Tada je niz adjungiranih formi b_l^*, $l=1,2,3\dots$ slabo diskretno kompaktan onda i samo onda ako za svako $\varepsilon \geqq 0$ postoje pozitivni brojevi $\eta(\varepsilon)$ i $\nu(\varepsilon)$ takvi da je:

$$|b_l(\phi,\phi)| \leqq \varepsilon \|\phi\|^2_{E_l} + \eta(\varepsilon)\, k(\phi,\phi) \qquad \phi \varepsilon E_l,\ l \geqq \nu(\varepsilon).$$

Dokaz se može naći u Stummel [2], 3 (18).

Dodajmo još i to da se za svaki slučaj da su a_l i b_l hermitske seskvilinearne forme na E_l, $l=0,1,2\dots$ za koje vrijede pretpostavke (A) do (E) dobiva iz teorema 1.2.1. konvergencija uređenih nizova svojstvenih vrijednosti, tj. $\lambda_l^{(k)} \to \lambda_o^{(k)}$ kada $l \to \infty$, $k = 0,1,2,\dots,-1,-2\dots$

Ova se teorija može primijeniti na slučaj singularnih perturbacija kako običnih tako i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Razmotrimo npr. svojstveni problem za jednadžbu:

$$\varepsilon Qu + Pu = \lambda(\varepsilon)\ .\ u$$

pri čemu su Q i P hermitski diferencijalni operatori definirani na zatvorenom intervalu $a \leqq x \leqq b$:

$$Qu = \sum_{k=0}^{m_1} \frac{d^k}{dx^k}\left(q_k(x)\ .\ \frac{d^k u}{dx^k}\right);\quad Pu = \sum_{k=0}^{m} \frac{d^k}{dx^k}\left(p_k(X)\ \frac{d^k u}{dx^k}\right)$$

$p_k(x)$ i $q_k(x)$ su glatke realne funkcije na a,b takve da važe uvjeti eliptičnosti: $(-1)^m\ p_m(x) \geqq 0$, $(-1)^{m_1}\ q_{m_1}(x) \geqq 0$ za $a \leqq x \leqq b$.

Rubni uvjeti su Dirichletovi:

$u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0 \qquad k = 0,1,2,\dots, m_1-1$

Da primijenimo Stummelovu teoriju gledajmo forme asocirane uz operatore P i Q:

$$p(u,v) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \int_a^b p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \cdot \frac{d^k v}{dx^k} dx; \; u,v\varepsilon H_o^m(a,b)$$

$$q(u,v) = \sum_{k=0}^{m_1} (-1)^k \int_a^b q_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \cdot \frac{d^k v}{dx^k} dx; \quad u,v\varepsilon H_o^{m_1}(a,b)$$

Uvjeti eliptičnosti osiguravaju koercitivnost formi p i q:

$p(u,u) \geq C \|u\|_m^2 \quad , u\varepsilon H_o^m (a,b)$

$q(u,u) \geq C_1 \|u\|_{m_1}^2 \quad , u\varepsilon H_o^{m1} (a,b)$

Perturbirani svojstveni problem tada glasi:

$\varepsilon q(u,v) + p(u,v) = \lambda(\varepsilon) \cdot (u,v)_o$ za sve $u,v\varepsilon H_o^{m_1} (a,b)$

Uzmimo sada niz pozitivnih brojeva ε_1 takvih da $\varepsilon_1 \to 0$ kada $1 \to \infty$ i definirajmo:

$a_1(u,v) = \varepsilon_1 q(u,v) + p(u,v), \; 1\varepsilon N$

$q_o(u,v) = p(u,v)$

$b_1(u,v) = (u,v)_o \qquad 1 = 0,1,2,\dots$

$E = E_o = H_o^m (a,b), \quad E_1 = H_o^{m_1}(a,b) \; , \; 1\varepsilon N$

$$\|u\|_E^2 = \|u\|_{E_o}^2 = p(u,u); \quad \|u\|_{E_1}^2 = \varepsilon_1 q(u,u) + p(u,u)$$

Lako se provjeri da su ovdje ispunjene pretpostavke (A) do (E) pa se time dobije konvergencija uređenih nizova svojstvenih vrijednosti $\lambda_n(\varepsilon)$ λ_n, λ_n je tu n-ta po redu svojstvena vrijednost nultog problema:

$Pu = \lambda_n u$

$u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0 \qquad k = 0,1,2,\dots,m-1$

