Dr Milorad Bojanić
Fakultet organizacije i informatike
V a r a ž d i n

UDK: 65.012.122
Stručni rad

S A Ž I M A N J E M O D E L A L I N E A R N O G P R O G R A M I R A N J A U I Z B O R U V A R I J A N T I R A Z M J E Š T A J A E L E M E N A T A Z A P L A N K R O J E N J A M A T E R I J A L A

Generiranje varijanti razmještaja elemenata za potrebe krojenja materijala predstavlja veoma složen posao koji se danas izvodi raznim matematičkim postupcima. Kako je ovaj problem kombinatorne prirode, broj generiranih varijanti razmještaja elemenata često prelazi neke racionalne granice te stvara, unatoč suvremenim sredstvima za obradu podataka, velike praktične probleme. Zato se u ovom radu i razmatra jedna mogućnost sažimanja modela linearnog programiranja koja značajno smanjuje broj generiranih varijanti koje se unose u model programiranja.

Rad je izradjen u okviru projekta 71.1.6. koji financira SIZ za znanost SR Hrvatske.

UVOD

Često nastaje potreba da se neki materijal kroji na elemente (prikrojke, iskrojke) raznih dimenzija. Zbog većeg broja tipova elemenata moguće je generirati veoma velik broj varijanti razmještaja elemenata, od kojih samo jedan izvjestan broj ulazi u optimalni plan krojenja materijala i tako čini osnovu za izradu krojnih shema. Razmatra li se tako jedan jednodimenzionalni problem krojenja materijala, onda broj generiranih varijanti zavisi o duljini jedinice materijala (trake), broju tipova elemenata i njihovim duljinama.

Da bi se proces generiranja varijanti razmejštaja elemenata mogao izvesti nekim matematičkim postupkom, često je potrebno unaprijed zadati neke kriterije po kojima se ocjenjuje značajnost svake pojedine varijante. Tako npr. kriterij može biti ostatak prostora po varijanti koji ne smije biti veći od unaprijed zadanog. Svaka varijanta razmještaja koja ima veći ostatak prostora od zadanog ne smatra se racionalnom varijantom i ispušta se iz daljnjeg razmatranja. Ovakav kriterij, u svakom slučaju, utječe i na broj generiranih varijanti, tj. broj varijanti razmještaja elemenata ovisi o intenzitetu zadanog kriterija.

Neosporno je da, unatoč svemu što je rečeno, postoji velik broj generiranih varijanti i da model linearnog programiranja, s kojim se želi doći do onih varijanti na osnovi kojih će se konstruirati takve krojne sheme koje daju minimalan otpad materijala u procesu krojenja, ima velike dimenzije, što često stvara nepremostive teškoće u procesu njegove obrade. Na dimenzije ovakvog modela moguće je utjecati preko njegovo sažimanja, tj. preko uvodjenja u model samo jednog izvjesnog broja generiranih varijanti koje se mogu operatorima preoblikovati u nove varijante kada se za to ukaže potreba. U svrhu pojedinih razjašnjenja uvode se zbog toga dva pojma: nesažeti i sažeti model linearnog programiranja. Ako se u nekom modelu linearnog programiranja nalaze sve generirane racionalne varijante razmještaja elemenata, govori se o nesažetom modelu, dok u slučaju kada model sadrži samo neki odredjeni broj osnovnih varijanti i njima pridružene operatore, govori se o sažetom modelu.

