Mr Božidar Balog
Fakultet organizacije i informatike
V a r a ž d i n

UDK: 517.1
Znanstveni rad

QUINOVA METODA ZA ODREDJIVANJE MINIMALNE DISJUNKTIVNE FORME

U radu se obradjuje jedna metoda za odredjivanje minimalnih disjunktivnih formi (DF). Polazi se od kanonske disjunktivne normalne forme (KDNF) Booleove algebre koja se Quinovom metodom prevodi u minimalnu DF. Autor je najprije objasnio sve pojmove i teoreme pomoću kojih postavlja algoritam za minimizaciju. Nastojao je da taj postupak prikaže što preglednije i dosta je prostora posvetio samom objašnjenju postupka. U posljednjem primjeru autor je Quinovu metodu povezao s Veitchovom metodom kako bi pokazao da obje metode daju isti rezultat.

UVOD

U ovom radu obradit ću jednu metodu transformiranja kanonske disjunktivne normalne forme (KDNF) u minimalnu disjunktivnu formu (DF).

Želim odmah napomenuti, kada ovdje govorimo o minimizaciji KDNF, da nećemo nastojati da zadanu formu napišemo u najkraćem obliku (pomoću najmanjeg broja simbola), već ćemo je pokušati dati u što kraćem obliku, a da pri tome ona bude napisana u obliku disjunktivne forme. Tako dobivena DF mogla bi se u nekim slučajevima i dalje skratiti (izlučivanjem na osnovi zakona distribucije ili upotrebom nekih drugih transformacija). U tom slučaju to više ne bi bila DF, pa to naknadno skraćivanje ne ulazi u okvir ovog članka.

Polazimo od Booleove algebre, tj. od skupa

$$L_2 = \{0,1\}$$

na kojem smo definirali tri elementarne operacije:

disjunkcija	$a + b$
konjunkcija	ab
negacija	$\bar{a}$

U literaturi postoje i drugi načini označavanja tih elementarnih operacija no mi ćemo se služiti ovim načinom.

U Boolevoj algebri postoje još i druge operacije (implikacija, ekvivalencija i sl.), no one se sve mogu prikazati pomoću gornjih elementarnih operacija pa o njima nećemo dalje govoriti.

Budući da se svaka Booleova funkcija može prikazati u obliku KDNF, to ćemo morati nešto detaljnije reći o disjunktivnim formama te o prijelazu na minimalne disjunktivne forme.

DISJUNKTIVNE FORME

Definicija 1. Zadane su varijable

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in L_2$$

čije vrijednosti mogu biti 0 ili 1.

Elementarna konjunkcija K_i je svaka konjunkcija od proizvoljnog broja varijabli ili njihovih negacija tako da se neka varijabla može pojaviti najviše jednom: bilo kao varijabla x_i bilo kao njena negacija $\bar{x}_i$.

Svaka varijabla ili njena negacija takodjer je elementarna konjunkcija.

Primjer: Zadane su varijable: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$:

$K_1 = x_1\bar{x}_2x_5$
$K_2 = x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$K_3 = x_1x_2x_3x_5\bar{x}_5$
$K_4 = \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6$
$K_5 = x_3$

Ovo su sve elementarne konjunkcije za gornje varijable.

Napomena: $x_1x_2x_3\bar{x}_2\bar{x}_4$ nije elementarna konjunkcija jer se varijabla pojavljuje dva puta: kao x_2 i kao njena negacija $\bar{x}_2$.

Budući da je

$$x\bar{x} = 0,$$

to i gornja konjunkcija ima vrijednost 0.

Definicija 2. Rang elementarne konjunkcije je broj varijabli u toj konjunkciji.

Primjer: $x_2\bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5$ je elementarna konjunkcija ranga 4 (četvrtog ranga) ili konjunkcija od četiri elementa.

U slučaju da je rang konjunkcije nula, tada ćemo reći da je konjunkcija prazna te ćemo uzeti da ima vrijednost 1.