Stummelova teorija može se primijeniti i za slučaj parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Neka je Ω glatka omeđena domena u R^n i neka je dana forma:

$$b(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega b_{ij}(x)\, D_j v\, \overline{D_i w}\, dx + \int_\Omega b_o(x)\, v\, \bar{w}\, dx$$

na $V_o = H_o^1(\Omega)$ s time da D_i znači deriviranje po x_i, tj. $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $b_o \geq 0$ glatka na R^n kao i b_{ij}. Još pretpostavljamo da je matrica $[b_{ij}]_{mxn}$ pozitivno definitivna i simetrična na $\bar{\Omega}$. Time smo osigurali koercitivnost forme b, tj. postojanje konstante $k \geq 0$ takve da vrijedi $b(v,v) \geq k|v|^2_{1,\Omega}$ za sve $v \in H_o^1(\Omega)$. Operator B asociran s formom b u $L^2(\Omega)$ je: $Bv = -\sum_{i,j=1} D_i(b_{ij} D_j v) + b_o v$ a neperturbirani svojstveni problemi $Bu = \lambda u$ u Ω, $u_{\partial\Omega} = 0$ ili varijacijski $b(u,v) = \lambda(u,v)$; $u,v \in H_o^1(\Omega)$. Za perturbirajuću formu uzet ćemo: $a(v,w) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq 2} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta v\, \overline{D w}\, dx$ na $V = H_o^2(\Omega)$ gdje je $D^\alpha w = \frac{\partial^\alpha w}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $a_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\beta\alpha}$ i to je glatko za sve multiindekse α,β; $|\alpha|,|\beta| \leq 2$. Asocirani diferencijalni operator uz formu a je: $Av = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq 2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta v)$. Pretpostavimo li koercitivnost forme a, tj. postojanje konstante $C \geq 0$ takve da vrijedi $a(v,v) \geq C\, |v|^2_{2,\alpha}$ za sve $v \in H_o^2(\Omega)$, tada perturbirani svojstveni problem glasi:

$$A_\varepsilon u_\varepsilon = (\varepsilon A + B) u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon \text{ u } \Omega$$

$$u_\varepsilon\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

ili u varijacionom obliku: $\varepsilon.a(u_\varepsilon,v) + b(u_\varepsilon,f) = \lambda_\varepsilon(u_\varepsilon,f)_{0,\Omega}$ za sve $v\in H^2_o(\Omega)$. Neka je sada ε_l niz pozitivnih brojeva takvih da $\varepsilon_l\to 0$ kada $l\to\infty$. U skladu sa Stummelovom teorijom stavimo: $a_l(u,v) = \varepsilon_l a(u,v) + b(u,v)$, $l\in N$

$a_o(u,v) = b(u,v)$; $b_l(u,v) = (u,v)_{o,\Omega}$ $l\in N$

$E = E_o = H^1_o(\Omega)$; $E_l = H^2_o(\Omega)$

$\|u\|^2_E = \|u\|^2_{E_o} = b(u,u)$; $\|u\|^2_{E_l} = \varepsilon_l a(u,u) + b(u,u)$; $l\in N$

Uvjeti (A) do (E) lako se provjere (npr.uvjet (C) uz pomoć propozicije 1.2.2.) pa po teoremu 1.2.1. lako zaključimo na konvergenciju uređenog niza svojstvenih vrijednosti perturbiranog problema prema uređenom nizu svojstvenih vrijednosti neperturbiranog problema (kada $\varepsilon\to 0$).

Stummelova teorija ne daje asimptotiku za svojstvene vrijednosti. Evo nekih Greeenleejevih rezultata dobivenih u radovima [9], [10], [11]. Tehnika kojom su ti rezultati dobiveni bazira se na upotrebi Rayleighevog kvocijenta. Izložimo je.

Uzmimo na časak da radimo u nekom Hilbertovom prostoru H sa skalarnim produktom (. , .). Na zatvorenom potprostoru $V_o \subset H$ definirana je neprekidna hermitska bilinearna forma b(v,w). V_o je po pretpostavci gust, a b H-koercitivna. V_o je normiran s normom $|v|_o = \sqrt{b(v,v)}$. Nadalje, neka je a(v,w) neprekidna hermitska bilinearna forma definirana na zatvorenom potprostoru V koji je gust u V_o. Pretpostavljamo da je forma a nenegativna i zatvorena u D(b). Prostor V normiramo s normom $|v|_V = \sqrt{a(v,v) + b(v,v)}$.

Uz te forme vežemo operatore B, $\mathcal{A}$ i A_ε ovako:

$(Bv, w) = b(v,w)$, $v\varepsilon D(B)$, $Bv\varepsilon H$, $w\varepsilon V_o$

$b(\mathcal{A}v,w) = a(v,w)$, $v\varepsilon D(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}v\varepsilon V_o$, $w\varepsilon V$

$(A_\varepsilon v, w) = \varepsilon a(v,w) + b(v,w)$, $v\varepsilon D(A_\varepsilon)$, $A_\varepsilon v\varepsilon H$, $w\varepsilon V$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su spektri od B, $\mathcal{A}$ i A_ε diskretni (u slučaju da su V, V_o i H Soboljevljevi prostori, to osigurava standardna eliptička teorija (vidi S.Agmon [8])). Uzmimo sada da je λ izolirana prosta stabilna svojstvena vrijednost od B, sa svojstvenim vektorom u.