VEKTORI-OPERANDI I VEKTORI-OPERATORI

Činjenica je da se svaki materijal može krojiti na elemente raznih tipova i da se elementi jednog tipa (jedne duljine) mogu zamijeniti elementima drugog tipa. Tako npr. iz elementa duljine 520 mm mogu se dobiti elementi duljine 385 mm i 130 mm s ostatkom materijala od 5 mm. Ova mogućnost zamjene može biti veoma značajna kod postavljanja odgovarajućeg modela za traženje optimalne situacije. Suvišak jednih elemenata u optimalnom planu krojenja može nadoknaditi manjak drugih, tj. jedna osnovna varijanta po kojoj se dobiva suvišak jednih elemenata može se djelomično zamijeniti nekom drugom koja uspostavlja ravnotežu u pogledu zahtijevanog broja elemenata. Varijante zamjene, koje omogućavaju zamjenu jednih tipova elemenata drugim u odredjenim količinskim odnosima, nazivaju se ekvivalentne ako ne daju ostatak prostora, odnosno ako je ostatak oblasti $o_\gamma = 0$ $(\gamma = 1,2,\dots,k)$. varijante zamjene po kojima se ostvaruje ostatak prostora $o_\eta > 0$ $(\eta=1,2,\dots,l)$ nazivaju se neekvivalentne varijante.

Neka je krojenjem potrebno dobiti m tipova elemenata e_i $(i=1,2,\dots,m)$ iz neke količine materijala uz prisustvo V_j $(j = 1,2,\dots,n)$ varijanti razmještaja elemenata. Ako je a_{ij} broj elemenata i-tog tipa pri j-tom načinu razmještaja elemenata na jedinicu materijala (trake), a b_i $(i=1,2,\dots,m)$ potreban broj elemenata pojedinog tipa, tada je potrebno naći vektor X $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koji minimalizira postavljenu funkciju cilja, tj. treba naći koliko se puta koja varijanta V_j koristi da bi se osigurao minimalan otpad u krojenju materijala.

Uvaži li se mogućnost zamjene jednih tipova elemenata drugim u odredjenom količinskom odnosu, tada se mogu ti odnosi zamjene, u općem obliku, izraziti kao:

$$\sum_i \alpha_{i\bar{l}} \tilde{E}_i \geq 0, \; l = 1,2,\ldots,\Theta,$$

gdje je sa $\alpha_{i\bar{l}}$ dat koeficijent koji karakterizira brojčane veze dopustive zamjenjivosti jednih elemenata drugim, sa E_i fizička karakteristika elementa i-tog tipa (npr. duljina)po kojoj je data veza zamjene, a s Θ broj dopustivih veza zamjene. Prema tome, treba model programiranja konstruirati tako da se sa što manje vektora stupaca izrazi skup svih mogućih varijanti razmještaja elemenata.

Neka su u jednom problemu krojenja materijala sastavljene ove sheme zamjene medju elementima:

1) $\alpha_{1\tilde{1}} E_1 = \alpha_{2\tilde{1}} E_2 + \alpha_{6\tilde{1}} E_6$,

2) $\alpha_{1\tilde{2}} E_1 = \alpha_{5\tilde{2}} E_5$,

3) $\alpha_{1\tilde{3}} E_1 = \alpha_{8\tilde{3}} E_8$ i

4) $\alpha_{3\tilde{4}} E_3 = \alpha_{6\tilde{4}} E_6 + \alpha_{9\tilde{4}} E_9$.

Prvi indeks od α pokazuje redni broj elementa, a drugi redni broj jednakosti. Znak ~ koristi se za označavanje sheme zamjene bez ostatka materijala. Ove jednadžbe mogu se interpretirati na slijedeći način: iz $\alpha_{1\tilde{1}}$ jedinica elementa E_1 mogu se dobiti $\alpha_{2\tilde{1}}$ jedinica elementa E_2 i $\alpha_{6\tilde{1}}$ jedinica elementa E_6 itd. Prilikom ove zamjene nema nikakvog ostatka materijala, tj. $o_\gamma = 0$ $(\gamma = 1,2,\ldots,k)$.

Kod neekvivalentnih shema zamjene javlja se neki ostatak materijala o_η $(\eta = 1,2,\ldots,l)$ te se te sheme mogu izraziti npr. na ovaj način:

5) $\alpha_{1\bar{1}} E_1 = \alpha_{3\bar{1}} E_3 + o_{\bar{1}}$,

6) $\alpha_{2\bar{2}} E_2 = \alpha_{4\bar{2}} E_4 + \alpha_{7\bar{2}} E_7 + o_{\bar{2}}$,

. . . .

e) $\alpha_{8\bar{l}} E_8 = \alpha_{m\bar{l}} E_m + o_{\bar{l}}$.