Definicija 3. Zadane su varijable

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

i elementarne konjunkcije tih varijabli

$$K_1, K_2, K_3, \dots, K_r.$$

Booleov izraz oblika

$$K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_r$$

zove se disjunktivna forma (DF).

Primjer: Zadane su varijable x_1, x_2, x_3, x_4.

Izraz

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2\bar{x}_3 + x_2x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1$$

je disjunktivna forma za gornje varijable.

Definicija 4. Zadane su varijable

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

Kanonska konjunkcija je ona elementarna konjunkcija kod koje su zastupljene sve varijable ili njihove negacije, i to svaka varijabla (ili njena negacija) samo jednom.

Primjer: Zadane su varijable x_1, x_2, x_3, x_4.

Konjunkcije: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$

$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$

$x_1x_2\bar{x}_3x_4$

su kanonske konjunkcije za gornje varijable.

Konjunkcija $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ nije kanonska konjunkcija jer ne sadrži varijablu x_4.

Napomena: Konjunkcija $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

je kanonska konjunkcija za varijable x_1, x_2, x_3, x_4, ali nije kanonska konjunkcija za varijable x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Definicija 5. Kanonska disjunktivna normalna forma (KDNF) je ona disjunktivna forma kod koje su sve elementarne konjunkcije ujedno i kanonske konjunkcije.

Primjer: Zadane su varijable x,y,z.

Izraz: $F(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + xy\bar{z}$

je KDNF. Svaka konjunkcija u toj formi ujedno je i kanonska konjunkcija.

Napomena: Svaki Booleov izraz može se napisati u obliku KDNF. O tome će biti govora i kasnije.

Za bolje snalaženje kod kanonskih konjunkcija uvest ćemo odredjeni redoslijed njihovog pisanja.

Definirat ćemo u Boolevoj algebri funkciju x^α na slijedeći način:

$$x^\alpha = \begin{cases} \bar{x} \text{ za } \alpha = 0 \\ x \text{ za } \alpha = 1 \end{cases}$$

Tako npr. konjunkciju $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_4$ možemo pisati u obliku

$$x_1^0x_2^0x_3^1x_4^0x_5^1 \quad .$$

Eksponenti te funkcije x^α čine znamenke jednog broja pisanog u sustavu s bazom 2. Za gornju konjunkciju bit će:

$$(00101)_2 = 5$$

Broj 5 je indeks gornje kanonske konjunkcije. Na taj način ćemo pisati:

$$K_5 = x_1^0x_2^0x_3^1x_4^0x_5^1 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_5$$

Primjer: Za varijable $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ kanonska konjunkcija K_9 bila bi:

$$9 = (001001)_2$$

$$K_9 = x_1^0x_2^0x_3^1x_4^0x_5^0x_6^1 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_6$$

IMPLIKATNE BOOLEOVE FUNKCIJE

Definicija 6. Zadane su dvije Booleove funkcije

$$f(x_1,x_2, \dots ,x_n)$$
$$g(x_1,x_2 , \dots ,x_n)$$

istih varijabli.
Kažemo da Booleova funkcija g implicira Booleovu funkciju f tada kad funkcija f poprimi vrijednost 1 za svaku uredjenu n-torku brojeva 0,1

$$(\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_n) \in L_2^n$$

za koju i funkcija g ima vrijednost 1. Simbolički pišemo:

$$g \leq f$$

tj. "funkcija g implicira funkciju f".

Dvije funkcijef i g su jednake tada i samo tada,ako su ispunjeni uvjeti:

$$\left.\begin{array}{l} f \leq g \\ g \leq f \end{array}\right\} \Leftrightarrow f = g$$

Primjer: Na tabeli su prikazane dvije funkcije f i g s tri varijable.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	$g(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Za uredjene trojke (0,1,0), (0,11), (1,1,1) funkcija f ima vrijednost 1. Za te iste trojke i funkcija g ima vrijednost 1. Budući da funkcija g ima vrijednost 1 i za neke druge trojke((0,0,1), (1,01,)), to funkcija f implicira funkciju g, tj.

$$f \leq g.$$

U tom slučaju kažemo da je funkcija f implikanta funkcije g.