Definicija 1.2.3. Izolirana svojstvena vrijednost λ od B konačne algebarske kratnosti p, $p\geq 1$ zove se stabilnom ako se za ε dovoljno maleno presjek proizvoljne izolirajuće okoline od λ i spektra od A_ε sastoji od točno p svojstvenih vrijednosti brojenih do na njihovu algebarsku kratnost. Ključni teorem je ovdje (Greenlee W.M. [11] teorem 2.2.):

Teorem 1.2.4. Neka je λ izolirana, prosta, stabilna, svojstvena vrijednost od B. Nadalje, neka postoji funkcija k: $(0,\varepsilon_o]\to$ $\to(0,\infty)$ takva da $k(\varepsilon)\to 0$ kada $\varepsilon\to 0$ i $\tilde{u}\varepsilon H$, $\tilde{u}\neq 0$ takav da

$A_\varepsilon^{-1}\, u = \lambda^{-1}(u - k(\varepsilon)\,\tilde{u}) + o(k(\varepsilon))$ u H

Ako je λ_ε prosta svojstvena vrijednost od A_ε takva da $\lambda_\varepsilon\to\lambda$, tada vrijedi $\lambda_\varepsilon = (.A_\varepsilon^{-1}u,u)^{-1} - k^2(\varepsilon)\,.\lambda.\,(S\tilde{u},\tilde{u}) + o(k^2(\varepsilon))$.
S je pri tom omeđeni hermitski operator u H definiran ovako: $Su = 0$, $S = B\,(B-\lambda)^{-1}$ na ortogonalnom komplementu od u.
Posljedica 1.2.5. Uz pretpostavke teorema 1.2.4. vrijedi asimptotika $\lambda_\varepsilon = \lambda + k(\varepsilon).\lambda.(\tilde{u},u) + 0(k^2(\varepsilon))$

Postoji i analogna verzija gornjeg teorema za slučaj višestrukih svojstvenih vrijednosti (vidi Greenlee W.M. [11], teorem 3.1.).

Neka je sada Ω glatka, omeđena domena u R^n. Gledamo dvije forme: $a(v,w) = \sum\limits_{|\alpha|,|\beta| \leq 2} \int\limits_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x)\, D^{\beta} v\, D^{\alpha} w\, dx$ na $V = H_o^2(\Omega)$ i

$$b(v,w) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} b_{ij}(x)\, D_j v\, \overline{D_i w}\, dx + \int_{\Omega} b_o(x)\, v\, \bar{w}\, dx \text{ na}$$

$V_o = H_o^1(\Omega)$. Još pretpostavljamo $b_o \geq 0$, b_o kao i b_{ij} glatke na R^n, matrica $[b_{ij}]_{nxn}$ pozitivno definitna i simetrična na Ω, $a_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\beta\alpha}$, i to je glatko za sve multiindekse α,β, $|\alpha| \leq 2$, $|\beta| \leq 2$. Neka je λ prosta svojstvena vrijednost od B, a u pridruženi svojstveni vektor takav da je $\|u\|_{o,\Omega} = 1$. Lako se provjeri da je λ stabilna svojstvena vrijednost (Greenlee W.M. [9], teorem 2.1.). Nadalje, neka je λ_{ε} jedinstvena svojstvena vrijednost od A_{ε} takva da $\lambda_{\varepsilon} \to \lambda$. Nađimo asimptotiku rješenja $w_{\varepsilon} = A_{\varepsilon}^{-1} u$ da bismo mogli primijeniti teorem 1.2.4. Problem je dakle ovaj: $A_{\varepsilon} w_{\varepsilon} = u$, $w_{\varepsilon} \in D(A_{\varepsilon}) = H^4(\Omega) \cap H_o^2(\Omega)$.

w_{ε} se loše ponašaju u okolici ruba, što se popravlja korektorima. $\partial\Omega$ pokrijemo konačnim brojem otvorenih podskupova U_i, $i = 1,2,\ldots,m$ i u svakom od njih uvedu se glatke lokalne koordinate (t, ϕ_j^i), $j=1,2,\ldots,n-1$; $i=1,2,\ldots,m$ pri čemu je $t = \rho/\sqrt{\varepsilon}$, $\rho = \text{dist}\,(x,\partial\Omega)$, a ρ i ϕ_j^i su izabrani tako da vrijedi $|\nabla\rho(x,)| = 1, \nabla\rho.\nabla\phi_j^i = \nabla\phi_j^i\,.\nabla\phi_k^i = 0$ za $j \neq k$. Sa ξ_1, $1=1,2,\ldots,m$; $\sum\limits_{1=1}^{m} \xi_1 = 1$ označit ćemo C^{∞}-particiju jedinice podređenu pokrivaču $\{U_1\}$, $1 = 1,2,\ldots,m$. U varijablama (t, ϕ_i^1) operator A_{ε} glasi (nakon razvoja koeficijenata od A u red potencija po $\mu = \sqrt{\varepsilon}$):

$$\mu^{-2}\left(a_1^1(0,\phi_i^1) \frac{\partial^4}{\partial t^4} - a_o^1(0,\phi_i^1) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) + \mu^{-2} \sum_{r \geq 1} \mu^r M_r^1 \quad (2)$$

pri čemu je:

$$a_1^1(0, \phi_i^1) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x')\,(n(x'))^{\alpha+\beta} = a_1(x')$$

$$a_o^1(0,\phi_i^1) = \vec{n}(x')\,[b_{ij}(x')]\,\vec{n}(x') \qquad = a_o(x')$$

pri čemu je $x'=(0,\phi_i^1)\varepsilon\partial\Omega$, a $\vec{n}(x')$ vanjska normala na $\partial\Omega$ u točki x' $\varepsilon\partial\Omega$ Uz pomoć tzv. matching techniques na rubne uvjete (vidi W.Eckhaus [12]) dolazi se do Ansatza:

$$w_\varepsilon(x)\sim\sum_{j\geq 0}\mu^j w_j(x) + \mu\sum_{l=1}^{m}\xi_l(x)\sum_{j\geq 0}\mu^j v_j^l(t,\ \phi_i^l),\ l=1,2,\ldots,m \quad (3)$$