Kod ovih jednakosti sa $o_{\bar{l}}$ označen je otpad materijala u procesu krojenja pri zamjeni jednog elementa drugim u l-toj zadanoj vezi.

Ako se u jednadžbama 1) do 4) desna strana prenese na lijevu stranu znaka jednakosti i pomnoži s -1 te izjednači s nulom, dolazi se do toga da se elementi s pozitivnim koeficijentom mogu dobiti iz elemenata koji imaju negativan koeficijent, tj.

$$1)\ -\alpha_{1\tilde{1}}E_1+\alpha_{2\tilde{1}}E_2+\alpha_{6\tilde{1}}E_6=0,$$

$$2)\ -\alpha_{1\tilde{2}}E_1+\alpha_{5\tilde{2}}E_5=0,$$

$$3)\ -\alpha_{1\tilde{3}}E_1+\alpha_{8\tilde{3}}E_8=0 \text{ i}$$

$$4)\ -\alpha_{3\tilde{4}}E_3+\alpha_{6\tilde{4}}E_6+\alpha_{9\tilde{4}}E_9=0.$$

Učini li se isto s jednadžbama 5) do e), dobiva se:

$$5)\ -\alpha_{1\bar{1}}E_1+\alpha_{3\bar{1}}E_3+o_{\bar{1}}=0,$$

$$6)\ -\alpha_{2\bar{2}}E_2+\alpha_{4\bar{2}}E_4+\alpha_{7\bar{2}}E_7+o_{\bar{2}}=0,$$

....

$$e)\ -\alpha_{8\bar{l}}E_8+\alpha_{m\bar{l}}E_m+o_{\bar{l}}=0.$$

Ovakav zapis shema zamjene dozvoljava da se koeficijenti u navedenim jednadžbama izraze kao koordinate vektora-stupca u odgovarajućim redovima prema rednom broju elementa. Prva četiri vektora, u tom slučaju, jesu ekvivalentna vektora $(\tilde{A})$, dok je preostali dio vektora neekvivalentan $(\bar{A})$. Vektori $\tilde{A}$ i $\bar{A}$ ne mogu se pojaviti samostalno u modelu jer ne predstavljaju varijante razmještaja elemenata u jedinici prostora. Ovi vektori mogu se koristiti samo uz one vektore koji predstavljaju varijante razmještaja elemenata u jedinici prostora koji se uzima za oblast razmještaja. Ovdje se mora uočiti da se kod zamjene jednog tipa elementa drugim ne radi o preradi već gotovog elementa na druge elemente. Radi se samo o tome da se izvodi preraspodjela broja jedinica materijala koji se kroji za element e_s, kada se zadovolji potražnja za tim elementom, na element $e_k^s(2)$.

Vektor koji ima jednu koordinatu s negativnim predznakom posjeduje svojstvo preoblikovanja ostalih vektora koji simboliziraju varijante razmještaja elemenata po jedinici oblasti razmještaja. (Ako se komponente neke generirane varijante razmještaja elemenata u oblasti razmještaja zbroje s komponentama jedne varijante zamjene, dobit će se neka nova varijanta razmještaja koju je bilo moguće generirati na osnovi oblasti razmještaja s elementima istog ili drugog tipa, no u drugom odnosu). Vektor kod kojega je jedna koordinata s negativnim predznakom nazvat će se, zbog toga, vektorom preoblikovanja. Vektor preoblikovanja naziva se ekvivalentnim vektorom-operatorom ako je njegova ocjena značajnosti $h_{i\tilde{l}} = 0$, tj. ako se zamjena jednog tipa elementa drugim ostvaruje bez dopunskog ostatka prostora koji treba uključiti u funkciju cilja. Neekvivalentni vektor-operator je svaki onaj vektor (s jednom koordinatom negativnog predznaka) s kojim se dobiva $h_{i\bar{l}}>0$. U ovom slučaju zamjena dovodi do dopunskog ostatka prostora koji treba uključiti u funkciju cilja. Ekvivalentni vektor preoblikovanja bit će označen sa $\tilde{A}_\gamma$ (γ= 1,2,...,k) a neekvivalentni vektor s $\bar{A}_\eta$ (η=1,2,....,l). Vektori koji simboliziraju generirane varijante na osnovi oblasti razmještaja nazivaju se osnovni vektori.