Neka funkcija može imati više implikanti - tada govorimo o skupu implikanti.

Primjer: Tabelarno su zadane funkcije f_1, f_2, f_3, f_4 varijabli x_1, x_2, x_3.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Iz tabelarnog prikaza gornjih funkcija lako uočimo da je:

$$f_1 \leq f_4$$
$$f_2 \leq f_4$$
$$f_3 \leq f_4$$

Funkcije f_1, f_2, f_3 su implikante funkcije f_4 i čine skup implikanti funkcije f_4.

$$S_{f_4} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

<u>Definicija 7.</u> Zadana je neka funkcija

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

i skup njenih implikanti

$$S_f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$$

Reći ćemo da je taj skup implikanti potpun (potpun sustav implikanti) ako za svaku uredjenu n-torku brojeva 0 ili 1, tj.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in L_2^n$$

za koju funkcija f ima vrijednost 1 postoji barem jedna implikanta $f_i \in S_f$ koja takodjer poprima vrijednost 1.

U našem primjeru skup implikanti

$$S_{f_4} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

je potpun skup implikanti funkcije f_4.

Medjutim, i skup implikanti $\{f_2, f_3\}$ takodjer je potpun skup implikanti, dok skup $\{f_1, f_2\}$ nije potpun.

Naime: $f_1(1,0,1) = 0$

$f_2(1,0,1) = 0$

dok $f_4(1,0,1) = 1$.

Definicija 8. Za neku konjunkciju K kažemo da je prosta (jednostavna) implikanta funkcije f tada ako ona implicira funkciju f te ako svaka druga konjunkcija koja nastaje izbacivanjem (brisanjem) jednog ili više slova (varijabli) iz zadane konjunkcije K ne implicira funkciju f.

Napomena: Ako neku funkciju $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prikažemo u obliku KDNF, tada svaka kanonska konjunkcija K_i iz te KDNF je implikanta zadane funkcije.

Primjer: $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3$

$K_o = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ je implikanta funkcije f. Slično je i za druge konjunkcije.

Zadana je neka funkcija $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Neka je konjunkcija

$$K = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$$

njena implikanta. Ta implikanta je prosta (jednostavna) implikanta tada ako konjunkcije

$$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4,\ x_1\bar{x}_3x_4,\ x_1\bar{x}_2x_4,\ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

koje su nastale izbacivanjem po jedne varijable, nisu implikante funkcije f.

Teorem 1. Skup svih prostih implikanti neke funkcije f je potpun skup implikanti.

Ovaj teorem nećemo dokazivati, već ćemo ga provjeriti kod mimimizacije KDNF.

Radi lakšeg snalaženja u daljnjem radu uvest ćemo neke oznake:

$\mathcal{F}$ - oznaka za disjunktivnu formu (DF)
$S(\mathcal{F})$ - broj slova u DF
$K(\mathcal{F})$ - broj konjunkcija u DF.

Definicija 9. Zadana je neka Booleova funkcija

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Za disjunktivnu formu $\mathcal{F}_1$ kažemo da je jednostavnija (prostija) od disjunktivne forme $\mathcal{F}_2$ ako su istovremeno ispunjeni slijedeći uvjeti:

$$S(\mathcal{F}_1) \leq S(\mathcal{F}_2)$$
$$K(\mathcal{F}_1) \leq S(\mathcal{F}_2)$$

tj. prva forma $\mathcal{F}_1$ ima manji (ili jednak) i broj slova i broj konjunkcija.