Pri tom su w_j članovi vanjskog razvoja, a v_j^l članovi nutarnjeg razvoja, tj.funkcije tipa rubnog sloja (u biti funkcije s nosačem u okolici ruba - korektori). Primijenimo li operator $\varepsilon A + B$ na (3) i to u obliku (2) na funkcije tipa rubnog sloja, a u standardnom obliku na članove vanjskog razvoja, te izjednačimo koeficijente uz iste potencije od μ s nulom, dobijemo nakon kraćeg računa:

$$w_\varepsilon = \lambda^{-1} u + \mu w_1 + O(\mu^{3/2}) \text{ u } L^2(\Omega)$$

$$(w_\varepsilon,u) = (w_o,u) + \mu(w_1,u) + \mu^2(w_2,u) + O(\mu^3)$$

Znači, imamo ispunjene pretpostavke teorema 1.2.4. sa $k(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} = \mu$ i $\tilde{u} = -\lambda w_1$ pa izračunamo li još uz pomoć Greeenove formule prvi korekcijski član (w_1,u), dobijemo:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda + \varepsilon^{1/2}\int_{\partial\Omega}(a_1 \cdot a_o)^{1/2}\left|-\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 dS + O(\varepsilon)$$

2. PERTURBACIJA DOMENA U ELIPTIČKIM RUBNIM PROBLEMIMA I PROBLEMI TRANSMISIJE

2.1. Perturbacija domena u eliptičkim rubnim problemima

Pogledajmo što daje Stummelova teorija za slučaj svojstvenog problema tipa $A_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon B u_\varepsilon$ u domeni G_ε, pri čemu se G_ε u izvjesnom smislu "steže" na domenu G_o. Ključna ideja je da se Soboljevljeve prostore $H^m(G_l)$, $l\varepsilon N$ uloži izometrički u Kartezijev produkt prostora $L^2(R^n)$. To je korisno stoga što općenito nije jasno kako prostor $H^m(G_1)$ proširiti do prostora $H^m(G)$, $\hat{G}\supset\hat{G}_1$, $l\varepsilon N \cup \{0\}$ (proširenje nulom tu sigurno nije dobro jer derivacija na rubu područja može doživjeti skok).

Definicija 2.1.1. Pod $L^{m,2}$ podrazumijevat ćemo Kartezijev produkt prostora $L^2(R^n)$, i to od onoliko članova koliko ima multiindeksa $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2,\dots,\sigma_n)$ reda $|\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2+\dots+\sigma_n \leq m$, $\sigma_i \varepsilon N \varepsilon \cup \{0\}$ za $i = 1,2,\dots,n$. $L^{m,2}$ je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $(u,v)_m = \sum_{|\sigma|\leq m} \int_{R^n} u^\sigma(x)\,\overline{v^\sigma(x)}dx$ ako su $u = (u^\sigma)_{|\sigma|\leq m}$, $v = (v^\sigma)_{|\sigma|\leq m}$ iz $L^{m,2}$. Normu prostora $L^{m,2}$ pišemo $\|\ \|_m$.

Definicija 2.1.2. Neka je G izmjeriv skup u R^n. Tada definiramo $L^{m,2}_o(G) = \{u\varepsilon L^{m,2} : u = 0 \text{ s.s. u } R^n\backslash G\}$.

Definicija 2.1.3. Sa J^m_G označit ćemo prirodno ulaganje prostora $H^m(G)$ u $L^{m,2}$: $(J^m_G u)(x) =((D^\sigma u)(x))_{|\sigma|\leq m}$ za $x\varepsilon G$ i $(J^m_G u)(x) = 0$, $x\varepsilon R^n\backslash G$. J^m_G preslikava prostor $H^m(G)$ izomorfno i izometrički na zatvoren potprostor $_JH^m(G)$ od $L^{m,2}$.

Neka je sada m=1 i neka su na prostoru $L^{1,2}$ zadane dvije seskvilinearne forme:

$$a(u,v) = \sum_{k=1}^{n} \int_{R^n} u^k\,\overline{v^k}\,dx, \quad b(u,v) = \int_{R^n} u^o\,\overline{v^o}\,dx$$

gdje su $u, v\varepsilon L^{1,2}$; $u = (u^o, u^1,\dots,u^n)$ i $v = (v^o, v^1,\dots,v^n)$.

Teorem 2.1.4. Neka je $E_o, E_1,\dots$ niz zatvorenih potprostora od $L^{1,2}$ takav da je $\lim E_l = E_o$ i da je niz $b|_{E_l}$, $l=0,1,2\dots$ slabo kolektivno kompaktan. Tada su nizovi $a|_{E_l}$ i $b|_{E_l}$ stabilni i konzistentni u svakoj točki $u_o\varepsilon E_o$. Niz $a|_{E_l}$ je uniformno jako koercitivan. Za svako l, $l=0,1,2,\dots$ par seskvilinearnih formi $a|_{E_l}$ i $b|_{E_l}$ je jako definitan.