Neka su poznata tri osnovna vektora A_b, A_c i A_d u istom n-dimenzionalnom prostoru u kojem su dati i vektori preoblikovanja. Svi ovi vektori s ocjenom h_j (j=1,2,...,n) imaju pozitivne koordinate po prvom redu, dok vektori preoblikovanja $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ (ekvivalentni) i $\bar{A}_1$ (neekvivalentni) imaju koordinate po prvom redu s negativnim predznakom. Ako negativna koordinata vektora preoblikovanja nije veća od pozitivne koordinate osnovnog vektora po jednom te istom redu, tada zbroj tih dvaju vektora daje osnovni vektor (novu varijantu razmještaja), te se može napisati:

$$\text{ako je} \quad \left\{ \begin{matrix} a_{ij} + \alpha_{i\tilde{\gamma}} \\ a_{ij} + \alpha_{i\bar{\eta}} \end{matrix} \right\} \geq 0 \quad \text{tada je} \quad \left\{ \begin{matrix} A_j + \tilde{A}_\gamma = A_{j\tilde{\gamma}} \\ A_j + \bar{A}_\eta = A_{j\bar{\eta}} \end{matrix} \right\}.$$

Zbrajanje osnovnog vektora A_b i ekvivalentnog vektora preoblikovanja $\tilde{A}_1$ daje vektor $A_{b\tilde{1}}$, tj.

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ \cdot\cdot \\ E_m \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} A_b \\ \begin{bmatrix} a_{1b} \\ 0 \\ 0 \\ a_{4b} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ h_b \end{array}
+
\begin{array}{c} \tilde{A}_1 \\ \begin{bmatrix} -\alpha_{1\tilde{1}} \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{4\tilde{1}} \\ \alpha_{5\tilde{1}} \\ \cdots\cdot \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{array}
=
\begin{array}{c} A_{b\tilde{1}} \\ \begin{bmatrix} a_{1b} - \alpha_{1\tilde{1}} \\ 0 \\ 0 \\ a_{4b} + \alpha_{4\tilde{1}} \\ \alpha_{5\tilde{1}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ h_{\tilde{b}} \end{array}.$$

Vektor $A_{b\tilde{1}}$ ima druge koordinate i prividno se razlikuje od vektora A_b, ali mu je ekvivalentan jer A_b i $A_{b\tilde{1}}$ imaju istu polaznu ocjenu značajnosti. To se može vidjeti na osnovi ove jednadžbe:

$$(a_{1b} - \alpha_{1\tilde{1}})E_1 + (a_{4b} + \alpha_{4\tilde{1}})E_4 + \alpha_{5\tilde{1}}E_5 = a_{1b}E_1 + A_{4b}E_4.$$

Uredi li se ova jednadžba na slijedeći način, dobiva se:

$$a_{1b}E_1 - \alpha_{1\tilde{1}}E_1 + a_{4b}E_4 + \alpha_{4\tilde{1}}E_4 + \alpha_{5\tilde{1}}E_5 - a_{1b}E_1 + a_{4b}E_4 = 0,$$

a nakon kraćenja jednakih članova proizlazi da je:

$$-\alpha_{1\tilde{1}}E_1 + \alpha_{4\tilde{1}}E_4 + \alpha_{5\tilde{1}}E_5 = 0$$

što odgovara iznijetom o uvjetu ekvivalentnosti.

Zbrajanje osnovnog vektora A_b i neekvivalentnog vektora preoblikovanja $\hat{A}_1$ daje novi neekvivalentni vektor $A_{b\bar{1}}$, tj.