Napomena: Budući da su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ disjunktivne forme od f, to će biti:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= f \\ \mathcal{F}_2 &= f \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$$

Primjer: $\mathcal{F}_1 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 +$
$+ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

$$\mathcal{F}_2 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

Pri tome je:

$$S(\mathcal{F}_1) = 20 \qquad S(\mathcal{F}_2) = 10$$
$$K(\mathcal{F}_1) = 5 \qquad S(\mathcal{F}_2) = 3$$

Budući da je: $S(\mathcal{F}_2) < S(\mathcal{F}_1)$
$K(\mathcal{F}_2) < K(\mathcal{F}_1)$,

to je DF $\mathcal{F}_2$ jednostavnija od DF $\mathcal{F}_1$.

Definicija 10. Zadana je Booleova funkcija

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Za neku DF $\mathcal{F}$ funkcije f reći ćemo da je minimalna disjunktivna forma funkcije f tada, i samo tada, ako je $\mathcal{F}$ ekvivalentno s funkcijom f i ako nijedna DF prostija od $\mathcal{F}$ nije ekvivalentna s funkcijom f.

Teorem 2. Bilo koja mimimimalna DF $\mathcal{F}$ neke Booleove funkcije $f(x_1,x_2, \dots ,x_n)$ je disjunkcija jednostavnih (prostih) implikanti funkcije f.

Napomena: Može se dogoditi da neka funkcija ima dvije ili više minimalnih DF - u tom slučaju ne smije nijedna od njih biti jednostavnija od bilo koje minimalne DF.

Primjer: $f(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 +$

$$+ \bar{x}_1x_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$$

Ova funkcija ima dvije minimalne DF:

$$\mathcal{F}_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1\bar{x}_3 + x_2x_3$$

$$\mathcal{F}_2 = \bar{x}_1x_3 + x_1x_2 + \bar{x}_2\bar{x}_3$$

Budući da je: $S(\mathcal{F}_1) = S(\mathcal{F}_2) = 6$

$K(\mathcal{F}_1) = K(\mathcal{F}_2) = 3$

to nijedna od gornjih formi nije prostija od druge, pa su obje forme $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ minimalne DF zadane funkcije $f(x_1,x_2,x_3)$.

Kada se govori o jednakosti Booleovih funkcija f_1 i f_2, tada se misli na to da obje funkcije imaju iste vrijednosti (0 ili 1) za iste vrijednosti zadanih varijabli.

U gornjem slučaju $\mathcal{F}_1 = f$

$\mathcal{F}_2 = f$

Ako je npr. $f(1,0,1) = 1$, tada mora biti:

$$\mathcal{F}_1(1,0,1) = 1$$
$$\mathcal{F}_2(1,0,1) = 1.$$

Ovo mora vrijediti za bilo koji izbor vrijednosti varijabli.

Gornji teorem 2. je osnova algoritma za odredjivanje minimalnih DF neke zadane Booleove funkcije.

Za odredjivanje prostih implikanti služit ćemo se identitetom:

$$\boxed{Kx + \bar{K}x = K} \qquad (1)$$

Pri tome: $x \notin K$

$\bar{x} \notin K$

Primjer: $(x_1\bar{x}_2x_3)x_4 + (x_1\bar{x}_2x_3)\bar{x}_4 = x_1\bar{x}_2x_3$

Primjenom funkcije x^{α} identitet (1) možemo pisati u obliku:

$$\boxed{Kx^{0} + Kx^{1} = K} \qquad (2)$$

QUINOV ALGORITAM ZA ODREDJIVANJE MINIMALNE DISJUNKTIVNE FORME

Algoritam za odredjivanje minimalne DF objasnit ćemo najlakše na jednom primjeru.