Dokaz: F. Stummel [6]; 2.1. (6)

Promotrimo sada familiju svojstvenih problema:

$$\left.\begin{aligned} -\nabla w_l^{(k)} &= \lambda_l^{(k)} w_l^{(k)} \text{ u } G_l \\ w_l^{(k)} &= 0 \quad \text{na } \partial G_l \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

pri čemu je $w_l^{(k)} \varepsilon H_o^1(G_l)$ za $l = 0,1,2,\ldots$, a $\lambda_l^{(k)}$ k-ta svojstvena vrijednost gornjeg problema. Niz $G=G_o$, G_1, $G_2,\ldots$ je po pretpostavci uniformno omeđen niz otvorenih podskupova u R^n koji imaju ova svojstva:

(GO) Za svaki kompakt K, $K \subset G$ vrijedi lim $\text{cap}_l(K \setminus G_l) = 0.$*

(G1) lim mes $(G_l \setminus \bar{G}) = 0$ (Lebesgueova mjera)

(G2) Skup $S = \overline{\lim}\ \sup\ (\partial G \cap G_l)$ ima svojstvo segmenta, tj. G posjeduje lokalno konačan otvoren pokrivač $\{0_i, i\varepsilon I\}$ i vektore $\{y_i, i\varepsilon I\}$ takve da za sve t, $0<t<1$ vrijedi $x + ty_i \varepsilon G$ za svako $x\varepsilon \bar{G} \cap 0_i$.

Definicija 2.1.5. Pod zatvorenim limesom superiorom nekog niza $S_l \subset R^n$, $\overline{\lim}\ \sup\ S_l$ podrazumijevamo skup svih točaka x iz R^n koje imaju svojstvo da za svaku njihovu otvorenu okolinu U, skup $U \cap G_l$ je neprazan za beskonačno mnogo $l\varepsilon N$.

Varijacijska formulacija problema (I) glasi:

$$\int_{G_l} \nabla\phi_l \nabla w_l^{(k)} dx = \lambda_l^{(k)} \int_{G_l} \phi_l\, w_l^{(k)} dx; \quad l=0,1,2\ldots; \ \phi_l \varepsilon H_o^1(G_l)$$
$$; \ w_l^{(k)} \varepsilon H_o^1(G_l)$$

Stavimo li $E_l = {}_J H_o^1\ (G_l)$, $l=0,1,2\ldots$, tada varijacijska formulacija problema (I) glasi:

$$a_{E_l}(\phi_l, \underline{w}_l^{(k)}) = \overline{\lambda_l^{(k)}\ b_l(\phi_l, \underline{w}_l^{(k)})}, \phi_l \varepsilon E_l, \ \underline{w}_l^{(k)} \varepsilon E_l \text{ i}$$

$\underline{w}_l^{(k)} = J_G^l\, w_l^{(k)}$, $l = 0,1,2,\ldots$. Stummel je u radu [6] 2.2.

---

* *Definiciju kapaciteta vidi u Stummelovu radu [6], str. 125.*

(5) pokazao ovakvu propoziciju:

Propozicija 2.1.6. Neka je $G = G_o, G_1, G_2, \ldots$ uniformno omeđen niz otvorenih podskupva u R^n koji zadovoljavaju uvjete (G0), (G1), (G2). Tada je $\lim\limits_{1\to\infty} {}_J H_o^m(G_1) = {}_J H_o^m(G)$ za sve m, $m\varepsilon N$ i niz $b|_{{}_J H_o^m(G_1)}$ je slabo kolektivno kompaktan.

Primijenimo li sada teorem 2.1.4., to ivdimo da su ispunjene sve pretpostavke (A) do (E) iz paragrafa 1.2 pa iz teorema 1.2.1. zaključujemo na konvergenciju svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora problema (I) kada $1\to\infty$ na svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore problema (I) za 1=0, tj. $\lambda_1^{(k)} \to \lambda_o^{(k)}$, $1\to\infty$, k=1,2,3,...; $w_1^{(k)} \to w_o^{(k)}$ kada $1\to\infty$, k=1,2,...

2.2. Problemi transmisije

Promatramo neke primjere transmisijskih svojstvenih problema, i to konkretno krutih eliptičko-eliptičkih i krutih eliptičko-eliptičkih s rubnim slojem.

<u>Opća shema</u> (vidi [13] i [14]).