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ .. \\ E_m \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} A_b \\ \begin{bmatrix} a_{1b} \\ 0 \\ 0 \\ a_{4b} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ h_b \end{array}
+
\begin{array}{c} \bar{A}_1 \\ \begin{bmatrix} -\alpha_{1\bar{1}} \\ \alpha_{2\bar{1}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots\cdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ h_{\bar{1}} \end{array}
=
\begin{array}{c} A_{b\bar{1}} \\ \begin{bmatrix} a_{1b} - \alpha_{1\bar{1}} \\ \alpha_{2\bar{1}} \\ 0 \\ a_{4b} \\ 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ h_{b\bar{1}} \end{array}$$

Ocjena značajnosti dobivenog vektora $A_{b\bar{1}}$ već je drugačija i jednaka je $h_b + h_{\bar{1}} = h_{b\bar{1}}$. Za nejednakost ocjena značajnosti vektora A_b i $A_{b\bar{1}}$ vrijedi ova nejednadžba:

$$(a_{1b} - \alpha_{1\bar{1}})E_1 + \alpha_{2\bar{1}}E_2 + a_{4b}E_4 \neq a_{1b}E_1 + a_{4b}E_4.$$

Uredjenjem ove nejednadžbe dolazi se do:

$$a_{1b}E_1 - \alpha_{1\bar{1}}E_1 + \alpha_{2\bar{1}}E_2 + a_{4b}E_4 - a_{1b}E_1 - a_{4b}E_4 \neq 0,$$

odnosno

$$-\alpha_{1\bar{1}}E_1 + \alpha_{2\bar{1}}E_2 \neq 0,$$

iz čega slijedi da lijeva strana ove nejednadžbe daje $h_{\bar{1}} > 0$ i $h_{b\bar{1}} \neq h_b$.

Kako se kod ovog postupka preoblikovanja javljaju tri izraza za vektore, to će se u daljnjem tekstu osnovni vektor koji se podvrgava preoblikovanju nazvati vektor-operand, vektor s kojim se izvodi preoblikovanje vektor-operator, a vektor koji se dobiva operacijom zbrajanja vektora-operanda i vektora-operatora nazivat će se vektor-slika. Proces preoblikovanja označava se kao $\tilde{A}_\gamma(A_j)$ ili $\bar{A}_\eta(A_j)$ gdje je vektor-operand dat u zagradama, a vektor-operator pred zagradama. Izrazi $\tilde{A}_\gamma(A_j)$ ili $\bar{A}_\eta(A_j)$ simboliziraju vektore-slike.

Neka je $a_{1b}/\alpha_{1\tilde{1}} = |K|$ po modulu, tada je moguće ostvariti k ponavljajućih preoblikovanja operanda A_b operatorom $A_{\tilde{1}}$, tj.

$$
\begin{aligned}
&1)\ A_b + \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1(A_b),\\
&2)\ \tilde{A}_1(A_b) + \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^2(A_b),\\
&3)\ \tilde{A}_1^2(A_b) + \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^3(A_b),\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&h)\ \tilde{A}_1^{k-1}(A_b) + \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^k(A_b).
\end{aligned}
$$

Dobiveni vektor-slika u svakom od ovih preoblikovanja simbolizira jednu novu varijantu razmještaja elemenata. Na neki vektor-operand može se po nekom redoslijedu uzastopce djelovati s dva ili više različitih vektora-operatora. Izmjena redoslijeda preoblikovanja ne utječe na konačan rezultat, tj. ovdje vrijedi zakon komutativnosti. Kod ekvivalentnog preoblikovanja s vektorom A_γ ocjena značajnosti h_j nalazi se i u vektoru-slika bez obzira na stupanj preoblikovanja. Pri neekvivalentnom preoblikovanju s vektorom $\bar{A}_\eta$ ocjena značajnosti vektora-slike, poslije svakog preoblikovanja, uvećava se za h_η.