Primjer: Zadana je neka funkcija (Booleova) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ u obliku KDNF

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 +$$

$$+ x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

Pomoću funkcije x^{α} možemo zadanu funkciju pisati u obliku:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^0x_2^0x_3^0x_4^0 + x_1^1x_2^0x_3^0x_4^0 + x_1^1x_2^1x_3^0x_4^0 + x_1^1x_2^1x_3^0x_4^1 +$$

$$+ x_1^1x_2^1x_3^1x_4^0 + x_1^1x_2^1x_3^1x_4^1$$

1. Nacrtamo tablicu na slijedeći način:
U prvom redu napišemo oznaku konjunkcije C_i - ovdje indeks i nije redni broj te konjunkcije u nizu kanonskih konjunkcija (K_i), već i će značiti redni broj konjunkcija onako kako one dolaze u našoj obradi. To znači da C_i može imati rang 4, 3, 2 ili 1.

2. U drugi redak zaglavlja, ispod C_i, ispišemo nizove eksponenata koji pripadaju odredjenoj konjunkciji. Na taj način ćemo pojednostavniti daljnji postupak.

Tako npr. za konjunkciju

$$C_3 = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 = x_1^1 x_2^1 x_3^0 x_4^0$$

pišemo niz 1100.

3. Od dvije konjunkcije ranga četiri možemo na osnovi identiteta (1) odnosno (2) dobiti jednu konjunkciju ranga tri. Na taj način vezujemo, ako je moguće, bilo koje dvije konjunkcije ranga 4. Konjunkcije na taj način vezujemo precrtano kosom crtom.

4. U prvi stupac pišemo oznaku nove konjunkcije (npr. C_7), dok u drugi stupac pišemo na koji je način dobivena ta konjunkcija (npr. $C_1 + C_1$).

						$\cancel{C}_1$	$\cancel{C}_2$	$\cancel{C}_3$	$\cancel{C}_4$	$\cancel{C}_5$	$\cancel{C}_6$
C_e	$C_i + C_k$	x_1	x_2	x_3	x_4	0000	1000	1100	1101	1110	1111
C_7	$C_1 + C_2$	-	0	0	0						
C_8	$C_2 + C_3$	1	-	0	0						
$\cancel{C_9}$	$C_3 + C_4$	1	1	0	-						
$\cancel{C_{10}}$	$C_3 + C_5$	1	1	-	0						
$\cancel{C_{11}}$	$C_4 + C_6$	1	1	-	1						
$\cancel{C_{12}}$	$C_5 + C_6$	1	1	1	-						
C_{13}	$C_9 + C_{12}$	1	1	-	-						
C_{14}	$C_{10} + C_{11}$	1	1	-	-						

5. U slijedeća četiri stupca pišemo vrijednosti eksponenata 0 ili 1 za tu novu konjunkciju. Na mjesto varijable koja nije zastupljena u toj novoj konjunkciji stavljamo crticu.

5. Polja (konjunkcije) koja su sudjelovala u toj disjunkciji označimo kosom crtom.

Primjer: $C_7 = C_1 + C_2 = x_1^0x_2^0x_3^0x_4^0 + x_1^1x_2^0x_3^0x_4^0 = x_2^0x_3^0x_4^0$

U prvi stupac upišemo C_7, u drugi stupac $C_1 + C_2$. U slijedeća četiri stupca upišemo niz:

" - 0 0 0 "

Precrtamo zatim kosom crtom polja koja su pridružena konjunkcijama C_1 i C_2.

Na sličan način dobijemo konjunkcije C_8, C_9, C_{10}, C_{11} i C_{12}.

7. Kada smo izvršili sva moguća povezivanja disjunkcijom po dvije konjunkcije ranga 4, preći ćemo na slično povezivanje (i to sva moguća povezivanja!) po dvije konjunkcije ranga 3 da bismo dobili konjunkcije ranga dva.

Precrtamo konjunkcije koje su uzete u obzir te precrtamo sva polja koja su bila precrtana u te dvije konjunkcije ranga tri.

U našem slučaju možemo povezivati samo konjunkcije C_9 i C_{12} te C_{10} i C_{11}. Konjunkcije koje smo obuhvatili daju:

$$C_9 + C_{12} = x_1^1x_2^1x_3^0 + x_1^1x_2^1x_3^1 = x_1^1x_2^1$$

$$C_{10} + C_{11} = x_1^1x_2^1x_4^0 + x_1^1x_2^1x_4^1 = x_1^1x_2^1$$

Vidljivo je da smo dobili jednu te istu konjunkciju ranga 2. Ovo se dogadja češće. Precrtali smo konjunkcije C_9, C_{10}, C_{11} i C_{12}.