Uzmimo da su V, W i H realni, separabilni Hilbertovi prostori takvi da je $V \subset W \subset H$ s gustim i kompaktnim ulaganjima. Norme tih prostora označujemo respektivno sa $\| \ \|_V, \| \ \|_W, \| \ \|_H$. Na V odnosno W zadane su dvije neprekidne seskvilinearne forme a(u,v), tj. b(u,v) takve da vrijedi:

$a(u,u) + \lambda . \|u\|_W^2 \geq \alpha \|u\|_V^2$, $\lambda \geq 0, \alpha > 0$ za svako $u\varepsilon V$;

$b(u,u) \geq 0$ za svako $u\varepsilon W$

Neka je W_o zatvoren potprostor od W definiran sa:

$W_o = \{u\varepsilon W : b(u,v) = 0 \text{ za svako } v\varepsilon W\}$

a W_1 ortogonalni komplement od W_o u W. Neka je $\tilde{W}$ kvocijentni prostor W / W_o snabdjeven s uobičajenom normom kvocijentnog prostora. Sa $\bar{W}_o^H$ i $\bar{W}_1^H$ označavamo zatvarače od W_o i W_1 u H, pretpostavljamo $H = \bar{W}_o^H \dot{+} \bar{W}_1^H$. Neka je $\tilde{H} = H / W_o^H$ s uobičajenom normom kvocijentnog prostora. To je Hilbertov prostor s obzirom na skalarni produkt $(\tilde{u},\tilde{v})_{\sim} = (u-u_H^o, v-v_H^o)$ gdje su u_H^o i v_H^o projekcije od u, tj. v na $\bar{W}_o^H$.

Pretpostavljamo da forma b zadovoljava:

$b(u,u) + \|u^o\|_W^2 \geq \beta \|u\|_W^2$, $\beta>0$, za svako $u\varepsilon W$

pri čemu je u^o projekcija od u na W_o.

Nadalje, na H neka su zadane dvije simetrične, neprekidne seskvilinearne forme c i d takve da je d pozitivna i da vrijedi:

$c(u,u) \geq \gamma \|u\|_H^2$; $d(u,u) + \|u_H^o\|_H^2 \geq \delta \|u\|_H^2$ za sve $u\varepsilon H$, $\gamma \geq \delta > 0$. Još pretpostavljamo da postoji $\alpha(\varepsilon)>0$ takvo da vrijedi:

$\varepsilon c(u,u) + d(u,u) \geq \alpha(\varepsilon)\|u\|_H^2$ za sve $u\varepsilon H$.

Sa A i B označavamo operatore asocirane s formama a(u,v) i b(u,v) po drugom teoremu o reprezentaciji na domenama:

$D(A) = \{v\varepsilon H : Av\varepsilon H\}$; $D(B) = \{v\varepsilon H : Bv\varepsilon H\}$

Neka je zadan $\Phi_1 \varepsilon H$. Sa $\tilde{\Phi}_1$ označvamo klasu od $\tilde{\Phi}_1$ u $\tilde{H}$. Promatrajmo sada ovakve probleme (T zadano, T>0):

Problem I_ε: Naći $u_\varepsilon \varepsilon L^\infty(0,T;V)$ takvo da je $u'_\varepsilon \varepsilon L^\infty(0,T;H)$ i da vrijedi:

$\varepsilon c(u''_\varepsilon(t),v)+d(u''_\varepsilon(t),v)+\varepsilon a(u_\varepsilon(t),v)+b(u_\varepsilon(t),v) = 0$ za svako $v\varepsilon V$.

$u_\varepsilon(0) = 0$, $u'_\varepsilon(0) = \Phi_1$.

Problem I_o: Naći klasu $\tilde{u}\varepsilon L^\infty(0,T;\tilde{W})$ takvu da je $\tilde{u}' \varepsilon L^\infty(0,T;\tilde{H})$ i da vrijedi:

$d(\tilde{u}''(t),\tilde{v}) + b(\tilde{u}(t),\tilde{v}) = 0$ za svako $\tilde{v}\varepsilon\tilde{W}$

$\tilde{u}(0) = 0 \ , \ \tilde{u}'(0) = \tilde{\Phi}_1$

Propozicija 2.2.1. Ako je u_ε rješenje problema I_ε, a $\tilde{u}$ rješenje problema I_o, onda vrijedi:

$\tilde{u}_\varepsilon \to \tilde{u}$ u $L^\infty(0,T;\tilde{W})$ * - slabo

$\tilde{u}'_\varepsilon \to \tilde{u}'$ u $L^\infty(0,T;\tilde{H})$ * - slabo.

Neka je sada A_ε linearni operator (općenito neograničen) na H asociran s formom $\varepsilon a(u,v) + b(u,v)$ kada je H snabdjeven s normom induciranom skalarnim produktom $(u,v)_{H_\varepsilon} = \varepsilon c(u,v) + d(u,v)$, a $\tilde{A}_o$ linearni operator (općenito neograničen) asociran s formom $b(\tilde{u},\tilde{v})$ na $\tilde{H}$ kada je $\tilde{H}$ snabdjeven s normom induciranom skalarnim produktom $(\tilde{u},\tilde{v})_{\tilde{H}} = d(u - \overset{o}{u}_H, v - \overset{o}{v}_H)$.

Neka je $\tilde{H}_\varepsilon$ kvocijentni prostor $H_\varepsilon / \overline{W}^H_o$ s uobičajenom normom kvocijentnog prostora. Sa $E(\lambda,A_\varepsilon)$ (tj. $\tilde{E}(\lambda,\tilde{A}_o)$) označavamo dekompoziciju jedinice hermitskog operatora A_ε(tj. $\tilde{A}_o$) na Hilbertovom prostoru H (odnosno $\tilde{H}$). Sa $\zeta<0,\infty>$ označit ćemo prostor brzo opadajućih funkcija $<0,\infty>$, a sa $\zeta'<0,\infty>$ njegov dual - prostor temperiranih distribucija (podrobnije o tim prostorima vidi u knjizi [15]).