U nizu slučajeva proces postepenog preoblikovanja osnovnih vektora može se izvesti pomoću zbroja dvaju vektora-operatora koji tada čine novi vektor-operator. Tako npr. zbroj vektora-operatora $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$ daje novi vektor-operator $\tilde{A}_{\tilde{1}\tilde{2}}$, ili $\tilde{A}_1 + \bar{A}_1 = \bar{A}_{\tilde{1}\bar{1}}$. Ovdje se može lako dokazati da u rezultatu niza preoblikovanja vektorima-operatorima vrijedi zakon asocijativnosti. Nadalje, lako je uočiti da će novoformirani vektor-operator biti ekvivalentan ako su polazni vektori-operatori ekvivalentni, odnosno neekvivalentan ako je bar jedan od vektora-operatora neekvivalentan, što se može notirati na ovaj način (2):

$$\tilde{A}_\gamma + \tilde{A}_\gamma = 2\tilde{A}_\gamma;\ \bar{A}_\eta + \bar{A}_\eta = 2\bar{A}_\eta;\ \tilde{A}_\gamma + \bar{A}_\eta = \bar{A}_{\tilde{\gamma}\bar{\eta}}\ .$$

Ako je poznat skup svih mogućih varijanti razmještaja elemenata $V_1, V_2, \ldots, V_n$ i pri tome je moguće definirati količinske odnose zamjenjivosti medju elementima, tada se pomoću operatora mogu odrediti operandi koji zajedno s operatorima mogu osigurati generiranje bilo koje varijante razmještaja elemenata (uz postavljene odnose zamjenjivosti). Pretpostavi li se da se u skupu N osnovnih vektora nalaze vektori A_b, A_c, A_d i A_l, tada se može napisati da je:

$$a_{1b} + \left\{ \begin{array}{c} -\alpha_{1\tilde{1}} \\ -\alpha_{1\tilde{2}} \\ -\alpha_{1\tilde{3}} \\ -\alpha_{1\bar{1}} \end{array} \right\} \geq 0,$$

te da se kao rezultat preoblikovanja mogu dobiti vektori-slike: $\tilde{A}_1(A_b)$, $\tilde{A}_2(A_b)$, $\tilde{A}_3(A_b)$, $\bar{A}_1(A_b)$ itd. Svaki od ovih vektora-slika dobiven je preoblikovanjem vektora-operanda vektorima-operatorima $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, $\tilde{A}_3$ i $\bar{A}_1$, što znači da skupu N obavezno pripadaju vektori-slike $\tilde{A}_1(A_b)$, $\tilde{A}_2(A_b)$, $\tilde{A}_3(A_b)$, $\bar{A}_1(A_b)$ itd.

Ako se nad vektorima-slikama izvede suprotno preoblikovanje, dobivaju se polazni vektori-operandi. Suprotno preoblikovanje označavat će se sa znakom minus ispred vektora-operatora. Dva numerički jednaka preoblikovanja, no medjusobno različita po predznaku, daju kao rezultat nulto preoblikovanje tako da je uvijek $-\tilde{A}_\gamma[\tilde{A}_\gamma(A_j)] = A_j$ ili $-\bar{A}_\eta[\bar{A}_\eta(A_j)] = A_j$. U vezi s ovim može se napisati:

$$-\tilde{A}_1[\tilde{A}_1(A_b)] = A_b; \quad -\tilde{A}_3[\tilde{A}_3(A_b)] = A_b;$$
$$-\tilde{A}_2[\tilde{A}_2(A_b)] = A_b; \quad -\bar{A}_1[\bar{A}_1(A_b)] = A_b.$$

Iz ovog slijedi da skupu N pripadaju istovremeno vektori-operandi i vektori-slike.

Na osnovi iznijetog mogu se izvesti ovi stavovi (2):

1. Model linearnog programiranja u krojenju nekog materijala, ako su poznati količinski odnosi zamjenjivosti medju elementima, može se sažeti, tj. predstaviti s manjim brojem generiranih varijanti razmještaja elemenata. Skup svih mogućih racionalnih varijanti razmještaja elemenata može se predstaviti manjim brojem varijanti preko operanda i operatora. Jedan dio

varijanti dat je u neskrivenom obliku (operandi), dok je drugi dio dat u skrivenom obliku kao odredjene kombinacije operanda s operatorima.