8. Budući da više ne možemo povezivati po dvije konjunkcije da bismo dobili jednu konjunkciju nižeg ranga, naš postupak u svrhu skraćivanja je završen. U prvom stupcu nisu precrtane slijedeće konjunkcije:

$$C_7,\ C_8,\ C_{13} = C_{14}$$

To su jednostavne (proste) implikante zadane funkcije f i one ulaze u minimalnu DF (ali ne moraju baš sve!)

9. Ako se neka od zadanih konjunkcija ranga 4 nalazi samo jednom u gore navedenim jednostavnim implikantama (C_7, C_8, C_{13}), tada se ta implikanta zove esencijalna jednostavna implikanta i ona mora ući u minimalnu DF.

U našem primjeru to je implikanta (konjunkcija) C_1 pa ćemo je označiti $\boxtimes$.

Budući da tu konjunkciju sadrži implikanta C_7, to je ona esencijalna jednostavna implikanta i ulazi u minimalnu DF. Polja od C_7 iscrtamo okomitim crticama - C_7 sadrži C_1 i C_2.

10. U minimalnoj DF moraju biti sadržane sve konjunkcije C_i ranga 4. Iz tablice je vidljivo da još trebamo uzeti konjunkciju C_{13} pa da sva polja budu pokrivena, odnosno zastupljene sve konjunkcije ranga 4. Za to i polja od C_{13} iscrtkamo okomitim crticama.

Prema tome, minimalna DF zadane funkcije f bit će:

$$\mathcal{F} = C_7 + C_{13}$$

odnosno

$$\mathcal{F} = x_2^0 x_3^0 x_4^0 + x_1^1 x_2^1$$

Konačno:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2$$

Na ovaj način zadana je funkcija zapisana u obliku minimalne DF.

Napomena: Jednostavnu implikantu C_8 nismo uzeli u obzir jer se konjunkcije C_2 i C_3, od kojih je ona nastala, nalaze u konjunkcijama C_7 i C_{13}.

Neke minimalne DF mogli bismo još i dalje skratiti (izlučivanjem faktora i sl.), ali to ne ulazi u okvir ovog rada.

Riješit ćemo još jedan zadatak u kojem je zadana KDNF s pet varijabli.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = K_5 + K_6 + K_7 + K_{13} + K_{14} + K_{15} + K_{20} + K_{21} + K_{23} + K_{28} + K_{29} + K_{31}$$

Funkcija je napisana kao KDNF u standardnom obliku pisanja elementarnih kanonskih konjunkcija.

$$5 = 00101 \quad K_5 = x_1^0 x_2^0 x_3^1 x_4^0 x_5^1 = C_1$$
$$6 = 00110 \quad K_6 = x_1^0 x_2^0 x_3^1 x_4^1 x_5^0 = C_2$$

$7 = 00111 \quad K_7 = x_1^0 x_2^0 x_3^1 x_4^1 x_5^1 = c_3$

$13 = 01101 \quad K_{13} = x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^0 x_5^1 = c_4$

$14 = 01110 \quad K_{14} = x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^1 x_5^0 = c_5$

$15 = 01111 \quad K_{15} = x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^1 x_5^1 = c_6$

$20 = 10100 \quad K_{20} = x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^0 x_5^0 = c_7$

$21 = 10101 \quad K_{21} = x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^0 x_5^1 = c_8$

$23 = 10111 \quad K_{23} = x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^1 x_5^1 = c_9$

$28 = 11100 \quad K_{28} = x_1^1 x_2^1 x_3^1 x_4^0 x_5^0 = c_{10}$

$29 = 11101 \quad K_{29} = x_1^1 x_2^1 x_3^1 x_4^0 x_5^1 = c_{11}$

$31 = 11111 \quad K_{31} = x_1^1 x_2^1 x_3^1 x_4^1 x_5^1 = c_{12}$

Načinimo tablicu na način kako smo to objasnili u predjašnjem primjeru i ispunjavamo je na prije opisan način.