Teorem 2.2.2. Ako A_ε i A_o imaju kompaktnu rezolventu, tada u svakoj okolini svojstvene vrijednosti od $\tilde{A}_o$ (kažimo λ^j_o) postoji barem jedna svojstvena vrijednost od A_ε, kažimo λ^j_ε za ε dovoljno maleno.

Skica dokaza: Po propoziciji 2.2.1. (s time da se u problemu I_ε uzme $\Phi_1 = \Phi$) imamo $\tilde{u}'_\varepsilon \to \tilde{u}'$ u $L^\infty(0,T;\tilde{H})$ *-slabo. Znači: $(\tilde{u}'_\varepsilon, \tilde{v})_{\tilde{H}_\varepsilon} \to (\tilde{u}', \tilde{v})_{\tilde{H}}$ *-slabo u $L^\infty(0,T)$, pa i u topologiji temperiranih distribucija $\zeta'<0,T>$ jer je ona slabija od *-slabe topologije. No Fourierova transformacija je neprekidna u topologiji temperiranih distribucija pa zato:

$$\mathcal{F}(\tilde{u}_\varepsilon(t),\tilde{v})_{\tilde{H}_\varepsilon} \to \mathcal{F}(\tilde{u}'(t),\ \tilde{v})_{\tilde{H}_1} \text{ u } \zeta' \langle 0,\infty\rangle \text{ za sve } \tilde{v}\in\tilde{H}.$$

No, kako je $\tilde{u}'_\varepsilon(t) = \cos\ (\tilde{A}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\ t)\Phi$ i $\tilde{u}'(t) = \cos\ (\tilde{A}_o^{\frac{1}{2}}\ t)\Phi$, to iz svojstva Fourierove transformacije lako slijedi:

$$\mathcal{F}(\tilde{u}'_\varepsilon(t),\ \tilde{v}(_{\tilde{H}_\varepsilon} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \frac{d}{d\lambda}(E(A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\lambda),\Phi v)_{\tilde{H}_\varepsilon}$$

Zbog kompaktnosti ulaganja V u W, odnosno W u H vrijedi:

$$\mathcal{F}\tilde{u}'_\varepsilon(t),\ \tilde{v})_{\tilde{H}_\varepsilon} = \sum_{j=1}^{\infty} (\tilde{\Phi},\tilde{w}_\varepsilon^j)_{\tilde{H}_\varepsilon} (\tilde{w}_\varepsilon^j,\ \tilde{v})_{\tilde{H}_\varepsilon}\ \delta(\lambda - \alpha_\varepsilon^j)$$

$$\mathcal{F}\tilde{u}'(t),\ \tilde{v})_{\tilde{H}} = \sum_{j=1}^{\infty} (\tilde{\Phi},\ \tilde{w}_o^j)_{\tilde{H}} (\tilde{w}_o^j)\ \tilde{v})_{\tilde{H}}\ \delta(\lambda - \alpha_o^j)$$

pri čemu je:

$\alpha_\varepsilon^j = \sqrt{\lambda_\varepsilon^j},\ \alpha_o^j = \sqrt{\lambda_o^j}$; sa w_ε^j označili smo svojstveni vektor od $\tilde{A}_\varepsilon$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_ε^j, a sa w_o^j svojstveni vektor od $\tilde{A}_o$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_o^j.

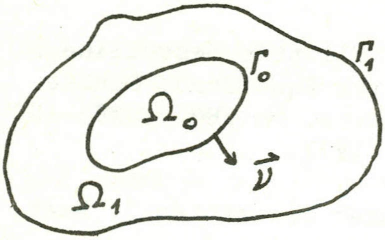
Odatle:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\tilde{\Phi},\ \tilde{w}_\varepsilon^j)_{\tilde{H}_\varepsilon} (\tilde{w}_\varepsilon^j,\ \tilde{v})_{\tilde{H}_\varepsilon}\ \delta(\lambda - \alpha_\varepsilon^j) \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} (\tilde{\phi},\ \tilde{w}_o^j)_{\tilde{H}} (\tilde{w}_o^j,\ v)_{\tilde{H}}\delta(\lambda - \alpha_o^j)$$

u $\zeta' \langle 0,\infty\rangle$ za svako $\tilde{v}\in\tilde{H}$.

Primijenimo li lijevu i desnu stranu na test funkciju iz $\zeta\langle 0,\infty\rangle$ koja ima nosač u okolini od λ_o^j, a drugdje je nula, to odmah izlazi tvrdnja teorema.

Primjer 2.2.3. Neka su Ω_o, $\Omega_1 \subseteq R^n$ otvoreni omeđeni skupovi kako je prikazano na slici:



$\Omega_o \cup \Omega_1 = \Omega$, $\Gamma_o = \partial\Omega_o$

$\partial\Omega_1 = \Gamma_o \cup \Gamma_1$

$\vec{\nu}$ - smjer vanjske normale na $\partial\Omega_o$.