2. Ako je u optimalnom planu krojenja materijala potrebna jedna krojna shema koja u sažetom modelu ima varijantu u skrivenom obliku, tada se u tom planu mora naći bar jedan operator zajedno s operandima.

Sažeti model linearnog programiranja sastoji se, prema tome, od vektora-operanda A_j, ekvivalentnih $\tilde{A}_\gamma$ i neekvivalentnih $\bar{A}_n$ vektora-operatora. Opći oblik sažetog modela može se izraziti kao: $M_o = |A_j|\tilde{A}_\gamma|\bar{A}_n|$ ili u nekim slučajevima kao: $M_1 = |A_j|\tilde{A}_\gamma|$ ili $M_2 = |A_j\ \bar{A}_n|$.

PREOBLIKOVANJE OPTIMALNE BAZE POMOĆU VEKTORA-OPERATORA

Neka su u optimalno rješenje, izmedju ostalih, ušli ovi vektori-operandi A_g, A_r, A_s i ekvivalentni vektor-operator $\tilde{A}_f$. Neka samo ovi vektori imaju koordinate po trećem redu (elementu e_3) i neka svaka od koordinata vektora-operanda po trećem redu u sumi s koordinatom vektora-operatora u tom redu daje veličinu ≥ 0, tj. $a_{3g} + (-\alpha_{3\tilde{f}}) \geq 0$, $a_{3r} + (-\alpha_{3\tilde{f}}) \geq 0$, $a_{3s} + (-\alpha_{3\tilde{f}}) \geq 0$.

Ukoliko se u optimalnom rješenju pojave navedeni vektori s učestalošću x_g, x_r, x_s i $\tilde{x}_f$, to pokazuje da bez operatora $\tilde{A}_f$ nije moguće dobiti elemente e_3, e_c i e_d u zahtijevanoj količini. Naime:

za e_3 dobiva se: $a_{3g}x_g + a_{3r}x_r + a_{3s}x_s > b_3$,

za e_c dobiva se: $a_{cg}x_g < b_c$,

za e_d dobiva se: $a_{ds}x_s < b_d$.

Kako se planom mora dobiti zahtijevani broj elemenata, u račun se mora uvesti i ekvivalentni vektor operator $\tilde{A}_f$ koji služi za preoblikovanje vektora-operanda. Ravnoteža izmedju zahtijevanog broja elementa i dobivenog broja po vektorima-operandima dobiva se uključenjem vektora-operatora, tj.

$$e_3:\ a_{3g}x_g + a_{3r}x_r + a_{3s}x_s - \alpha_{3\tilde{f}}\tilde{x}_f = b_3,$$

$$e_c:\ a_{cg}x_g + \alpha_{c\tilde{f}}x_f = b_c,$$

$$e_d:\ a_{ds}x_s + \alpha_{d\tilde{f}}x_f = b_d.$$

Preoblikovanje ovog ili onog operanda operatorom koji se javlja u optimalnom rješenju ne znači, u praktičnom smislu, potpuno isključenje date varijante iz primjene. Preoblikovanjem može biti obuhvaćen samo dio učestalosti te varijante. Jedna te ista varijanta može se preoblikovati u jednu ili više varijanti što zavisi o učestalosti korištenja u optimalnom rješenju osnovnih i preoblikujućih varijanti, a takodjer i o odnosu koordinata odgovarajućih vektora koji simboliziraju pojedinu varijantu.

ALGORITAM ZA ODREDJIVANJE VEKTORA-OPERANDA

U praktičnim situacijama primjene sažetog modela linearnog programiranja u procesu krojenja materijala ne polazi se od skupa svih mogućih racionalnih varijanti razmještaja elemenata. Potrebno je generirati samo one varijante razmještaja koje će kao operandi ući u model linearnog programiranja. Neka je za te potrebe zadana traka duljine L i elementi duljine $l_1, l_2, \ldots, l_m$ i neka se pod racionalnom varijantom razmještaja podrazumijeva svaka ona varijanta koja daje ostatak oblasti razmještaja $o_i \leq (p/q)l_m$ $(p=1,2,\ldots;\ q=1,2,\ldots)$. Generiranje varijanti koje u sažeti model ulaze kao operandi izvodi se po slijedećim koracima:

1. Odredi se maksimalno mogući broj a_{11} na način

$$a_{11} = [L/l_1],$$

zatim

$$a_{21} = [(L - a_{11}l_1)/l_2],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

te

$$a_{m1} = [(L - \sum_{i=1}^{m-1} a_{i1}l_i)/l_m]$$

pa se formira varijanta V_1 razmještaja elemenata.