C_l	$C_i + C_k$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	C_1 00101	C_2 00110	C_3 00111	C_4 01101	C_5 01110	C_6 01111	C_7 10100	C_8 10101	C_9 10111	C_{10} 11100	C_{11} 11101	C_{12} 11111
$\cancel{C_{13}}$	$C_1 + C_3$	0	0	1	–	1	/		/									
$\cancel{C_{14}}$	$C_1 + C_4$	0	–	1	0	1	/			/								
$\cancel{C_{15}}$	$C_1 + C_8$	–	0	1	0	1	/							/				
$\cancel{C_{16}}$	$C_2 + C_3$	0	0	1	1	–		/	/									
$\cancel{C_{17}}$	$C_2 + C_5$	0	–	1	1	0		/			/							
$\cancel{C_{18}}$	$C_3 + C_6$	0	–	1	1	1			/			/						
$\cancel{C_{19}}$	$C_3 + C_9$	–	0	1	1	1			/						/			
$\cancel{C_{20}}$	$C_4 + C_6$	0	1	1	–	1				/		/						
$\cancel{C_{21}}$	$C_4 + C_{11}$	–	1	1	0	1				/							/	
$\cancel{C_{22}}$	$C_5 + C_6$	0	1	1	1	–					/	/						
$\cancel{C_{23}}$	$C_6 + C_{12}$	–	1	1	1	1						/						/
$\cancel{C_{24}}$	$C_7 + C_8$	1	0	1	0	–							/	/				
$\cancel{C_{25}}$	$C_7 + C_{10}$	1	–	1	0	0							/			/		
$\cancel{C_{26}}$	$C_8 + C_9$	1	0	1	–	1								/	/			
$\cancel{C_{27}}$	$C_8 + C_{11}$	1	–	1	0	1								/			/	
$\cancel{C_{28}}$	$C_9 + C_{12}$	1	–	1	1	1									/			/
$\cancel{C_{29}}$	$C_{10} + C_{11}$	1	1	1	0	–										/	/	
$\cancel{C_{30}}$	$C_{11} + C_{12}$	1	1	1	–	1											/	/
$\cancel{C_{31}}$	$C_{13} + C_{20}$	0	–	1	–	1	/		/	/		/						
$\cancel{C_{32}}$	$C_{13} + C_{26}$	–	0	1	–	1	/		/					/	/			
$\cancel{C_{33}}$	$C_{14} + C_{18}$	0	–	1	–	1	/		/	/		/						
$\cancel{C_{34}}$	$C_{14} + C_{27}$	–	–	1	0	1	/			/				/			/	
$\cancel{C_{35}}$	$C_{15} + C_{19}$	–	0	1	–	1	/		/					/	/			
$\cancel{C_{36}}$	$C_{15} + C_{21}$	–	–	1	0	1	/			/				/			/	
$\cancel{C_{37}}$	$C_{16} + C_{22}$	0	–	1	1	–		/	/		/	/						
$\cancel{C_{38}}$	$C_{17} + C_{18}$	0	–	1	1	–		/	/		/	/						
$\cancel{C_{39}}$	$C_{18} + C_{28}$	–	–	1	1	1			/			/			/			/
$\cancel{C_{40}}$	$C_{19} + C_{23}$	–	–	1	1	1			/			/			/			/
$\cancel{C_{41}}$	$C_{20} + C_{30}$	–	1	1	–	1				/		/					/	/
$\cancel{C_{42}}$	$C_{21} + C_{23}$	–	1	1	–	1				/		/					/	/
$\cancel{C_{43}}$	$C_{24} + C_{29}$	1	–	1	0	–							/	/		/	/	
$\cancel{C_{44}}$	$C_{25} + C_{27}$	1	–	1	0	–							/	/		/	/	
$\cancel{C_{45}}$	$C_{26} + C_{30}$	1	–	1	–	1								/	/		/	/
$\cancel{C_{46}}$	$C_{27} + C_{28}$	1	–	1	–	1								/	/		/	/
C_{47}	$C_{31} + C_{45}$	–	–	1	–	1	/		/	/		/		/	/		/	/
C_{48}	$C_{32} + C_{41}$	–	–	1	–	1	/		/	/		/		/	/		/	/
C_{49}	[illegible]	–	–	1	–	1	/		/	/		/		/	/		/	/
C_{37} C_{38}		0	–	1	1	–		×	×		×	×						
C_{43} C_{44}		1	–	1	0	–							×	×		×	×	
C_{47} C_{48} C_{49}		–	–	1	–	1	×		×	×		×		×	×		×	×