Pretpostavimo da Ω, Ω_o i Ω_1 imaju svojstvo segmenta. Razmotrimo ovaj transmisijski problem:

$$
(P_\varepsilon)\qquad
\begin{aligned}
&-\Delta u_\varepsilon^{(1)} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^{(1)} \quad u\ \Omega_1\\
&-\varepsilon\Delta u_\varepsilon^{(0)} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^{(0)} \quad u\ \Omega_0\\
&u_\varepsilon^{(1)} = 0 \text{ na } \Gamma_1,\ u_\varepsilon^{(0)} = u_\varepsilon^{(1)},\ \frac{\partial u_\varepsilon^{(1)}}{\partial\nu} = \varepsilon\,.\,\frac{\partial u_\varepsilon^{(0)}}{\partial\nu} \text{ na } \Gamma_o
\end{aligned}
$$

Stavimo li $V = W = H_o^1(\Omega)$ i $H = L^2(\Omega)$ i izaberemo

$a(u\ ,\ v) = \int_{\Omega_o} \nabla u\ .\ \nabla v\ dx$; $b(u\ ,\ v) = \int_{\Omega_1} \nabla u\ .\ \nabla v\ dx$

$c(u\ ,\ v) = 0$; $d(u\ ,\ v) = \int_\Omega u\ .\ v\ dx$

imamo $W_o = \{u \in H_o^1(\Omega)\ :\ u_{\Omega_1} \equiv 0\}$, dok nulti svojstveni problem glasi:

$$
(P_o)\qquad
\begin{aligned}
&-\Delta u_1 = \lambda u_1 \quad u\ \Omega_1\\
&\partial u_1|_{\Gamma_1} = 0\\
&\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_o} = 0
\end{aligned}
$$

Po teoremu 2.2.2. svaka svojstvena vrijednost problema (P_o) gomilište je svojstvenih vrijednosti problema (P_ε) (kompaktnost rezolventi slijedi iz kompaktnosti ulaganja $H_o^1(\Omega)$ u $L^2(\Omega)$ što je zapravo Rellichov teorem).

LITERATURA

[1] Kato T. Teorija razmuščenij linejnyh operatorov, Mir,Moskva, 1972.

[2] Stummel F. Singular Perturbations of Elliptic Sesquilinear Forms, Proc. Conference on Differential Equations, Dundee, March 1972, Lecture Notes in Mathematics, No 280, p.155-180, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1972.

[3] Stummel F. Diskrete Konvergenz linearer Operatoren I, Math. Annalen 190, s. 45-92 (1970)

[4] Stummel F., Diskrete Konvergenz linearer Operatoren II, Math. Zeitschrifte, 120, s. 231-264 (1971)

[5] Stummel F., Diskrete Konvergenz linearer Operatoren III, Proceedings of the Conference in Oberwolfach, August 1971, s.196-216

[6] Stummel F., Perturbations of domains in elliptic boundary value problems, Lecture Notes in Mathematics, No 503, p. 110-136, Springer-Verlag, Berlin 1976.

[7] Stummel F., Perturbation Theory for Sobolev Spaces, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 73A, 1, 1974/1975, p. 5.49.

[8] Agmon S., Lectures On Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1965.

[9] Greenlee W.M., Stability Theorems for singular Perturbation of Eigenvalues, Manuscripta mathematica, 34, p. 157--174 (1981)

[10] Greenlee W.M., Rate of convergence in singular perturbations, Ann. Inst. Fourier, Grenoble,18, 2, (1986), p.135-191.

[11] Greenlee W.M., Singular Perturbation of Eigenvalues of semibounded Operators, Seminaires IRIA, analyse et controle de systemes, IRIA. Laboria, Recquencourt, France, 1978, p. 17-78.

[12] Eckhaus W., Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations, North-Holland Mathematics Studies 6, Amsterdam, 1973.

[13] Lobo-Hidalgo M., Sanchez-Manes E., On a class of singular perturbations with non-coercive limit problems, Boll. Umi 6,I-B (1982), p.171-185.

[14] Lobo-Hidalgo M., Sanchez-Palencia E., Sur certaines proprietes spectrales des perturbations du domaine, Comm. Part. Diff. Eq. 4 (10), 1979, p.1085-1098.

[15] Schwartz L., Theorie des distributions tome I, tome II.

Lončar P.

S U M M A R Y

In this paper we deal with singular perturbations of eigenvalues from a few points of view: perturbation of elliptic operator lower order by elliptic operator higher order (Dirichlet's problem), perturbations of domains in elliptic boundary value problems and finally eigenvalue transmission problems.

In the first chapter we study Stummel's theory which can be well applied to these problems and which ensures convergency of eigenvalues. We also give estimates for rate of convergence in singular perturbations which were given by Greenlee. The first one are based on quadratic interpolation, and the others on Rayleigh's quotient.

The second chapter is devoted to eigenvalue problem for perturbations of domains and for singularly perturbed transmission problems. We follow Brezis's method which is based on studying the associated hyperbolic problem. Rate of convergence is still an open problem.