2. Za odredjivanje varijante V_2 polazi se od najmanje duljine l_i elementa e_i u varijanti V_1 za koji je $a_{i1} > 0$ i $i \neq m$. Ukoliko je to element duljine l_k, umanjuje se a_{k1} za jedinicu i dobiva se $a_{k2} = a_{k1} - 1$. Ostatak oblasti razmještaja formiran na način $l_k + a_{m1}l_m$ rasporedjuje se na elemente duljine manje od l_k kako je to navedeno u točki 1. Ako se pri tome ostvari ostatak prostora $o_2 > (p/q)l_m$, tada se varijanta V_2 smatra neracionalnom i ne uključuje se u model. Ako je $o_2 \leq (p/q)l_m$,

razmatra se da li se varijanta V_2 ne pojavljuje kao "slika" koja se može dobiti iz varijante V_1 pomoću jednog od konstruiranih operatora uključenih u model. Ukoliko se varijanta V_2 može dobiti preko varijante V_1 i nekog operatora, ne uključuje se u model, a u protivnom varijanta V_2 postaje operandom.

3. Odredjivanje treće varijante V_3 izvodi se na osnovi varijante V_2 i po već navedenoj proceduri. Pri provjeri da li je varijanta V_3 "slika" razmatraju se varijante V_1 i V_2 (ako je posljednja uključena u model). Nastavak ove procedure dovodi do toga da se od svih mogućih varijanti razmještaja elemenata uključuju u model samo one koje predstavljaju operande. Ovdje treba naglasiti da se kod svake varijante dobivene ovim postupkom mora poštivati relacija: $L = a_1 l_1 + a_2 l_2 + \ldots + a_m l_m + 0$, tj. da se ne smije razmještajem elemenata pojedinih duljina prijeći duljina L zadane oblasti. Ostatak oblasti o_j po pojedinoj varijanti može biti jednak nuli ili veći od nule.

ZAKLJUČAK

Izloženi postupak sažimanja modela linearnog programiranja u procesu krojenja materijala ima veliku praktičnu vrijednost. Sažeti model omogućava uspješnu primjenu sredstava za obradu podataka, a postupak sažimanja ne zahtijeva komplicirani programsku podršku.

Na osnovi optimalnog programa lako se mogu identificirati sve krojne sheme po kojima se izvodi krojenje materijala uz minimalan otpad što opravdava sažimanje modela linearnog programiranja.

LITERATURA

1. *Bojanić B.-Bojanić M.-Petković V.: JEDAN PRISTUP SAŽIMANJU MODELA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U PROBLEMIMA KROJENJA MATERIJALA, Praksa br.11, Beograd, 1980, str.2-15.*

2. *Ispirjan G.P.: PROBLEMA OPTIMAL'NOGO ISPOL'ZOVANIJA SYR'JA I MATERIALOV, Legkaja industrija, Moskva, 1971.*

3. *Ispirjan G.P.-Rožok V.D.-Romanjuk T.P.: MATEMATIČESKIE METODY I MODELI V PLANIROVANII I UPRAVLENII V LEGKOJ PROMYŠLENNOSTI, Viša škola, Kiev, 1978.*

Primljeno: 1984-07-05

Bojanić M. Reduction of a linear programming model in the choice of the element placement schemes for a material cutting plan

S U M M A R Y

A linear programming model in the process of material cutting can be reduced, which means written without some rational element placement schemes. Vector-operands and vector-operators are needed for the reduced model. On the basis of these vectors, it is possible to generate any other vector that could represent certain cutting schemes in some real situation.