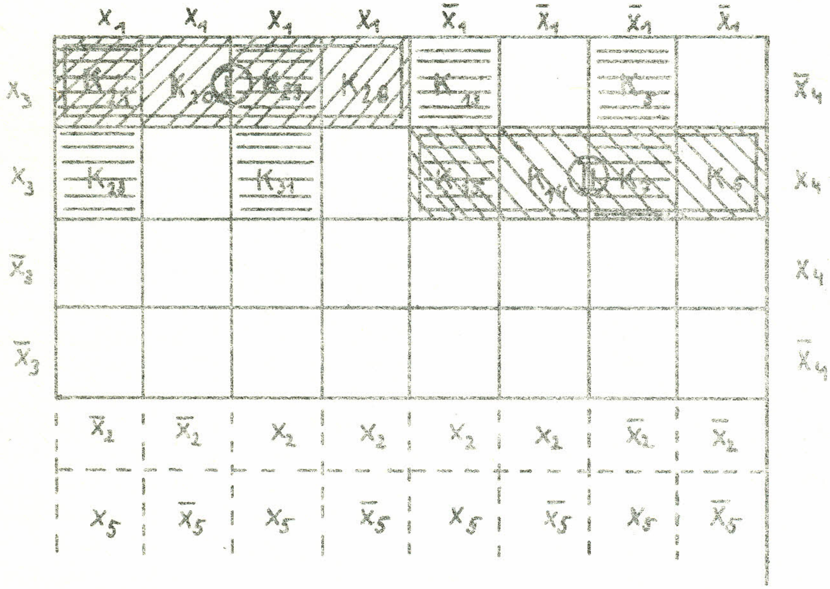
Minimalna DF bit će:

$$\mathcal{F} = x_1^0 x_3^1 x_4^1 + x_1^1 x_3^1 x_4^0 + x_3^1 x_5^1$$

odnosno

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_1 x_3 \bar{x}_4 + x_3 x_5$$

Da bismo provjerili točnost rezultata, mi ćemo minimalnu DF u našem zadatku naći pomoću Veitchove metode.



Dakle, minimalna DF opet će imati oblik:

$$\mathcal{F} = x_1 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_3 x_5$$

Na slici konjunkcije minimalne DF prikazane su na slijedeći način:

$x_1 x_3 \bar{x}_4$

$\bar{x}_1 x_3 x_4$

$x_3 x_5$

Primljeno: 1984-10-03

Balog B. "Quin's method for determination of minimal disjunctive form

S U M M A R Y

In the work the author treats a method for determining minimal disjunctive forms (DF). It is started from canon disjunctive normal form (KDNF) Boole's algebra which is by Quin's method rendered in minimal DF. First of all the author explained all the notions and theorems by means of which he sets algoritam for minimalization. He intended to show clearly this procedure and a lot of space is given to the very explanation of this procedure. In the last example the author connected Quin's method with Veitch's method just to show that the both methods give the same result.